

கணிதம்-I

(நுண்கணிதம் மற்றும் நேரியல் இயற்கணிதம்)

கணினி அறிவியல் அல்லாத பொறியியல் கிளைகளுக்

நூலாசிரியர்:
ரீனா கார்க்

மொழிபெயர்ப்பாளர்கள்:

முனைவர்.ம. அருவி

முனைவர். ச. கலைசெல்வி

முனைவர். சீ. விஜயபாலாஜி

மதிப்பாய்வுரையாளர்:

முனைவர். டி.அறிவுடைநம்பி



KHANNA BOOK PUBLISHING CO. (P) LTD.

PUBLISHER OF ENGINEERING AND COMPUTER BOOKS

4C/4344, Ansari Road, Darya Ganj, New Delhi-110002

Phone: 011-23244447-48

Mobile: +91-99109 09320

E-mail: contact@khannabooks.com

Website: www.khannabooks.com

Dear Readers,

To prevent the piracy, this book is secured with HIGH SECURITY HOLOGRAM on the front title cover. In case you don't find the hologram on the front cover title, please write us to at contact@khannabooks.com or whatsapp us at +91-99109 09320 and avail special gift voucher for yourself.

Specimen of Hologram on front Cover title:



Moreover, there is a SPECIAL DISCOUNT COUPON for you with EVERY HOLOGRAM.

How to avail this SPECIAL DISCOUNT:

Step 1: Scratch the hologram

Step 2: Under the scratch area, your "coupon code" is available

Step 3: Logon to www.khannabooks.com

Step 4: Use your "coupon code" in the shopping cart and get your copy at a special discount

Step 5: Enjoy your reading!

ISBN: 978-93-91505-83-7

Book Code: UG024TA

MATHEMATICS - I
(Calculus and Linear Algebra)
Vol-1 For Non-Computer Science
Engineering Branches by Reena Garg
[Tamil Edition]

First Edition: 2022

Published by:

Khanna Book Publishing Co. (P) Ltd.

Visit us at: www.khannabooks.com

Write us at: contact@khannabooks.com

CIN: U22110DL1998PTC095547

To view complete list of books,
Please scan the QR Code:



Printed in India.

Copyright © Reserved

No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise without prior permission of the publisher.

This book is sold subject to the condition that it shall not, by way of trade, be lent, re-sold, hired out or otherwise disposed of without the publisher's consent, in any form of binding or cover other than that in which it is published.

Disclaimer: The website links provided by the author in this book are placed for informational, educational & reference purpose only. The Publisher do not endorse these website links or the views of the speaker/ content of the said weblinks. In case of any dispute, all legal matters to be settled under Delhi Jurisdiction only.



प्रो. म. जगदीश कुमार

अध्यक्ष

Prof. M. Jagadesh Kumar
Chairman



सत्यमेव जयते



अखिल भारतीय तकनीकी शिक्षा परिषद्

(भारत सरकार का एक सांविधिक निकाय)

(शिक्षा मंत्रालय, भारत सरकार)

नेल्सन मंडेला मार्ग, वसंत कुंज, नई दिल्ली-110070

दूरभाष : 011-26131498

ई-मेल : chairman@aicte-india.org

ALL INDIA COUNCIL FOR TECHNICAL EDUCATION

(A STATUTORY BODY OF THE GOVT. OF INDIA)

(Ministry of Education, Govt. of India)

Nelson Mandela Marg, Vasant Kunj, New Delhi-110070

Phone : 011-26131498

E-mail : chairman@aicte-india.org

முன்னுரை

தேசிய கல்விக் கொள்கை (NEP) 2020 உடன் இணைந்து, அகில இந்திய தொழில்நுட்பக் கல்விக்கழகம் (AICTE) 09 மொழிகளில் தொழில்நுட்ப புத்தகம் எழுதும் திட்டத்தை துவக்கியுள்ளது. அதாவது இந்தி, தமிழ், குஜராத்தி, கன்னடம், மராத்தி, பெங்காலி, தெலுங்கு, பஞ்சாபி மற்றும் ஒடியா ஆகிய மொழிகளில் ஆகும். அதைத் தொடர்ந்து, மேலும் 03 மொழிகள், அஸ்ஸாமி, மலையாளம் மற்றும் உருது ஆகியவை இதில் சேர்க்கப்பட்டுள்ளன. NEP-2020 இன் முக்கிய வலியுறுத்தல், மாணவர்களிடையே படைப்பாற்றல், விமர்சன சிந்தனையை மேம்படுத்தும் வகையில் தாய்மொழியில் கல்வியை வழங்குவதாகும்.

முதலாம் ஆண்டு பொறியியல் புத்தகம் எழுதும் பயணம், 20 பாடப்பிரிவுகள், டிப்ளமோ அளவில் 11 மற்றும் பட்டப்படிப்பு அளவில் 9 என அடையாளம் காணப்பட்டது. பின்னர், ஆங்கில மொழிகளில் அசல் புத்தகத்தை எழுதுவதற்காக பல்வேறு நிறுவனங்களைச் சேர்ந்த எழுத்தாளர்கள் அடையாளம் காணப்பட்டனர். அதே நேரத்தில், இந்தியா முழுவதும் உள்ள தொழில்நுட்ப பல்கலைக்கழகங்களை இணைத்து மொழிபெயர்ப்பாளர்கள் மற்றும் மதிப்பாய்வாளர்களை அடையாளம் காண ஒரு இணையான பயிற்சி தொடங்கப்பட்டது. அடையாளம் காணப்பட்ட ஒவ்வொரு மொழிக்கும், பல்வேறு பங்குதாரர்களுக்கு தரமான பாடப்புத்தகங்களை வழங்குவதற்காக பல்கலைக்கழகங்களுக்கு பணி வழங்கப்பட்டது.

புத்தகத்தின் தனித்துவமான அம்சங்கள்:

- பாடநெறி முடிவுகள், திட்டம் முடிவுகள் மற்றும் அத்தியாயம் முடிவுகள் விவரணையாக்கத்துடன் புத்தகத்தின் உள்ளடக்கம் சீரமைக்கப்பட்டது.
- ஒவ்வொரு அத்தியாயத்தின் தொடக்கத்திலும், அந்த அத்தியாயம் முடிந்த பிறகு, மாணவர் தன்னிடம் என்ன எதிர்பார்க்கிறார் என்பதைப் புரிந்துகொள்ளும் வகையில் கற்றல் முடிவுகள் பட்டியலிடப்பட்டுள்ளன.
- புத்தகம் சமீபத்திய தகவல்கள், சுவாரச்யமான உண்மைகள், மின்-வளங்களுக்கான QR குறியீடு, தகவல் மற்றும் தகவல் தொடர்பு தொழில்நுட்ப திட்டங்கள் போன்றவற்றைப் பயன்படுத்துவதற்கான QR குறியீடு, குழு விவாதம். ஆகியவற்றை வழங்குகிறது.
- மாணவர் மற்றும் ஆசிரியர்களை மையமாகக் கொண்ட பாடப் பொருள் புத்தகத்தில் சமச்சீர் மற்றும் காலவரிசைப்படி சேர்க்கப்பட்டுள்ளது.
- தலைப்புகளின் தெளிவை மேம்படுத்த புள்ளிவிவரங்கள், அட்டவணைகள் மற்றும் மென்பொருள் திரை விளக்கங்கள் செருகப்படுகின்றன.

நாட்டின் தொழில்நுட்பக் கல்வியை வலுப்படுத்துவதற்கு ஆசிரியர்கள், மொழிபெயர்ப்பாளர்கள் மற்றும் மதிப்பாய்வாளர்களின் பங்களிப்பு நீண்ட தூரம் செல்லும் என்பதில் நாங்கள் மிகவும் நம்பிக்கையுடன் இருக்கிறோம்.

(பேராசிரியர் எம். ஜெகதேஷ் குமார்)

ஒப்புதல்கள்

பொறியியல் மற்றும் தொழில்நுட்பம் மாணவர்களுக்கான தொழில்நுட்பப் புத்தகத்தை வெளியிடுவதற்கு ஏஐசிடிஇ (AICTE) யின் நுட்பமான திட்டமிடல் மற்றும் செயல்பாட்டிற்காக ஆசிரியர்(கள்) நன்றியுள்ளவர்களாக இருக்கிறோம்.

புத்தகத்தை மாணவர்களின் நட்பாக மாற்றியதற்கும், கலைநயமிக்க முறையில் சிறந்த வடிவத்தை வழங்கியதற்கும், பேராசிரியர் கரிமா சிங்கின் மதிப்புமிக்க பங்களிப்பை நாங்கள் மனதார ஒப்புக்கொள்கிறோம்.

இந்த புத்தகம் AICTE மாதிரி பாடத்திட்டத்துடன் மற்றும் தேசிய கல்விக் கொள்கை (NEP)-2020 இன் வழிகாட்டுதலின்படி சீரமைக்கப்பட்டுள்ளது என்பதையும் பெருமையுடன் தெரிவித்துக் கொள்கிறோம். பிராந்திய மொழிகளில் கல்வியை ஊக்குவிப்பதற்காக, இந்த புத்தகம் திட்டமிடப்பட்ட இந்திய பிராந்திய மொழிகளில் மொழிபெயர்க்கப்பட்டுள்ளது.

தமிழ் மொழியில், மொழிபெயர்ப்பு பணிக்காக முனைவர் ம. அருவி, முனைவர் சுகலைசெல்வி & எஸ். விஜயபாலாஜி ஆகியோருக்கும் மற்றும் மதிப்பாய்வு செய்தமைக்காக முனைவர் டி. அறிவுடைநம்பி அவர்களுக்கும் நாங்கள் நன்றி கூற விரும்புகிறோம்.

Sh. புத்த சந்திரசேகர், CCO NEAT AICTE, அவர்களது AI அடிப்படையிலான மொழிபெயர்ப்பாளர் கருவி மொழிபெயர்ப்பு நோக்கங்களுக்காகப் பயன்படுத்தப்பட்டதற்கு, அவருக்கு எங்கள் மனமார்ந்த வணக்கங்களைத் தெரிவித்துக் கொள்கிறோம்.

இறுதியாக, வெளியீட்டு நிறுவனமான M/s. கண்ணா பப்ளிஷிங் கம்பெனி பிரைவேட் லிமிடெட், புது தில்லி, அவர்களுக்கு எங்களது மனமார்ந்த நன்றியை தெரிவித்து, அனைத்து அம்சங்களும் பொருந்திய இப்புத்தகத்தின் வெளியீட்டை ஒரு அற்புதமான அனுபவமாக மாற்ற, பதிப்பகத்தார் முழு ஒத்துழைப்பையும் வழங்கி இருந்தார்கள் என்பதையும் மிகுந்த நன்றியுடன் தெரிவித்து கொள்கிறோம்.

ரீனா கார்க்

முகவுரை

கணிதமானது அறிவியல் அறிவுக்கு அவசியமான ஒரு வழி, இது மன திறனின் புதிய பார்வைகளைத் திறக்கிறது. பொறியியல் கணிதம் கோட்பாடு மற்றும் நடைமுறையின் சமநிலையை வழங்குவதில், இது அறிவுப்பூர்வமாக தூண்டப்படுகிறது. அன்றாட உலகப் பிரச்சினைகளுக்கு கணிதத்தைப் பயன்படுத்துவதற்கான கலைகளைக் கற்றுக்கொள்வது ஒரு பொறியியல் மாணவர், பிரச்சினையின் தீர்வுகளைக் கண்டறிய அனுமதிக்கிறது.

நுண்கணிதம் மற்றும் நேரியல் இயற்கணிதம், 21 ஆம் நூற்றாண்டின், குறிப்பாக, பி.டெக் இளங்கலை மாணவர்களுக்காக கணித பாடத்தில் ஒரு நல்ல புரிதலை வழங்குவதை நோக்கமாகக் கொண்டுள்ளது. **பலன் சார்ந்த கல்வி மற்றும் புரூமின் வகைப்பாடு** அடிப்படையிலான புதிய தேசிய கல்விக் கொள்கையின்படி மாணவர்களை மையமாகக் கொண்ட மற்றும் சுய கற்றல் நடவடிக்கைகளை உள்ளடக்கிய அகில இந்திய தொழில்நுட்பக் கல்விக் குழு (AICTE) மாதிரி பாடத்திட்டத்துடன் இந்த புத்தகம் வடிவமைக்கப்பட்டுள்ளது. பொறியியல் மற்றும் அறிவியல் துறைகளில் கணிதக் கருவிகளைப் படிப்பதற்கும் மற்றும் பயன்படுத்துவதற்கும் வாசகர்களிடையே ஆர்வத்தை உருவாக்க, தலைப்புகள் சிறந்த முறையில் வடிவமைக்கப்பட்டுள்ளன. இப்புத்தகத்தின் அலகுகளில் விவாதிக்கப்பட்ட கருத்துகள், குறிப்பாக நடைமுறை பயன்பாடுகளுக்கு முக்கியத்துவம் அளிக்கிறது. இது மாணவர்கள் கணக்குகளை தீர்க்கும் திறன்களில் நிதானமாக சிந்திக்க உதவும்.

புத்தகம் 5 அலகுகளைக் கொண்டுள்ளது. தலைப்பைப் பற்றி மேலும் புரிந்துகொள்ள, ஒரு சிறந்த எண்ணிக்கையிலான போட்டித் தேர்வுகளை சார்ந்த கேள்விகள், ஒவ்வொரு அலகின் முடிவிலும், **குறுகிய கேள்விகள், அகநிலைதீர்க்கப்பட்ட கேள்விகள், வகுப்பீடு, குறிக்கோள் கேள்விகள்**, மற்றும் **மேலும் அறிக** எனும் தலைப்புகளில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. மாணவர்களின் திறனை மேம்படுத்தவும், குழுப்பணியின் உணர்வை அதிகரிக்கவும் ஒவ்வொரு அலகின் முடிவிலும் **செயல்திட்டம் / செயல்முறை / செயல்பாடு** ஆகியவைக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. பாடத்தை தெளிவுபடுத்த, **குறிப்புகள், அவதானிப்புகள்** மற்றும் **குறிப்புரைகள்** மூலம் உரை கூடுதலாக வழங்கப்பட்டுள்ளது. சாத்தியமான எல்லா இடங்களிலும் வடிவவியலின் அதிகப்படி பயன்பாடு மூலம் தலைப்புகளை விளக்கும் முயற்சி மேற்கொள்ளப்பட்டுள்ளது.

அலகு-1: வகையீடுகள், வளைவு, வரையறுத்த மற்றும் முறையற்ற தொகையீடுகள், பீட்டா-காமா சார்புகள் மற்றும் அவற்றின் பண்புகள் ஆகியவை விவரிக்கப்பட்டுள்ளன .

அலகு-2: ரோலின் தேற்றம், சராசரி மதிப்பு தேற்றம், டெய்லர் மற்றும் மெக்லாரின் தேற்றங்கள், லோபித்தாலின் விதி மற்றும் ஒரு மாறியின் பெருமம்- சிறுமம் ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்தி தீர்வுகளைக் காணுவதில் கவனம் செலுத்தப்பட்டுள்ளது.

அலகு-3: வரிசை மற்றும் தொடர்களின் ஒருங்கிணைப்பு மற்றும் மாறுபாடு மற்றும் ஒருங்கிணைப்புக்கான பல்வேறு சோதனைகள், டெய்லர் மற்றும் மெக்லாரின் தொடர்கள், அடுக்குத் தொடர், ஃபோரியர் தொடர்கள் மற்றும் எடுத்துக்காட்டுகளுடன் தொடர்புடையது.

அலகு-4: வரம்பு, தொடர்ச்சி, வழித்தோன்றல்கள், தொடுகோடு மற்றும் இயல்பான கோடு, இரண்டு மாறிகளுக்கு பெருமம் சிறுமம், பெருக்கிகளின் லாக்ரேஞ்ச் முறை, சாய்வு, சுழல் மற்றும் வேறுபாடு ஆகியவற்றில் கவனம் செலுத்துகிறது; எண்ணியல் சிக்கல்களுடன் அவைகளின் இயற்பியல் விளக்கத்தையும் தருகிறது.

அலகு-5: ஐகன் மதிப்புகள், ஐகன் வெக்டர்கள், மூலைவிட்டமயமாக்கல், சமச்சீர் மற்றும் சாய்-சமச்சீர் அணிகள், கெய்லி-ஹாமில்டன் தேற்றம் போன்றவற்றை அடிப்படையாகக் கொண்டது.

கணிதம் என்பது கடின உழைப்பு மற்றும் பயிற்சியின் மூலம் மட்டுமே தேர்ச்சி பெறக்கூடிய ஒரு பாடமாகும். கணிதத்தின் கற்றல் செயல்பாட்டில் “பயிற்சி” மட்டுமே முக்கிய வார்த்தை.

இந்த புத்தகம் அனைத்து பொறியியல் மாணவர்களின் தேவைகளையும் எதிர்பார்ப்புகளையும் பூர்த்தி செய்யும் என்று நம்புகிறோம். அச்சு பிழைகள் மற்றும் தவறுகளைத் தவிர்ப்பதற்காக ஒவ்வொரு கவனமும் எடுக்கப்பட்டிருந்தாலும், முழுமையைக் கோருவது கடினம். ஆசிரியர்கள் மற்றும் மாணவர்களிடமிருந்து, கருத்துக்களையும் பரிந்துரைகளையும், உரை மற்றும் மேம்பட்ட எடுத்துக்காட்டுகளில் மேம்படுத்துவதற்கு நாங்கள் நன்றியுடன் ஏற்றுக்கொள்வோம்.

ரீனா கார்க்

விளவை அடிப்படையாகக் கொண்ட கல்வி

முடிவை அடிப்படையாகக் கொண்ட கல்வியைச் செயல்படுத்துவதற்கு முதல் தேவை ஒரு விளைவு அடிப்படையிலான பாடத்திட்டத்தை உருவாக்குவது மற்றும் கல்வி அமைப்பில் விளைவு அடிப்படையிலான மதிப்பீட்டை இணைப்பது ஆகும். முடிவு அடிப்படையிலான மதிப்பீடுகளை மதிப்பீடு செய்வதன் மூலம், மாணவர்கள் வரையறுக்கப்பட்ட தரநிலை, குறிப்பிட்ட மற்றும் அளவிடக்கூடிய முடிவுகளை அடைந்திருக்கிறார்களா என்பதை மதிப்பீடு செய்ய முடியும். விளைவு சார்ந்த கல்வியை முறையாக இணைப்பதன் மூலம் எந்த நிலையிலும் விட்டுக்கொடுக்காமல் அனைத்து மாணவர்களுக்கும் குறைந்தபட்ச தரத்தை அடைய உறுதியான உறுதிப்பாடு இருக்கும். முடிவு அடிப்படையிலான கல்வியின் உதவியுடன் இயங்கும் திட்டத்தின் முடிவில், ஒரு மாணவர் பின்வரும் முடிவுகளை அடைய முடியும்:

PO-1: பொறியியல் அறிவு: சிக்கலான பொறியியல் சிக்கல்களைத் தீர்க்க கணிதம், அறிவியல், பொறியியல் அடிப்படைகள் மற்றும் பொறியியல் நிபுணத்துவம் பற்றிய அறிவைப் பயன்படுத்துதல்.

PO-2: சிக்கல் பகுப்பாய்வு: கணிதம், இயற்கை அறிவியல் மற்றும் பொறியியல் அறிவியலின் முதல் கொள்கைகளைப் பயன்படுத்தி ஆதாரப்பூர்வமான முடிவுகளை அடையும் சிக்கலான பொறியியல் சிக்கல்களை அடையாளம் கண்டு, வடிவமைத்து, மறுபரிசீலனை செய்தல்.

PO-3: தீர்வுகளின் வடிவமைப்பு/மேம்பாடு: சிக்கலான பொறியியல் சிக்கல்களுக்கான வடிவமைப்பு தீர்வுகள் மற்றும் வடிவமைப்பு அமைப்பு கூறுகள் அல்லது செயல்முறைகள் பொது சுகாதாரம் மற்றும் பாதுகாப்பு மற்றும் கலாச்சார, சமூக மற்றும் சுற்றுச்சூழல் கருத்தாய்வுகளுக்கு பொருத்தமான தேவைகளை பூர்த்தி செய்தல்.

PO-4: சிக்கலான கணக்குகளின் ஆராய்தல்: சரியான முடிவுகளை எடுக்க, சோதனைகளின் வடிவமைப்பு, பகுப்பாய்வு மற்றும் தரவின் விளக்கம் மற்றும் தகவல் தொகுப்பு உள்ளிட்ட ஆராய்ச்சி அடிப்படையிலான அறிவு மற்றும் ஆராய்ச்சி முறைகளைப் பயன்படுத்துதல்.

PO-5: நவீன கருவி பயன்பாடு: வரம்புகளைப் புரிந்துகொண்டு சிக்கலான பொறியியல் செயல்பாடுகளுக்கு கணிப்பு மற்றும் மாடலிங் உள்ளிட்ட பொருத்தமான நுட்பங்கள், வளங்கள் மற்றும் நவீன பொறியியல் மற்றும் ஐடி கருவிகளை உருவாக்கவும், தேர்ந்தெடுக்கவும் மற்றும் பயன்படுத்துதல்.

PO-6: பொறியியலாளர் மற்றும் சமூகம்: சமூக, சுகாதாரம், பாதுகாப்பு, சட்ட மற்றும் கலாச்சார பிரச்சினைகள் மற்றும் தொழில்முறை பொறியியல் நடைமுறைக்கு தொடர்புடைய பொறுப்புகளை மதிப்பிடுவதற்கு சூழல் அறிவால் அறிவிக்கப்பட்ட பகுத்தறிவைப் பயன்படுத்துதல்.

PO-7: சுற்றுச்சூழல் மற்றும் நிலைத்தன்மை: சமூக மற்றும் சுற்றுச்சூழல் சூழல்களில் தொழில்முறை பொறியியல் தீர்வுகளின் தாக்கத்தைப் புரிந்துகொண்டு, நிலையான வளர்ச்சிக்கான அறிவையும் தேவையையும் நிரூபித்தல்.

PO-8: நெறிமுறைகள்: நெறிமுறைக் கோட்பாடுகளைப் பயன்படுத்துதல் மற்றும் தொழில்முறை நெறிமுறைகள் மற்றும் பொறுப்புகள் மற்றும் பொறியியல் நடைமுறையின் விதிமுறைகளுக்கு உறுதியளித்தல்.

PO-9: தனிநபர் மற்றும் குழுப்பணி: ஒரு தனி நபராகவும், பல்வேறு குழுக்களில் உறுப்பினர் அல்லது தலைவராகவும், பலதரப்பட்ட அமைப்புகளிலும் திறம்பட செயல்படுதல்.

PO-10: தகவல்தொடர்பு: பொறியியல் சமூகம் மற்றும் சமூகத்துடன் சிக்கலான பொறியியல் செயல்பாடுகளில் திறம்பட தொடர்பு கொள்ளுதல், அதாவது, பயனுள்ள அறிக்கைகள் மற்றும் வடிவமைப்பு ஆவணங்களை புரிந்துகொள்ளவும் எழுதவும், பயனுள்ள விளக்கக்காட்சிகளை வழங்குதல், தெளிவான அறிவுறுத்தல்களை வழங்குதல் மற்றும் பெறுதல்.

PO-11: திட்ட மேலாண்மை மற்றும் நிதி: பொறியியல் மற்றும் மேலாண்மை கொள்கைகள் பற்றிய அறிவையும் புரிதலையும் நிரூபித்து, ஒரு குழுவில் உறுப்பினராகவும், தலைவராகவும், திட்டங்களை நிர்வகிப்பதற்கும், பலதரப்பட்ட சூழல்களிலும் ஒருவரின் சொந்த வேலைக்கு இதைப் பயன்படுத்துதல்.

PO-12: வாழ்நாள் முழுவதும் கற்றல்: தொழில்நுட்ப மாற்றத்தின் பரந்த சூழலில் சுயாதீனமான மற்றும் வாழ்நாள் முழுவதும் கற்றலில் ஈடுபடுவதற்கான தேவை மற்றும் திறனை அங்கீகரித்தல்.

பாடநெறி விளைவுகள்

இந்த பாடத்திட்டத்தை முடித்த பிறகு, மாணவர்கள் பின்வருவனவற்றை அறிந்து கொள்ள முடியும்:

CO-1: வளைவு, வளைவின் மையம், மற்றும் சூழ்வு ஆகியவற்றிற்கு சரியான கணித வரம்பு குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி முறையற்ற தொகையீடுகளை மதிப்பிடுவதற்கு தொகையீடு மற்றும் வகையீட்டு நுண்கணிதத்தை பயன்படுத்துதல். இந்த பயன்பாடுகளைத் தவிர, பீட்டா மற்றும் காமா செயல்பாடுகளைப் பற்றிய அடிப்படை புரிதல் அவர்களுக்கு இருக்கும்.

CO-2: கொடுக்கப்பட்ட இடைவெளி மற்றும் முக்கோணவியல் மற்றும் ஆழ்நிலை செயல்பாடுகளின் விரிவாக்கத்திற்கான செயல்பாட்டின் நடத்தையை ஆராய்தல். தேரப்பெறா வடிவங்கள், கணக்குகளில் அவற்றின் நிகழ்வு மற்றும் லோபித்தல் விதியை மீண்டும் மீண்டும் பயன்படுத்துவதன் மூலம் அதன் வரம்புகளை கணக்கிடல்.

CO-3: முடிவிலியில் வரம்பின் கருத்தைப் பயன்படுத்தி வரிசையின் எல்லை, ஒருங்கிணைப்பு மற்றும் வேறுபாட்டைத் தீர்மானித்தல்; ஒரு தொடரின் கருத்தை ஒரு வரிசையின் கூட்டுத்தொகையாக விளக்குதல் மற்றும் முடிவிலா தொடர் ஒன்றுக்கொன்று மாறுமா அல்லது மாறுபட்ட தொடர் உட்பட வேறுபட்டதா என்பதை தீர்மானிக்க பல்வேறு சோதனைகளைப் பயன்படுத்துதல்; அடுக்குத்தொடர் மற்றும் ஃபூரியர் தொடரின் கருத்தைக் கற்றுக்கொள்ளுதல்.

CO-4: தொடர்ச்சி மற்றும் வகையீடின் கருத்துக்களை ஒப்பிட்டுப் பார்த்தல் ; பகுதி வகையிடல்களைக் கண்டறிதல் மற்றும் பல சாரா மாறிகளின் சார்புகளின் அறுதி மதிப்புகளைக் கண்டறிவதில் திறனை வளர்த்துக் கொள்வதற்கான கருத்தைப் பெறுதல்; வெக்டர் வகையீடின் கருத்தை விளக்கி, சாய்வு, வேறுபாடு மற்றும் சுருள் தொடர்பான சிக்கல்களைத் தீர்ப்பதில் வெக்டர் முற்றொருமைகளைப் பயன்படுத்துதல்.

CO-5: தரம் கண்டுபிடிக்க அணியின் ஏறுபடி வடிவத்திற்கு குறைக்க அடிப்படை மாற்றங்களைப் பயன்படுத்துதல்; நேரியல் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளை விளக்குதல்; ஒரு அணியின் ஐகன் மதிப்புகள் மற்றும் ஐகன் வெக்டர்களைக் கணக்கிடுதல்; மூலைவிட்டமயமாக்கல் மற்றும் கெய்லி-ஹாமில்டன் தேற்றம் மற்றும் அதன் பயன்கள் பற்றிய கருத்து நன்கு தெரிந்திருக்கும்.

பாடப்பகுதி முடிவுகள்	பாடக்கோப்பின் அடைவுகளுடன் எதிர்பார்க்கப்படும் ஒப்புமை (1-பலவீனமான தொடர்பு; 2-நடுத்தர தொடர்பு; 3-வலுவான தொடர்பு)											
	PO-1	PO-2	PO-3	PO-4	PO-5	PO-6	PO-7	PO-8	PO-9	PO-10	PO-11	PO-12
CO-1	3	3	2	2	-	-	-	-	-	-	-	-
CO-2	2	3	2	2	-	-	-	-	-	-	-	1
CO-3	3	3	3	3	2	1	1	-	-	1	1	1
CO-4	2	2	3	2	1	-	-	-	-	-	-	-
CO-5	3	3	2	1	2	1	1	-	-	1	1	-

சுருக்கங்கள் மற்றும் சின்னங்கள்

குறியீடுகள் மற்றும் சூத்திரங்கள்

1. எண் முறைமை

N	-	இயல் எண்களின் கணம்
Z	-	முழு எண்களின் கணம்
Q	-	விகிதமுறு எண்களின் கணம்
I	-	விகிதமுறா எண்களின் கணம்
$\mathbb{R}$	-	மெய் எண்களின் கணம்
C	-	கலப்பு எண்களின் கணம்
R^n	-	n - வரிசைகளின் கணம்

2. கிரேக்க எழுத்துக்கள்

α	-	ஆல்பா
β	-	பீட்டா
γ	-	காமா
Γ	-	பெரிய காமா
δ	-	டெல்டா
Δ	-	பெரிய டெல்டா
ϵ	-	எப்சிலன்
ι	-	ஐயோட்டா
θ	-	தீட்டா
λ	-	லாம்ப்டா
μ	-	முயு
ϕ	-	பய்
ψ	-	சை
η	-	ஈடா
π	-	பை
ρ	-	ரோ
κ	-	கப்பா

3. கணங்களில் குறிமானம்

$\in$	-	சொந்தமானது
$\notin$	-	சொந்தமானது அல்ல
$\cup$	-	சேர்ப்பு
$\cap$	-	வெட்டு
$()$	-	திறந்த இடைவெளி
$[]$	-	மூடிய இடைவெளி
$\subseteq$	-	உட்கணம்
$\not\subseteq$	-	உட்கணம் அல்ல

$\subset$	-	தகு உட்கணம்
$\subsetneq$	-	தகு உட்கணம் அல்ல
$\supset$	-	மிகைக் கணம்
$\{\}$	-	கணம்
$\emptyset$	-	வெற்று கணம்
$<$	-	கண்டிப்பாக குறைவாக
$>$	-	கண்டிப்பாக அதிகமாக
$\leq$	-	குறைவாக அல்லது சமமாக
$\geq$	-	அதிகமாக அல்லது சமமாக

4. வேறு சில பயனுள்ள குறியீடுகள்

$\sim$	-	நிகரான
$\leftrightarrow$	-	பரிமாற்றம்
∞	-	முடிவிலி
$\int$	-	தொகையீடு
$!$	-	காரணியம்
$\Rightarrow$	-	குறிக்கிறது
$\forall$	-	அனைத்து
$\Leftrightarrow$	-	குறிக்கிறது மற்றும் குறிக்கும்
$\ \ $	-	தர நெறி
$ $	-	எண்ணளவு
$:$	-	முக்காற்புள்ளி
$;$	-	அரைப்புள்ளி

$[A : B]$ or $[A/B]$ - மிகுதிப்படுத்திய அணி

5. ஒரு இருபடி சமன்பாடு மூலங்களின் இயல்பு

$ax^2 + bx + c = 0$ என்பது இருபடி எனில், பின்

(a) இதன் மூலங்கள் $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

(b) மூலங்களின் கூடுதல் = $-b/a$

(c) மூலங்களின் பெருக்கல் = c/a

(d) $b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow$ மூலங்கள் சமம்

(e) $b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow$ மூலங்கள் மெய் மற்றும் வெவ்வேறானது

(f) $b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ மூலங்கள் சிக்கல் எண்கள்

(g) $b^2 - 4ac$ என்பது செவ்வியவர்க்கம்
எனில், மூலங்கள் விகிதமுறு எண்கள்

6. மடக்கையின் பண்புகள்

(a) $\log_a 1 = 0, \log_a 0 = -\infty, a > 1$

$\log_a a = 1$

$\log_e 2 = 0.6931$

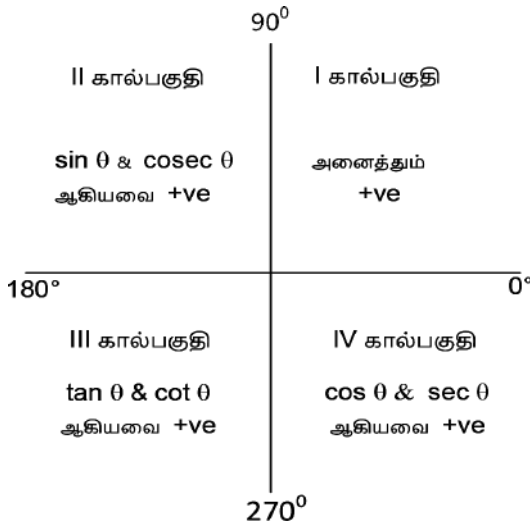
$\log_e 10 = 2.3026, \log_{10} e = 0.4343$

(b) $\log_a p + \log_a q = \log_a pq$

(c) $\log_a p - \log_a q = \log_a \frac{p}{q}$

(d) $\log_a p^q = q \log_a p$

7. கால் பகுதியில் முக்கோணவியல் விகிதங்களின் இயல்பு



8. முக்கோணவியல் சார்புகளுக்கான பெருக்கல் மற்றும் கூட்டல் சூத்திரங்கள்

(a) $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

(b) $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

(c) $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

(d) $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

(e) $\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

(f) $\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

(g) $\sin 2A = 2 \sin A \cos A = \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A}$

(h) $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$
 $= 1 - 2 \sin^2 A$
 $= 2 \cos^2 A - 1 = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$

(i) $\tan 2A = \frac{\sin 2A}{\cos 2A} = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$

(j) $\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$

(k) $\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$

(l) $\tan 3A = \frac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A}$

(m) $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$

(n) $\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$

(o) $\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$

(p) $\cos A - \cos B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{B-A}{2}$

(q) $\sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A+B) + \sin(A-B)]$

(r) $\cos A \sin B = \frac{1}{2} [\sin(A+B) - \sin(A-B)]$

(s) $\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A+B) + \cos(A-B)]$

(t) $\sin A \sin B = \frac{1}{2} [\cos(A-B) - \cos(A+B)]$

(u) $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$

(v) $\sin x = \pm 1 \Leftrightarrow x = (4n \pm 1) \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$

(w) $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = (2n \pm 1) \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$

(x) $\cos x = \pm 1 \Leftrightarrow x = 2n\pi \text{ & } x = (2n+1)\pi, n \in \mathbb{Z}$

(y) $e^{ax} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}; a \in \mathbb{R}$

9. அடிப்படை வகையீடு சூத்திரங்கள்

- (a) $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
- (b) $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$
- (c) $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$
- (d) $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$
- (e) $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$
- (f) $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cot x$
- (g) $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
- (h) $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \log_e a$
- (i) $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \log a}$
- (j) $\frac{d}{dx}(\log_e x) = \frac{1}{x}$
- (k) $\frac{d}{dx}(ax+b)^n = na(ax+b)^{n-1}$
- (l) $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \neq \pm 1$
- (m) $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \neq \pm 1$
- (n) $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$
- (o) $\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\frac{1}{1+x^2}$
- (p) $\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}, x \neq 0, \pm 1$
- (q) $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}, x \neq 0, \pm 1$
- (r) $\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$
- (s) $\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$

10. அடிப்படை தொகையீடு சூத்திரங்கள்

- (a) $\int \sin x dx = -\cos x + c$
- (b) $\int \cos x dx = \sin x + c$
- (c) $\int \tan x dx = -\log \cos x + c = \log \sec x + c$
- (d) $\int \cot x dx = \log \sin x + c$
- (e) $\int \sec x dx = \log(\sec x + \tan x) + c$
- (f) $\int \operatorname{cosec} x dx = \log(\operatorname{cosec} x - \cot x) + c$
- (g) $\int \sec^2 x dx = \tan x + c$
- (h) $\int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\cot x + c$
- (i) $\int e^x dx = e^x + c$
- (j) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log_e a} + c, a > 0, a \neq 1$
- (k) $\int \frac{1}{x} dx = \log x + c$
- (l) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$
- (m) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + c$
- (n) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \log \left(\frac{a+x}{a-x} \right) + c$
- (o) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \log \left(\frac{x-a}{x+a} \right) + c$
- (p) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a} + c$
- (q) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sinh^{-1} \frac{x}{a} + c$
- (r) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \cosh^{-1} \frac{x}{a} + c$
- (s) $\int e^{ax} \sin bxdx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx)$
- (t) $\int e^{ax} \cos bxdx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx)$

சுருக்கங்கள்

$\lim$	–	எல்லை
$\therefore$	–	ஆகையால்
$\because$	–	ஏனெனில்
$i.e.,$	–	அதாவது
$f^n(a)$	–	' a ' ல் f ன் n^{th} வகையீடு
$sup.$	–	மேன்மம்
$Inf.$	–	தாழ்மம்
$Lf'(a)$	–	' a ' ல் ' f ' ன் இடது கை வகையீடு
$Rf'(a)$	–	' a ' ல் ' f ' ன் வலது கை வகையீடு
$Lf(a)$	–	' a ' ல் ' f ' ன் இடது கை எல்லை
$Rf(a)$	–	' a ' ல் ' f ' ன் வலது கை எல்லை
$diag.$	–	மூலைவிட்டம்
$L.H.S.$	–	இடது புறம்
$R.H.S.$	–	வலது புறம்
Dim	–	உருவளவு
$adj(A)$	–	A ன் சேர்ப்பு அணி
$min.$	–	சிறுமம்
$max.$	–	பெருமம்
$L.C$	–	நேரியல் இணைவு
$L.D.$	–	நேரியல் சார்பு
$L.I.$	–	நேரியல் சார்பின்மை

படங்களின் பட்டியல்

அலகு 1: நுண்கணிதம் I

படம் 1.1: வளைவரைவின் வளைவு	03
படம் 1.2: ஒரு புள்ளியில் வளைவு	03
படம் 1.3: ஒரு வளைவின் கணித வரையறை	03
படம் 1.4: ஒரு புள்ளியில் வளைவின் விவரங்கள்	04
படம் 1.5: கார்ட்டீசியன் வளைவரைக்கான வளைவு ஆரம்	05
படம் 1.6: துருவ வளைவரைக்கான வளைவு ஆரம்	06
படம் 1.9: வளைவு மையம்	11
படம் 1.10: அலர்வரை	13
படம் 1.11: ஒரு வட்டத்தின் உட்கருள்	16
படம் 1.12: ஒரு தொங்கல் வளையின் உட்கருள்	17
படம் 1.13: ஒரு பிரமிடு அமைப்பின் உட்கருள்	18
படம் 1.14: ஒரு பரவளையத்தின் உட்கருள்	19
படம் 1.15: ஒரு நீள்வட்டத்தின் உட்கருள்	19
படம் 1.17: வலது கோண முக்கோணத்தின் சுழற்சி	19
படம் 1.18: வட்டத்தின் சுழற்சி	19
படம் 1.19: சதுரத்தின் சுழற்சி	29
படம் 1.20: ஒரு கார்ட்டீசியன் வளைவரைவியின் சுழற்சியால் உருவாக்கப்பட்ட திடத்தின் அளவு	84

அலகு 2: நுண்கணிதம் II

படம் 2.1: ரோலின் தேற்றம்	114
படம் 2.5: லெக்ராஞ்சியின் சராசரி மதிப்புத் தேற்றம்	120
படம் 2.6: கோஷியின் சராசரி மதிப்புத் தேற்றம்	126
படம் 2.7: பெருமம் மற்றும் சிறுமம்	160
படம் 2.8: அறுதிக்கான சோதனை	162
படம் 2.9: இடஞ்சார்ந்த அறுதி	162

அலகு 3: வரிசைகள் மற்றும் தொடர்

படம் 3.4: அடுக்குத் தொடரின் வரைகலை பிரதிநிதித்துவம்	281
படம் 3.4: அரை வீச்சு சைன் தொடர்	308
படம் 3.6: அரை வீச்சு கொசைன் தொடர்	309

அலகு 4: பல்மாறி நுண்கணிதம்

படம் 4.1: திசையிலி மற்றும் வெக்டர் பெருக்கல்	431
படம் 4.2: கோண திசைவேகம்	431
படம் 4.3: வெக்டர்களின் வகையீடு	432
படம் 4.4: சாய்வின் வடிவியல் விளக்கம்	433
படம் 4.5: தொடுகோடு	434
படம் 4.6: பாய்வின் இயற்பியல் விளக்கம்	441
படம் 4.7: ∇ மூலம் மீண்டும் மீண்டும் செயல்பாடுகள்	443

அலகு 5: அணிகள்

படம் 5.1: அலகு அணியின் பயன்பாடு	478
படம் 5.2: முக்கோண பகுதி	492
படம் 5.3: நேரியல் உருமாற்றம்	524

ஆசிரியர்களுக்கான வழிகாட்டுதல்கள்

விளைவு அடிப்படையிலான கல்வி (OBE) அறிவு நிலை மற்றும் மாணவர்களின் திறன் தொகுப்பை செயல்படுத்த வேண்டும். OBE யைச் சரியாகச் செயல்படுத்துவதற்கு ஆசிரியர்கள் பெரும் பொறுப்பை ஏற்க வேண்டும். OBE அமைப்பில் ஆசிரியர்களுக்கான சில பொறுப்புகள் (மட்டுப்படுத்தப்படவில்லை) பின்வருமாறு இருக்கலாம்:

- நியாயமான கட்டுப்பாடுகளுக்குள், அவர்கள் எல்லா மாணவர்களுக்கும் சிறந்த நன்மைக்காக நேரத்தை கையாள வேண்டும்.
- அவர்கள் மாணவர்களை வேறுபடுத்தி பார்க்க வேறு தகுதியற்ற தன்மையைக் கருத்தில் கொள்ளாமல் குறிப்பிட்ட வரையறுக்கப்பட்ட அளவுகோலின் அடிப்படையில் மட்டுமே மதிப்பீடு செய்ய வேண்டும்.
- அவர்கள் நிறுவனத்தை விட்டு வெளியேறுவதற்கு முன்பு மாணவர்களின் கற்றல் திறனை ஒரு குறிப்பிட்ட நிலைக்கு வளர்க்க முயற்சி செய்ய வேண்டும்.
- அனைத்து மாணவர்களும் தங்கள் கல்வியை முடித்த பிறகு தரமான அறிவையும் திறமையையும் பெற்றிருக்கிறார்கள் என்பதை உறுதிப்படுத்த அவர்கள் முயற்சிக்க வேண்டும்.
- அவர்கள் எப்போதும் மாணவர்களின் இறுதி செயல்திறன் திறன்களை வளர்க்க ஊக்குவிக்க வேண்டும்.
- அவர்கள் புதிய அணுகுமுறையை ஒருங்கிணைக்க குழு வேலை மற்றும் குழுப்பணியை எளிதாக்கி ஊக்குவிக்க வேண்டும்.
- மதிப்பீட்டின் ஒவ்வொரு பகுதியிலும் அவர்கள் ப்ளூம்ஸ் வகைப்பாட்டியலைப் பின்பற்ற வேண்டும்.

ப்ளூமின் வகைப்பாடு

நிலை	ஆசிரியர் சரிபார்க்க	மாணவர்களால் மூடியும்	சாத்தியமான மதிப்பீடு முறை
உருவாக்குதல்	மாணவர்களின் உருவாக்கம் திறன்	வடிவமைக்கவும் அல்லது உருவாக்கவும்	சிறு செயல்முறை திட்டம்
மதிப்பீடு செய்தல்	மாணவர்களின் நியாயப்படுத்தும் திறன்	வாதிடவும் அல்லது பாதுகாக்கவும்	பணி ஒதுக்கீடு
பகாப்பாய்வு	மாணவர்களின் வறோபடுத்தும் திறன்	வகைப்படுத்தவும் அல்லது வறோபடுத்தவும்	செயல்முறை திட்டம்/ ஆய்வக முறை
பயன்படுத்துதல்	மாணவர்கள் தகவலைப் பயன்படுத்தும் திறன்	செயல்படுத்து அல்லது செயல்விளக்கம்	தொழில்நுட்ப விளக்கக்காட்சி/ செயல் விளக்கம்
புரிதல்	மாணவர்கள் கருத்துக்களை விளக்கும் திறன்	விளக்கவும் அல்லது வகைப்படுத்தவும்	விளக்கக்காட்சி/ கருத்தரங்கு
நினைவில் கொள்ளுதல்	மாணவர்களின் நினைவு-படுத்தும் திறன் (அல்லது நினைவில் கொள்வது)	வரையறுக்கவும் அல்லது நினைவு கூறவும்	வினாடி வினா

மாணவர்களுக்கான வழிகாட்டுதல்கள்

OBE ஐ செயல்படுத்துவதற்கு மாணவர்கள் சமமான பொறுப்பை ஏற்க வேண்டும். OBE அமைப்பில் மாணவர்களுக்கான சில பொறுப்புகள் (மட்டுப்படுத்தப்படவில்லை) பின்வருமாறு:

- ஒவ்வொரு பாடப்பிரிவிலும் ஒரு அத்தியாயம் தொடங்குவதற்கு முன்பு மாணவர்கள் ஒவ்வொரு UO பற்றியும் நன்கு அறிந்திருக்க வேண்டும்.
- பாடநெறி தொடங்குவதற்கு முன்பு மாணவர்கள் ஒவ்வொரு CO பற்றியும் நன்கு அறிந்திருக்க வேண்டும்.
- திட்டம் ஆரம்பிக்கும் முன் ஒவ்வொரு PO பற்றியும் மாணவர்கள் நன்கு அறிந்திருக்க வேண்டும்.
- மாணவர்கள் சரியான பிரதிபலிப்பு மற்றும் செயலுடன் விமர்சன ரீதியாகவும் நியாயமாகவும் சிந்திக்க வேண்டும்.
- மாணவர்களின் கற்றல் நடைமுறை மற்றும் நிஜ வாழ்க்கை விளைவுகளுடன் இணைக்கப்பட்டு ஒருங்கிணைக்கப்பட வேண்டும்.
- OBE இன் ஒவ்வொரு மட்டத்திலும் மாணவர்கள் தங்கள் திறனை நன்கு அறிந்திருக்க வேண்டும்.

உள்ளடக்கங்கள்

முன்னுரை	iii
ஒப்புதல்கள்	v
முகவுரை	vii
விளைவு அடிப்படையிலான கல்வி	ix
பாடநெறி விளைவுகள்	xi
சுருக்கங்கள் மற்றும் சின்னங்கள்	xiii
படங்களின் பட்டியல்	xvii
ஆசிரியர்களுக்கான வழிகாட்டுதல்கள்	xix
மாணவர்களுக்கான வழிகாட்டுதல்கள்	xx

1. நுண்கணிதம் I 1-109

அலகு விவரங்கள்	1
அடிப்படைக்கோட்பாடு	1
முன் தேவைகள்	1
பாடப்பகுதியின் அடைவுகள்	2
பாடக்கோப்பின் அடைவுகளுடன் பாடப்பகுதியின் அடைவுகளின் ஒப்புமை	2
வரலாறு	2
1.1 வளைவு	3
1.1.1 ஒரு வளைவின் கணித வரையறை	3
1.1.2 வளைவு ஆரம்	4
1.1.3 வளைவு மையம், வளைவு வட்டம்	15
1.1.4 வளைவு மையத்தின் ஆயங்கள்	15
1.1.5 அலர்வரை	17
1.1.6 உட்சுருள்	18
1.1.7 சூழ்வு	20
1.2 வரையறுத்த மற்றும் முறையற்ற தொகையீடுகளின் மதிப்பீடு	37
1.2.1 வரையறுத்த தொகையீடு	39
1.2.2 முதல் நுண்கணித அடிப்படை தேற்றம்	40
1.2.3 இரண்டாம் நுண்கணித அடிப்படை தேற்றம்	41
1.2.4 வரையறுத்த தொகையிடலின் பண்புகள்	46
1.2.5 முறையற்ற தொகையீடு	47
1.2.6 முறையற்ற தொகையீடு வகைகள்	51
1.2.7 $\int_a^b f(x) dx$ ஐ, $x = a$ இல் ஒருங்குதலுக்கான ஒப்பீட்டுச் சோதனைகள்.	53
1.2.8 முக்கிய தேற்றங்கள்	56

1.2.9	∞ -ல் ஒருங்குதலுக்கான ஒப்பீட்டுச் சோதனைகள்	58
1.2.10	முக்கிய தேற்றம்	60
1.2.11	முழுமையான ஒருங்குதல்	61
1.3	பீட்டா காமா சார்புகள் மற்றும் அதன் பண்புகள்	62
1.3.1	காமா சார்புகள்	62
1.3.2	பீட்டா சார்பு	66
1.3.3	பீட்டா மற்றும் காமா சார்புகளுக்கு இடையேயான உறவு	69
1.3.4	நகல் சூத்திரம்	75
1.4	வரையறுத்த தொகையீடுகளின் பயன்பாடுகளைக் கொண்டு சுழற்சியின் மேற்பரப்பு மற்றும் கன அளவை மதிப்பீடல்	83
1.4.1	சுழற்சியின் திடப்பொருட்களின் கனஅளவுகள்	84
1.4.2	சுழற்சியின் திடமான மேற்பரப்பு பகுதிகள்	85
	சுருக்கம்	102
	குறிக்கோள் கேள்விகள்	104
	அகநிலை தீர்க்கப்படாத கேள்விகள்	105
	செயல்திட்டம்/செயல்முறை/ செயல்பாடு	107
	மேலும் அறிக	108
	மேற்கோள் நூல்கள் /பரிந்துரைக்கப்பட்ட வாசிப்புகள்	109
2.	நுண்கணிதம் II.....110-184	
	அலகு விவரங்கள்	110
	அடிப்படைக்கோட்பாடு	110
	முன் தேவைகள்	110
	பாடப்பகுதியின் அடைவுகள்	110
	பாடக்கோப்பின் அடைவுகளுடன் பாடப்பகுதியின் அடைவுகளின் ஒப்புமை	111
	வரலாறு	111
2.1	ரோலின் தேற்றம்	112
2.1.1	ரோலின் தேற்றத்தின் வடிவக்கணித விளக்கம்	114
2.1.2	லெக்ராஞ்சியின் சராசரி மதிப்புத் தேற்றம்	119
2.1.3	லெக்ராஞ்சியின் சராசரி மதிப்புத் தேற்றத்தின் வடிவக்கணித விளக்கம்	120
2.1.4	கோஷியின் சராசரி மதிப்புத் தேற்றம்	125
2.1.5	கோஷியின் சராசரி மதிப்புத் தேற்றத்தின் வடிவக்கணித விளக்கம்	126
2.2	டெய்லரின் தேற்றம்	130
2.2.1	லாக்ரேஞ்சின் எஞ்சிய வடிவத்துடன் டெய்லரின் தேற்றம்	130
2.2.2	லாக்ரேஞ்சின் எஞ்சிய வடிவத்துடன் மெக்லாரின் தேற்றம்	131

2.2.3	கோஷியின் எஞ்சிய வடிவத்துடன் டெய்லரின் தேற்றம்	132
2.2.4	கோஷியின் எஞ்சிய வடிவத்துடன் மெக்லாரின் தேற்றம்	134
2.3	தேரப்பெறா வடிவங்கள் மற்றும் லோபிதாலின் விதி	140
2.3.1	தேரப்பெறா வடிவம் $\frac{0}{0}$ வை மதிப்பிட, லோபிதாலின் விதி (வகை-I)	140
2.3.2	தேரப்பெறா வடிவம் $\frac{\infty}{\infty}$ வை மதிப்பிட, லோபிதாலின் விதி (வகை-II)	147
2.3.3	தேரப்பெறா வடிவம் $0 \times \infty$ வை மதிப்பிட, லோபிதாலின் விதி (வகை-III)	148
2.3.4	தேரப்பெறா வடிவம் $\infty - \infty$ வை மதிப்பிட, லோபிதாலின் விதி (வகை-IV)	150
2.3.5	தேரப்பெறா வடிவம் 0^0 வை மதிப்பிட, லோபிதாலின் விதி (வகை-V)	152
2.3.6	தேரப்பெறா வடிவம் 1^∞ வை மதிப்பிட, லோபிதாலின் விதி (வகை-VI)	153
2.3.7	தேரப்பெறா வடிவம் ∞^0 வை மதிப்பிட, லோபிதாலின் விதி (வகை-VII)	155
2.4	பெருமம் மற்றும் சிறுமம்	160
2.4.1	பெருமம் மற்றும் சிறுமத்திற்கான நிபந்தனைகள்	161
2.4.2	அறுதிக்கான முதல் வகைக்கெழு சோதனை (பெருமம் அல்லது சிறுமம்)	161
2.4.3	இரண்டாம் வகைக்கெழு சோதனையை பயன்படுத்தி அறுதிகள் (பெருமம் அல்லது சிறுமம்)	165
	சுருக்கம்	178
	குறிக்கோள் கேள்விகள்	180
	அகநிலை தீர்க்கப்படாத கேள்விகள்	182
	செயல்திட்டம்/செயல்முறை/ செயல்பாடு	183
	மேலும் அறிக	183
	மேற்கோள் நூல்கள் /பரிந்துரைக்கப்பட்ட வாசிப்புகள்	184
3.	வரிசைகள் மற்றும் தொடர்.....	185-342
	அலகு விவரங்கள்	185
	அடிப்படைக்கோட்பாடு	185
	முன் தேவைகள்	185
	அலகு விளைவுகள்	186
	பாடநெறி முடிவுகளுடன் அலகு முடிவுகளை வரைபடமாக்கல்	186
	வரலாறு	184
3.1	வரிசை	187
3.1.1	வரிசையை விவரிக்கும் முறைகள்	188
3.1.2	வரிசையின் வரம்பு தொகுப்பு	188
3.1.3	மாறிலி வரிசைமுறை	188
3.1.4	எல்லை வரிசை	189

3.1.5	எல்லையற்ற வரிசை	189
3.1.6	வரிசையின் கிழக்கு மேல் எல்லை (சுப்ரெமம்)	189
3.1.7	வரிசையின் மிகப்பெரிய கீழ் கட்டு (இன்ஃபிமம்)	190
3.2	குவிதல், மாறுபட்ட மற்றும் அலைவு வரிசை	190
3.2.1	வரிசையின்வரம்பு	191
3.2.2	வரிசையின் எல்லை புள்ளி	192
3.2.3	பூஜ்ய வரிசை	193
3.2.4	வரம்புகளின் இயற்கணிதம்	193
3.2.5	ஒத்திசைவு வரிசை	196
3.2.6	ஸ்க்யூஸ் தத்துவம் (Squeeze Principle)	204
3.2.7	காஷியின் முதல் தேற்றம் (Cauchy's First Theorem on limit)	204
3.2.8	காஷியின் இரண்டாம் தேற்றம் (Cauchy's Second Theorem on limit)	205
3.3	முடிவிலி தொடர்	211
3.3.1	பெருக்குத் தொடரில் குவிதல் அல்லது விலகுதல்	214
3.3.2	நேர்மறை உறுப்புகளின் தொடர்	215
3.3.3	குவிதலில் காஷியின் பொது தத்துவம்	216
3.3.4	ஒப்பீட்டு சோதனை	217
3.3.5	ஒப்பீடுதலில் முக்கியமான சோதனை	218
3.3.6	டி' ஆல்ம்பட்ஸ் விகித சோதனை	227
3.3.7	காஷிஸ் மூலம் சோதனை (Cahchy's Root Test)	234
3.3.8	ரேபிஸ் சோதனை (Raabe's Test)	237
3.3.9	மடக்கை சோதனை (Logarithmic Test)	237
3.3.10	காஸ் சோதனை (Gause Test)	237
3.3.11	காஷி தொகையீட்டு சோதனை (Cauchy's Integral Test)	248
3.3.12	மாற்று வரிசை	252
3.3.13	ஒரு தொடரின் முழுமையான ஒருங்கிணைப்பு	257
3.3.14	நிபந்தனை ஒருங்கிணைப்பு	257
3.4	டெய்லர்ஸின் முடிவில்லா தொடர் (Taylor's Inkbtw Tupir)	264
3.4.1	எல்லையற்ற டெய்லர்ஸ்தொடராகவிரிவாக்கத்திற்கானவழி முறை	264
3.5	மெக்லாரின்ஸ் எல்லையற்ற தொடர்	272
3.5.1	மெக்லாரின்ஸ் தொடராக விரிவாக்கத்திற்கான படிமுறை	273
3.6	பவர்த் தொடர்	280
3.6.1	பவர் தொடரின் எல்லையற்ற வடிவம்	280
3.6.2	பவர் தொடரின் குவிதல்	280
3.6.3	குவிதல் ஆரம் (Radius of Convergence)	281

3.6.4	குவிதல் இடைவெளி (Interval of convergence)	281
3.6.5	பவர் தொடரின் வரைகலை பிரதிநிதித்துவம்	281
3.7	ஃபோரியர் தொடர்	286
3.7.1	ஃபோரியர் தொடருக்கான டிரிசெல்ட்டின் நிபந்தனைகள்	286
3.7.2	இரட்டை மற்றும் ஒற்றைப் படை சார்புகள்	297
3.7.3	தொடர்ச்சியற்ற சார்புகளுக்கான ஃபோரியர் தொடர்	298
3.7.4	இடைவெளி மாற்றம் (அளவின் மாற்றம்)	306
3.7.5	அரை வீச்சு தொடர்	307
3.7.6	ஃபோரியர் தொடரில் பார்செவல் தேற்றம்	320
	சுருக்கம்	331
	கொள்குறி வினாக்கள்	333
	அகநிலை தீர்க்கப்படாத கேள்விகள்	338
	திட்டம் / செயல்பாடுகள் / நடைமுறை	339
	மேலும் தெரிந்து கொள்ள வேண்டியவைகள்	340
	குறிப்புகள் / பரிந்துரைக்கப்பட்ட புத்தகங்கள்	341
4.	பலமாறி நுண்கணிதம்	343-468
	அடிப்படைக்கோட்பாடு	343
	முன்நிபந்தனைகள்	343
	அலகு விளைவுகள்	344
	பாடநெறி விளைவுகளுடன் எதிர்பார்க்கப்படும் வரைபடமாக்கல்	344
	வரலாறு	345
4.1	சார்பின் எல்லை	345
4.1.1	வரம்புகளின் இயற்கணிதம்	345
4.1.2	திரும்பப் பெற்ற வரம்பு	349
4.1.3	ஒரு சார்பின் தொடர்ச்சி	350
4.2	திசை வகைக்கெழு	354
4.2.1	பகுதி வகைக்கெழுவின் மூலம் திசை வகைக்கெழு	358
4.3	பகுதி வகைக்கெழுக்கள்	360
4.3.1	பகுதி வகைக்கெழுவின் உயர் வரிசைகள்	361
4.4	ஒருபடித்தான சார்புகள்	369
4.4.1	யூலரின் தேற்றம்	370
4.5	மொத்த வேறுபட்ட கூட்டுத்தாபனம்	374
4.6	முறையற்ற சார்பின் வேறுபாடு	376
4.6.1	ஒரு முறைகேடான சார்பின் இரண்டாம் ஆணை வழங்கல்	377

4.7	இரண்டு மாறிகளுக்கான டெய்லரின் தேற்றம்	382
4.8	ஜாகோபியன்ஸ்	389
4.8.1	ஜாகோபியனின் பண்புகள்	389
4.9	பல் மாறிகளை கொண்ட சார்புகளின் அறுதி மற்றும் லாகரேஞ்சின் பெருக்கிகளின் முறை	396
4.9.1	பல்வேறு சாரா மாறிகளை கொண்ட சார்பின் பெருமம் மற்றும் சிறுமம் மதிப்புகள்	396
4.9.2	நிபந்தனைகளுக்கு உட்படுத்தப்பட்ட சார்புகளின் பெருமம் மற்றும் சிறுமம்	413
4.9.3	லாக்ரேஞ்சின் தீர்மானிக்கப்படாத பெருக்கிகளின் முறை	414
4.10	வெக்டர்கள்	430
4.10.1	எண்ணி மற்றும் வெக்டர் அளவுகள்	431
4.10.2	எண்ணி மற்றும் வெக்டர் பெருக்கல், கோண திசைவேகம்	431
4.10.3	வெக்டர்களின் வகையீடு	431
4.10.4	வகையீட்டின் சூத்திரங்கள்	432
4.10.5	திசையிலி மற்றும் வெக்டர் புள்ளி சார்புகள்	432
4.11	வெக்டர் வகையீட்டு செயலி டெல் ∇	432
4.11.1	சாய்வு	432
4.11.2	$\overline{PQ}$ என்ற திசையில் ϕ ன் திசை வகைக்கெழு	433
4.11.3	தொடு தளம் மற்றும் செங்கோடுகள்	434
4.11.4	பாய்வு (Divergent)	440
4.11.5	சுழல் (Curl)	440
4.12	∇ மூலம் மீண்டும் மீண்டும் செயல்பாடுகள்	442
4.13	பாய்வு மற்றும் சுழலின் பண்புகள்	444
	சுருக்கம்	460
	குறிக்கோள் கேள்விகள்	463
	அகநிலை தீர்க்கப்படாத கேள்விகள்	465
	செயல்திட்டம் / செயல்முறை / செயல்பாடு	466
	மேலும் அறிக	467
	மேற்கோள் நூல்கள் /பரிந்துரைக்கப்பட்ட வாசிப்புகள்	468
5.	அணிகள்.....	469-624
	அலகு விவரங்கள்	469
	அடிப்படைக்கோட்பாடு	469
	முன் தேவைகள்	469
	பாடப்பகுதியின் அடைவுகள்	470
	பாடக்கோப்பின் அடைவுகளுடன் பாடப்பகுதியின் அடைவுகளின் ஒப்புமை	470

வரலாறு	471
5.1 வரையறை	471
5.1.1 பல்வேறு வகையான அணிகள்	472
5.1.2 அணிகளின் மீதான செயல்முறைகள்	478
5.2 தொடக்கநிலை செயல்பாடுகள் (உருமாற்றம்)	481
5.2.1 தொடக்கநிலை அணி	481
5.3 அணியின் ஏறுபடி வடிவம்	481
5.3.1 அணியின் நிரை - ஏறுபடி வடிவம்	481
5.3.2 அணியின் நிரை சுருக்கப்பட்ட ஏறுபடி வடிவம்	481
5.3.3 அணியின் நிரல் - ஏறுபடி வடிவம்	482
5.3.4 அணியின் நிரல் சுருக்கப்பட்ட ஏறுபடி வடிவம்	482
5.4 அணிக்கோவைகள்	482
5.4.1 இரண்டு வரிசை அணிக்கோவையின் விரிவாக்கம்	483
5.4.2 மூன்று வரிசை அணிக்கோவையின் விரிவாக்கம்	484
5.4.3 அணிக்கோவையின் பண்புகள்	487
5.4.4 அணிக்கோவையின் பயன்பாடுகள்	492
5.4.5 சிற்றணிக் கோவைகள் மற்றும் இணைக் காரணிகள்	495
5.4.6 ஒரு சதுர அணியின் சேர்ப்பு அணி	496
5.5 நேர்மாறு அணியைக் கண்டுபிடிப்பதற்கான காஸ்ஸியன் நீக்கல் முறை	503
5.6 ஒரு அணியின் நேர்மாறைக் கண்டுபிடிப்பதற்கான காஸ்-ஜோர்டான் முறை	506
5.7 சமச்சீர் மற்றும் மெய் சமச்சீர் அணிகளுடன் தொடர்புடைய தேற்றங்கள்	509
5.8 செங்குத்து அணி	513
5.8.1 செங்குத்து அணியின் பண்புகள்	513
5.9 வெக்டர்கள்	519
5.9.1 வெக்டர்களின் நேரியல் சார்பு மற்றும் சார்பற்ற தன்மை	520
5.9.2 நேரியல் உருமாற்றங்கள்	524
5.9.3 செங்குத்து உருமாற்றம்	524
5.10 ஓர் அணியின் தரம்	529
5.10.1 அணியின் தரத்தைக் கண்டுபிடிக்க மற்றொரு வழி	530
5.11 அணியின் இயல்பான வடிவம் (நியமன வடிவம்)	535
5.11.1 $PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ எனில் P மற்றும் Q-வைக் காணல்	541
5.12 தரம்-வெறுமை தேற்றம் (அணிகளின் அடிப்படையில்)	546
5.13 சமன்பாடுகளின் நேரியல் தொகுப்பு	549
5.13.1 நேரியச் சமன்பாடுகளின் வகைகள்	550

5.14 ஒரு அணியின் ஐகன் மதிப்புகள் மற்றும் ஐகன் வெக்டர்கள்	564
5.14.1 ஐகன் மதிப்புகளின் பண்புகள்	565
5.15 கெய்லி ஆமில்ட்டன் தேற்றம்	581
5.16 அணிகளின் மூலைவிட்டமயமாக்கல்	591
5.17 இருபடி வடிவம்	597
5.17.1 இருபடி வடிவங்களை மூலைவிட்டமயமாக்கல்	600
5.18 இருபடி வடிவத்தை நியதி வடிவமாக குறைத்தல்	604
சுருக்கம்	614
குறிக்கோள் கேள்விகள்	615
அகநிலை தீர்க்கப்படாத கேள்விகள்	618
செயல்திட்டம்/செயல்முறை/ செயல்பாடு	619
மேலும் அறிக	620
மேற்கோள் நூல்கள் /பரிந்துரைக்கப்பட்ட வாசிப்புகள்	621
CO மற்றும் PO அடைவதற்கான அட்டவணை.....	622
குறியீட்டு அட்டவணை (Index)	623

1

நுண்கணிதம் 1

அலகு விவரங்கள்

இந்த அலகு தலைப்புகள் வளைவு, வளைவின் ஆரம், வளைவின் மையம், வளைவு வட்டம், அலர்வரை, உட்சுருள், சூழ்வு, வரையறுத்த மற்றும் முறையற்ற தொகையீடுகள், பீட்டா மற்றும் காமா சார்புகள் மற்றும் அவற்றின் பண்புகள், வரையறுத்த தொகையீடுகளின் பயன்பாடுகளைக் கொண்டு சுழற்சியின் மேற்பரப்பு மற்றும் கன அளவை மதிப்பீடில் பற்றி விரிவாக விவாதிக்கிறது. மேற்கூறிய அனைத்து தலைப்புகளும் தத்துவார்த்த பயன்பாட்டை மாணவர்களுக்கு தெளிவுபடுத்தும் வகையில் போதுமான எடுத்துக்காட்டுகளுடன் விவாதிக்கப்பட்டுள்ளன. மாணவர்கள் தலைப்புகளைக் காட்சிப்படுத்தத் தேவையான எல்லா இடங்களிலும் புள்ளிவிவரங்கள் சேர்க்கப்பட்டுள்ளன.

அடிப்படைக்கோட்பாடு

உட்சுருள் மற்றும் அலர்வரை என்பது வகையீட்டு வடிவவியலின் ஒரு பகுதியாகும், இது அறிவியல், செயற்கை நுண்ணறிவு மற்றும் ரோபாட்டிக்ஸ் துறையில் பணிபுரியும் மாணவர்களுக்கு மிகவும் முக்கியமான கருத்தாகும். இது அன்றாட நிஜ வாழ்க்கையிலும் பல பயன்பாடுகளைக் கொண்டுள்ளது. வட்டத்தின் உட்சுருளின் முக்கிய பயன்பாடானது, சுழலும் பாகங்களுக்கு பற்சக்கரங்களை வடிவமைப்பது, அங்கு பற்சக்கரத்தின் பல், உட்சுருள் வடிவத்தை பின்பற்றுகிறது.

திருகு சுருள் வில்லை வட்ட உட்சுருளாக இயக்குவதற்கு முறுக்கு விசை பயன்படுத்தப்படும் பொருள்களான சூழல் கடிகாரம் மற்றும் பொம்மைகளில் உட்சுருளின் அடிப்படை பயன்பாடு உள்ளது.

நீர்த்தேக்கம் நிரம்பியிருக்கும்போது அணையின் மீது செலுத்தப்படும் விசையைக் கணக்கிடுவதற்கு வரையறுத்த தொகையீடுகளைப் பயன்படுத்துகிறோம் மற்றும் நீர் மட்டத்தை மாற்றுவது அந்த விசையை எவ்வாறு பாதிக்கிறது என்பதை நாம் ஆராயலாம்.

காமா பரவலில் பயன்படுத்தப்படும் காமா சாராபானது, மின்னணு கூறுகளின் ஆயுட்காலம் போன்ற நேர அடிப்படையிலான நிகழ்வுகளைத் தீர்மானிக்கப் பயன்படுகிறது.

முன் தேவைகள்

1. தொகையீடு மற்றும் வகையீடு பற்றிய அடிப்படை அறிவு.
2. வட்டம், நீள்வட்டம், ஹைப்பர்போலா போன்ற பல்வேறு வளைவரைகளைப் புரிந்து கொண்டிருப்பது.
3. காரணியம் பற்றிய கருத்துக்களில் பழக்கப்பட்டிருப்பது.
4. இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட வளைவரைகளால் சூழப்பட்ட பரப்பளவை காண தொகையீட்டை பயன்படுத்தவது.

பாடப்பகுதியின் அடைவுகள்

இவ்வலகுப் பகுதி நிறைவுறும் போது மாணவர்கள் அறிந்திருக்க வேண்டியவை:

U1-O1 : வளைவரை மற்றும் வளைவு ஆரம் பற்றிய கருத்தை விளக்குதல். வளைவு மையத்தின் உதவியுடன் வளைவரையின் அலர்வரையைக் கண்டறிதல்.

U1-O2 : பல்வேறு சார்புகளின் இயல்புகளை, ஒருங்கள் மற்றும் விலகலின் அடிப்படையில் கண்டயறிய தொகையீட்டுச் சோதனையை பயன்படுத்த அறிதல்.

U1-O3 : பீட்டா-காமா சார்புகளின் கருத்தாக்கத்துடன் தங்களைப் பழக்கப்படுத்திக் கொள்ளுதல் மற்றும் பல்வேறு தொகையீடுகளை மதிப்பீடு செய்ய அவற்றை பயன்படுத்துதல்.

U1-O4 : கார்ட்டீசியன், துணைஅலகு மற்றும் துருவ வளைவரைகளில் சுழற்சித் திண்மத்தின் மேற்பரப்பளவு மற்றும் கொள்ளளவு ஆகியவற்றை மதிப்பிடுதல்.

பாடக்கோப்பின் அடைவுகளுடன் பாடப்பகுதியின் அடைவுகளின் ஒப்புமை:

பாடப்பகுதி-1 முடிவுகள்	பாடக்கோப்பின் அடைவுகளுடன் எதிர்பார்க்கப்படும் ஒப்புமை (1-பலவீனமான தொடர்பு; 2-நடுத்தர தொடர்பு; 3-வலுவான தொடர்பு)				
	CO-1	CO-2	CO-3	CO-4	CO-5
U1-O1	3	1	–	–	1
U1-O2	2	3	–	–	–
U1-O3	3	–	–	–	–
U1-O4	2	–	–	–	1

வரலாறு

அப்பல்லோனியஸ் (கி.மு. 262-190 கி.மு.) "கோனிகாவின் புத்தகம்" ல் கூம்பு வெட்டுமுகத்திற்கு செங்கோடு வரைவதற்கான கணக்குகளை மறைமுகமாக தீர்க்கும் பொழுது வளைவை கணக்கிட்டார். ஆனால் அவர் இதை வளைவின் பண்பாக கருதவில்லை மற்றும் அவரின் கணக்கீடுகள் வெட்டுக்கூறுகளின் அமைப்பாக இருந்தது. ஓரெஸ்மே என்பவர் வளைவை பார்த்த முதல் நபர் ஆவார். இவர் ஆயங்களை அறிமுகப்படுவதில் டெஸ்கார்ட்ஸின் முன்னோடி ஆவார். இவர் இதை வளைவரையின் வளைவை இடஞ்சார் அளவீடாக விளக்கியுள்ளார். இது "கர்விடாஸ்" என்ற லத்தின் மொழியிலிருந்து பெறப்பட்டது. பிற்பாடு நமது நவீன மரபில் அதை வட்டங்களுக்காக ஆரத்தின் தலைகீழியாக அளவிட முன்மொழிந்தார். ஒரு புள்ளியின் "நெருங்கிய" வட்டத்தை கருத்தில் கொண்டு பொது வளைவரைக்களுக்கான வளைவை எப்படி வரையறுப்பது என்று கெப்லர் தெளிவற்ற முறையில் பரிந்துரைத்தார். அப்புள்ளி லீப்னீஸினால் 1680-களில் கொஞ்சுவட்டம் ("முத்தமிடுதல்") எனப் பெயரிடப்பட்டது. ஆனால் பொது வளைவரைகளுக்கான வளைவைக் கணக்கிடுவதற்கான வழியை முதலில் கண்டுபிடித்த ஹியூஜென்ஸ் மற்றும் நியூட்டன் கருத்துக்கு அதன் நவீன வடிவத்தைக் கொடுத்தார்.

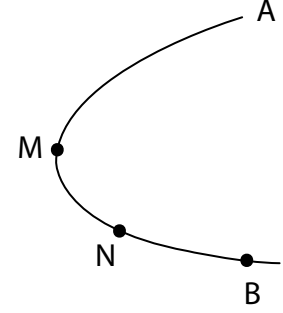


“சில விஷயங்களுக்கு ஒருவேளை எங்களுக்கு எதுவும் தெரியாது என்று நான் நம்புகிறேன்.”

- கிறிஸ்டியன் ஹியூஜென்ஸ்

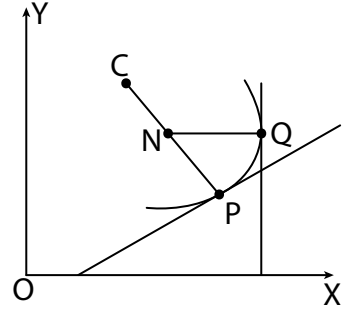
1.1 வளைவு

படம். 1.1 இல், கொடுக்கப்பட்ட வளைவு AMNB புள்ளி N உடன் ஒப்பிடும்போது M புள்ளியில் மிகவும் கூர்மையாக வளைந்திருப்பதைக் காணலாம். ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியில் ஒரு வளைவரையை வளைப்பது அந்த புள்ளியில் வளைவரையின் வளைவு என்று அழைக்கப்படுகிறது. எனவே M இல் உள்ள வளைவு N இல் உள்ள வளைவை விட அதிகமாக உள்ளது. இது வளைவரையின் வளைவின் கூர்மையின் ஒரு குறிப்பிட்ட எண் அளவைக் கொடுக்கும்.



படம் 1.1

படம் 1.2 இல், வில் PQ அதன் நாணை நோக்கி குழிவானதாக இருக்குமாறு, கொடுக்கப்பட்ட வளைவரையில் P என்பது ஏதேனும் ஒரு புள்ளியாகவும், Q ஆனது P இன் அண்டை புள்ளியாகவும் இருக்கட்டும், P மற்றும் Q இல் உள்ள செங்கோடுகள் N இல் குறுக்கிடட்டும்.

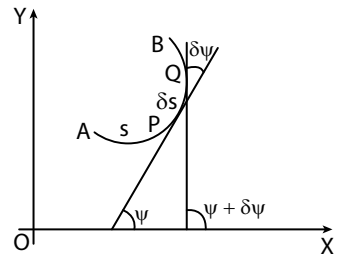


படம் 1.2

$Q \rightarrow P$, எனும்போது N என்பது ஒரு திட்டவட்டமான நிலை C-க்குச் செல்லுகிறது. C என்பது P என்ற புள்ளியில் வளைவரையின் வளைவு மையம் என்று அழைக்கப்படுகிறது. தொலைவு CP ஆனது P என்ற புள்ளியில் வளைவு ஆரம் என்று அழைக்கப்படுகிறது. மற்றும் ρ எனும் குறியீட்டால் குறிக்கப்படுகிறது. C-ஐ மையமாகவும் மற்றும் B-ஐ ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டம் CP க்கு சமம். இது கொடுக்கப்பட்ட புள்ளியில் வளைவரையின் அளவு வட்டம் என்று அழைக்கப்படுகிறது. புள்ளி P வழியாக வரையப்பட்ட வளைவு வட்டத்தின் நாண், வளைவு நாண் என்று அழைக்கப்படுகிறது. வளைவின் ஆரத்தின் தலைகீழ் மதிப்பு P புள்ளியில் வளைவரையின் வளைவு என்று அழைக்கப்படுகிறது மற்றும் இது k ஆல் குறிக்கப்படுகிறது.

1.1.1 ஒரு வளைவின் கணித வரையறை

AB என்பது ஒரு வளைவரையாகவும், P, Q ஆகியவை இவ்வளைவரையில் இரண்டு அண்டை புள்ளிகளாகவும் இருக்கட்டும். வளைவரையில் ஒரு நிலையான புள்ளி 'A' லிருந்து வில்லின் நீளம் அளவிடப்படும் என்க. எனவே வில் AP = s மற்றும் வில் AQ = $s + ds$ ஆக இருக்கட்டும். P மற்றும் Q இல் உள்ள தொடுகோடுகள் ஒரு நிலையான கோடுடன் (அதாவது x-அச்சு) முறையே ψ மற்றும் $\psi + d\psi$ கோணங்களை உருவாக்கட்டும், பின்னர்



படம் 1.3

- PQ என்ற வில்லின் நெடுகிலும் பயணிக்கையில் δ எனும் கோணத்தின் வழியாக செல்லும்போது தொடுகோடு இதன் தோடு புள்ளியாக மாறுகிறது. அந்த கோணம் வில்லின் முழு வளைவு என அழைக்கப்படுகிறது
- விகிதம் $\delta\psi / \delta s$ என்பது, PQ என்ற வில்லின் சராசரி அல்லது நிரல் வளைவு என்று அழைக்கப்படுகிறது.
- சராசரி வளைவின் கட்டுப்படுத்தும் மதிப்பு $Q \rightarrow P$ புள்ளி வளைவரையின் வளைவு என்று அழைக்கப்படுகிறது. இவ்வாறு, புள்ளி P இல் உள்ள வளைவு (κ),

$$\lim_{Q \rightarrow P} \frac{\delta \psi}{\delta s} = \lim_{\delta s \rightarrow 0} \frac{\delta \psi}{\delta s} = \frac{d\psi}{ds} \text{ ஆகும்.}$$

- iv. வளைவரையின் P என்ற புள்ளியில் வளைவின் தலைகீழ் மதிப்பு (வளைவின் மதிப்பு பூச்சியம் இல்லை என்ற நிபந்தனையில்), அப்புள்ளியில் வளைவரையின் வளைவு ஆரம் என அழைக்கப்படுகிறது. இது ρ எனக் குறிக்கப்படுகிறது. அதாவது,

$$\rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{ds}{d\psi}$$

குறிப்புகள் :

1. ஒரு நேர் கோடு ஒருபோதும் வளைவதில்லை (ψ நிலையானது, எனவே $d\psi/ds$ -ன் மதிப்பு பூஜ்யம்). எனவே ஒரு நேர்கோட்டின் வளைவு பூஜ்ஜியமாகும்.
2. ஒரு வட்டத்தின் வளைவு நிலையானது மற்றும் அது வட்ட ஆரத்தின் தலைகீழ் மதிப்பிற்கு சமம்.

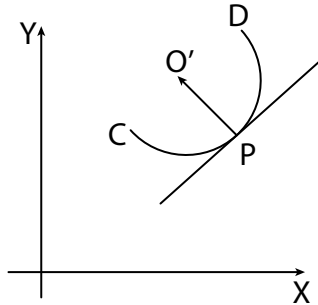
1.1.2 வளைவு ஆரம்

ஒரு வளைவரையின் (Curve), வளைவின் (Curvature) தலைகீழ் மதிப்பு அவ்வளைவரையின் வளைவு ஆரம் எனப்படும். வளைவு ஆரத்தை வரையறுக்க எந்த இடத்திலும் வளைவின் மதிப்பு பூஜ்ஜியமாக இருக்கக்கூடாது. இது பொதுவாக ρ எனும் குறியீட்டால் குறிக்கப்படுகிறது. எனவே

$$\rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{ds}{d\psi}$$

வரைபடமாக

CD என்ற வளைவரைக்கு P என்ற புள்ளியில், ρ என்பது வளைவு ஆரமாக இருந்தால், நாம் அப்புள்ளியில் செங்குத்து வரையலாம். பின்னர் O'P என்பது P என்ற புள்ளியில் வளைவு ஆரத்திலிருந்து O' வரையிலான தொலைவிற்கு சமமாக உள்ளது



படம் 1.4

A. கார்ட்டீசியன் வளைவரைக்கான வளைவு ஆரம்

கார்ட்டீசியன் வடிவத்தில் வளைவரைவின் சமன்பாடு கொடுக்கப்படும்போது, ρ -க்கான பல்லுறுப்பு கோவையை இங்கு காணலாம்.

$y = f(x)$ என்ற வளைவரைவிற்கு ρ -வின் மதிப்பை காணல் :

$P(x, y)$ என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ள வளைவரையின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க. மேலும் ψ என்பது அப்புள்ளியில் உள்ள தொடுகோட்டால் x -அச்சோடு ஏற்படுத்தப்படும் கோணம் என்க. எனவே

$$\sin\psi = \frac{dy}{ds}, \cos\psi = \frac{dx}{ds} \text{ மற்றும் } \tan\psi = \frac{dy}{dx}$$

ஆதலால் கடைசி தொடர்பிலிருந்து, நாம் பெறுவது,

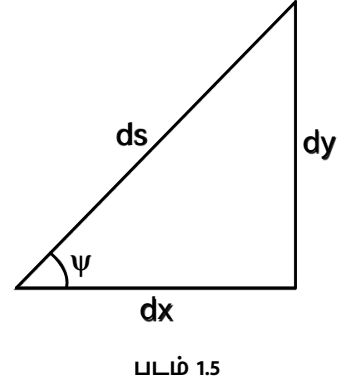
$$y = \tan^{-1}(y_1), \text{ இங்கு } y_1 = \frac{dy}{dx}$$

t -ஐப் பொறுத்து வகையிட, நமக்கு கிடைப்பது,

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{1 + y_1^2} \cdot y_2 \quad \left\{ Qy_2 = \frac{d^2y}{dx^2} \right\}$$

பிறகு,
$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi}{ds} = \frac{ds}{dx} = \frac{y_2}{1 + y_1^2} \cos\psi$$

$$= \frac{y_2}{1 + y_1^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + y_1^2}}$$



$$\left[\because \cos\psi = \frac{1}{\sec\psi} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\psi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y_1^2}} \right]$$

ஆதலால்,
$$\frac{1}{\rho} = \frac{y_2}{(1 + y_1^2)^{3/2}}$$

$$\rho = \frac{(1 + y_1^2)^{3/2}}{y_2}, \text{ இங்கு } y_2 \neq 0$$

B. துணைஅலகு வளைவரைக்கான வளைவு ஆரம்

$x = f(t), y = f(t)$ என்ற வளைவரைவிற்கு ρ -வின் மதிப்பை காணல் : (அதாவது, வளைவரையின் துணை அலகு சமன்பாடு கொடுக்கப்படும்போது.)

இங்கு $x = f(t)$ மற்றும் $y = f(t)$, t என்பது துணைஅலகு ஆகும்.

$$x' = \frac{dx}{dt}, y' = \frac{dy}{dt}, \text{ என்பதை நாம் அறிவோம்.}$$

மேலும்,
$$x'' = \frac{d^2x}{dt^2}, y'' = \frac{d^2y}{dt^2}$$

எனவே,
$$y_1 = \frac{dx}{dt} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dy}{dx}} = \frac{y'}{x'} \quad \dots(1)$$

x - ஐப் பொறுத்து வகையிட, நமக்கு கிடைப்பது

$$y_2 = \frac{x'y'' - y'x''}{dx^2} \cdot \frac{dy}{ds} = \frac{x'y'' - y'x''}{x^3} \quad \left[\because \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x'} \right]$$

எனவே, $\rho = \frac{[1 + y_1^2]^{3/2}}{y_2}$, ல் அனைத்து மதிப்புகளையும் பிரதியிட, நாம் பெறுவது

$$\rho = \frac{(x'^2 + y_1^2)^{3/2}}{x'y'' - y'x''}$$

C. துருவ வளைவரைக்கான வளைவு ஆரம்:

$r = f(\theta)$ அல்லது $f(r, \theta) = 0$ என்ற வளைவரைவிற்கு ρ -வின் மதிப்பை காணல்:

ϕ என்பது $P(r, \theta)$ என்ற புள்ளியில் உள்ள தொடுகோடு OP உடன் ஏற்படுத்தும் கோணம் என்க.

$$\tan \phi = r \frac{d\theta}{dr}, \sin \phi = r \frac{d\theta}{ds}, \text{ மற்றும் } \cos \phi = \frac{dr}{ds} \quad \dots(1)$$

ψ என்பது $P(r, \psi)$ என்ற புள்ளியில் உள்ள தொடுகோடு OX உடன் ஏற்படுத்தும் கோணம் என்க.

எனவே, $\psi = \theta + \phi$

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{ds} &= r \frac{d\theta}{ds} + \frac{d\phi}{ds} \\ &= \frac{d\theta}{ds} + \frac{d\phi}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{ds} \\ &= \frac{d\theta}{ds} \left[1 + \frac{d\phi}{d\theta} \right] \end{aligned}$$

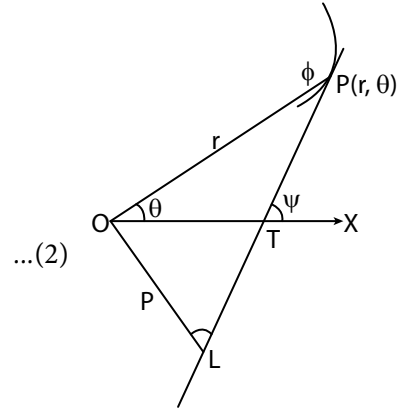
(1)-லிருந்து,

$$\tan \phi = r \frac{d\theta}{dr} = \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}}$$

அல்லது $\tan \phi = \frac{r}{r_1}$, இங்கு $r_1 = \frac{dr}{d\theta}$

θ -ஐப் பொறுத்து வகையிட, நமக்கு கிடைப்பது

$$\begin{aligned} \sec^2 \phi \cdot \frac{d\phi}{d\theta} &= \frac{r_1 \cdot r_1 - rr_2}{r_1^2} \\ &= \frac{d\phi}{d\theta} = \frac{r_1^2 - rr_2}{r_1^2} \cdot \frac{1}{\sec^2 \phi} \\ &= \frac{r_1^2 - rr_2}{r_1^2} \cdot \frac{1}{1 + \tan^2 \phi} \end{aligned}$$



படம் 1.6

$$= \frac{r_1^2 - rr_2}{r_1^2} \cdot \frac{r_1^2}{r_1^2 + r^2} \quad \left[\because \tan \phi = \frac{r}{r_1} \right]$$

$$= \frac{r_1^2 - rr_2}{r_1^2 + r^2} \quad \dots(3)$$

மறுபடியும் (1)-லிருந்து,

$$r \frac{d\theta}{ds} = \sin \phi = \frac{1}{\operatorname{cosec} \phi}$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 \theta}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_1^2}} \quad \dots(4), (3), (2), (3) \text{ மற்றும் } (4)\text{-லிருந்து,}$$

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_1^2}} = \left[1 + \frac{r_1^2 - rr_2}{r_1^2 + r^2} \right]$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{2r_1^2 + r^2 - rr_2}{(r^2 + r_1^2)^{3/2}} \quad \left[\because \frac{1}{\rho} = \frac{ds}{d\psi} \right]$$

$$\rho = \frac{ds}{d\psi} = \frac{(r^2 + r_1^2)^{3/2}}{2r_1^2 + r^2 - rr_2}$$

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1.1 : கொடுக்கப்பட்ட புள்ளியில் பின்வரும் வளைவரைக்களுக்கான வளைவு ஆரத்தைக் காண்க.

$$(a) y = 4\sin x - \sin 2x, x = \frac{\pi}{2}, \text{ என்ற புள்ளியில்,} \quad b. \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1, \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right) \text{ என்ற புள்ளியில்}$$

தீர்வு : (a) $y = 4\sin x - \sin 2x$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

x -ஐப் பொறுத்து வகையிட,

$$\frac{dy}{dx} = y = 4 \cos x - 2 \cos 2x$$

$$\text{மற்றும் } \frac{d^2y}{dx^2} = -4 \sin x + 4 \sin 2x$$

$$r = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{[1 + (4\cos x - 2\cos 2x)^2]^{3/2}}{-4 \sin x + 4 \sin 2x}$$

$$(\rho)^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\left[1 + \left(4 \cos \frac{\pi}{2} - 2 \cos \pi\right)^2\right]^{3/2}}{-4 \sin \frac{\pi}{2} + 4 \sin \pi} = \frac{(1+4)^{3/2}}{-4}$$

(எதிர்மறை குறியீட்டை புறக்கணிக்கவும்)

$$= \frac{5^{3/2}}{4}, \text{ (விடை)}$$

(b) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$, எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ... (1)

x -ஐப் பொறுத்து வகையிட,

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{y}}} = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

$$= -1 \cdot \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \text{ எனும் புள்ளியில்.}$$

இதேபோல், $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{dy}{dx} - \sqrt{y} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{x}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left[\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} \left(-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right) \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}\right]}{x} = \frac{\left[-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}\right]}{x}$$

$$= \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2x\sqrt{x}} = -\frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}}{\left(2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)} = \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}\right), \text{ (எனும் புள்ளியில்)}$$

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = -\frac{(1+1)^{3/2}}{4} = \frac{2^{3/2}}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ (விடை)}$$

எடுத்துக்காட்டு 1.2 : $y = \log x$, $x > 0$ என்ற வளைவரைவிற்கான, $|\rho|$ -வின் மீச்சிறு மதிப்பை காண்க.

தீர்வு : $y = \log x$ என்க.

x -ஐப் பொறுத்து வகையிட, நமக்கு கிடைப்பது

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \text{ மற்றும் } \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\rho = \frac{[1 + y_1^2]^{3/2}}{y_2} = \frac{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{3/2}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{(x^2 + 1)^{3/2}}{x}$$

$$|\rho| = f(x) = \frac{(x^2 + 1)^{3/2}}{x}, \text{ என்க.}$$

$f(x)$ இன் மீச்சிறு மதிப்பை காண, முதலில் $f'(x)$ இன் மதிப்பை காண வேண்டும்.

$$f'(x) = \frac{x \cdot \frac{dy}{ds}(x^2 + 1)^{1/2} \cdot 2x - (x^2 + 1)^{3/2}}{x^2}$$

$$= \frac{3x^2 \sqrt{x^2 + 1} - (x^2 + 1)^{3/2}}{x^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 + 1} (3x^2 - x^2 - 1)}{x^2} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} (2x^2 - 1)}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{ என ஒப்பிட, நமக்கு கிடைப்பது } x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

மேலும் $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ என்னும் புள்ளியில் $f''(x)$ என்பது மிகையெண் மதிப்பாக இருக்கிறது.

(மாணவர்கள் சரிபார்க்கலாம்)

எனவே $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ எனும் புள்ளியில், $|\rho|$ மீச்சிறு மதிப்பாக இருக்கிறது. ($\because x > 0$)

$$|\rho|_{min} = \left[\frac{(x^2 + 1)^{3/2}}{x} \right]_{x=\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\left(\frac{1}{2} + 1\right)^{3/2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} \sqrt{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore |\rho|$ -வின் மீச்சிறு மதிப்பு $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ எனக் கிடைக்கிறது (விடை)

எடுத்துக்காட்டு 1.3 : (x, y) எனும் புள்ளியில், $xy = c^2$ என்ற செவ்வக அதிபரவளையத்தின், வளைவு ஆரத்தைக் காண்க.

தீர்வு : குறிப்பு : $y = \frac{c^2}{x}$, எனக் கொள்க, விடை : $y = \frac{(x^2 + y^2)^{3/2}}{2c^2}$

எடுத்துக்காட்டு 1.4 : $x = 1 - t^2$, $y = t - t^3$ என்பது வளைவரையின் இரு பிரிவுகள் எனில் ஆதி புள்ளியில் வளைவு ஆரத்தைக் காண்க.

தீர்வு : $(0, 0)$ எனும் ஆதி புள்ளியில், 1 மற்றும் -1 ஆகியவை t -ன் பொதுவான மதிப்புகள் ஆகும்
[$\because x = 1 - t^2$, $0 = 1 - t^2 \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow t = \pm 1$],

எனவே வளைவரைக்கான இரு பிரிவுகளில் t -ன் மதிப்பானது 1 மற்றும் -1 ஆகும்.

$x = 1 - t^2$, $y = t - t^3$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

t -ஐப் பொறுத்து வகையிட, நமக்கு கிடைப்பது

$$\frac{dy}{dt} = 1 - 3t^2, \frac{dx}{dt} = -2t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 3t^2}{-2t} = -\frac{1}{2t} + \frac{3}{2}t \quad \dots(1)$$

மீண்டும், t -ஐப் பொறுத்து வகையிட, நமக்கு கிடைப்பது

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \left(\frac{1}{2t^2} + \frac{3}{2} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\left(\frac{1}{2t^2} + \frac{3}{2} \right)}{-2t} \\ &= \frac{1}{4t^3} + \frac{3}{4t} \end{aligned}$$

எனவே, $\left(\frac{dy}{dx} \right)_{t=1} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$

மற்றும் $\left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)_{t=1} = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -1$

இதேபோல், $\left(\frac{dy}{dx} \right)_{t=-1} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$

மற்றும் $\left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)_{t=-1} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

ஆதலால், $(\rho)_{t=1} = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{(1 + 1)^{3/2}}{-1} = -2\sqrt{2} \quad (\text{விடை})$

மற்றும்
$$(\rho)_{t=-1} = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{(1+1)^{3/2}}{-1} = 2\sqrt{2} \quad (\text{விடை})$$

எடுத்துக்காட்டு 1.5 : $y = c \cosh\left(\frac{x}{c}\right)$ என்ற தொங்கல் வளையின் வளைவு ஆரம், வளைவரை மற்றும் x -அச்சுக்கு இடையிலான செங்குத்து இடைவெளியின் பகுதிக்கு சமம் என்பதையும் மற்றும் வளைவு ஆரம் அச்ச தூரத்தின் இரு மடங்கை பொறுத்து வேறுபடுகிறது என்பதையும் நிறுவுக.

தீர்வு : நீங்களே முயற்சி செய்யுங்கள்.

எடுத்துக்காட்டு 1.6 : ρ_1 மற்றும் ρ_2 , என்பது $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையத்தின் குவி நாணின் இரு முனைகளின் வளைவு ஆரங்கள் எனில் $\rho_1^{-2/3} + \rho_2^{-2/3} = (2a)^{-2/3}$ என நிறுவுக.

தீர்வு : $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையத்தின் துணை அலகு சமன்பாடு $x = at^2, y = 2at$ ஆகும்.

$(at_1^2, 2at_1)$ மற்றும் $(at_2^2, 2at_2)$ ஆகியவை பரவளையத்தின் குவி நாணின் முனை புள்ளிகள் எனில்,

$$t_1 t_2 = -1$$

துணை அலகு சமன்பாடு, $x = at^2, y = 2at$

$$\frac{dx}{dt} = 2at, \frac{dy}{dt} = 2a$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$$

மற்றும்
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{t^2}, \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2at^3}$$

வளைவு ஆரம்
$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{\left[1 + \frac{1}{t^2}\right]^{3/2}}{-\frac{1}{2at^2}}$$

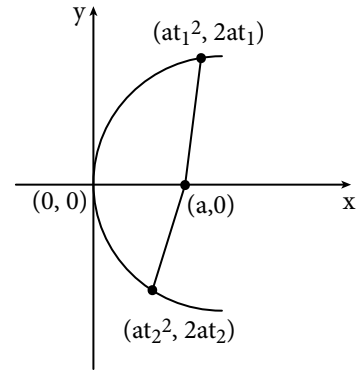
$$= -2a(t^2 + 1)^{3/2}$$

$$\therefore \rho(at_1^2, 2at_1) = 2a(t_1^2 + 1)^{3/2}$$

மற்றும் $\rho(at_2^2, 2at_2) = 2a(t_2^2 + 1)^{3/2}$

$$\rho_1^{-2/3} + \rho_2^{-2/3} = \left[2a(t_1^2 + 1)^{3/2}\right]^{-2/3} + \left[2a(t_2^2 + 1)^{3/2}\right]^{-2/3}$$

$$= (2a)^{-2/3} \left[\frac{1}{t_1^2 + 1} + \frac{1}{t_2^2 + 1} \right] = (2a)^{-2/3} \left[\frac{t_2^2 + 1 + t_1^2 + 1}{(t_1^2 + 1)(t_2^2 + 1)} \right]$$



படம் 1.7

$$= (2a)^{-2/3} \left[\frac{t_1^2 + 1 + t_2^2 + 1}{t_1^2 + t_2^2 + (-1)^2 + 1} \right] = (2a)^{-2/3} \quad [\because t_1 t_2 = -1]$$

எடுத்துக்காட்டு 1.7 : $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள்வட்டத்தின் நெட்டிச்சு முனையில் உள்ள வளைவு ஆரமானது அந்த நீள்வட்டத்தின் அரை செவ்வகலத்திற்கு சமம் எனக்காட்டுக.

தீர்வு : நீள்வட்டத்தின் துணை அலகு சமன்பாடு, மற்றும் நெட்டிச்சு முனைகள் $(\pm a, 0)$ ஆகும்.

t -ஐப் பொறுத்து வகையிட, நமக்கு கிடைப்பது

$$\frac{dx}{dt} = -a \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = b \cos t$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \cot t$$

மற்றும் $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{b}{a} \operatorname{cosec}^2 t, \quad \frac{dt}{dx} = \frac{b}{a} \operatorname{cosec} 2t \times \frac{1}{- \sin t}$

$$\begin{aligned} \text{வளைவு ஆரம் } r &= \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{\left[1 + \frac{b^2 \cos^2 t}{a^2 \sin^2 t} \right]^{3/2}}{\frac{b}{a^2} \operatorname{cosec}^3 t} \\ &= \frac{1}{ab} (a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2} \text{ (எதிர்மறை குறியீட்டை புறக்கணிக்கவும்)} \\ &= \rho(a, 0) = \frac{1}{ab} (a^2 \sin^2 0 + b^2 \cos^2 0)^{3/2} \\ &= \frac{b^2}{a} \text{ (நீள்வட்டத்தின் அரை செவ்வகலம்) நிரூபிக்கப்பட்டது.} \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 1.8 : $x = c \log(s + \sqrt{s^2 + c^2}), y = \sqrt{s^2 + c^2}$, என்ற வளைவரையின் வளைவு ஆரத்தைக் காண்க.

தீர்வு : $x = c \log(s + \sqrt{s^2 + c^2}), y = \sqrt{s^2 + c^2}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

s -ஐப் பொறுத்து வகையிட, நமக்கு கிடைப்பது

$$\frac{dx}{ds} = \frac{c}{s + \sqrt{s^2 + c^2}} \left(1 + \frac{2s}{2\sqrt{s^2 + c^2}} \right) = \frac{2s}{\sqrt{s^2 + c^2}}$$

மற்றும் $\frac{dy}{ds} = \frac{2s}{2\sqrt{s^2 + c^2}} = \frac{s}{\sqrt{s^2 + c^2}}$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{ds}{dx}} = \frac{s}{c}$$

$$\tan \psi = \frac{dy}{dx} \text{ என்பதை நாம் அறிவோம்}$$

$$\text{ஆதலால் } s = c \tan \psi$$

[(1)-லிருந்து]

$$\begin{aligned} \therefore \text{வளைவு ஆரம், } \frac{ds}{dx} &= c \sec^2 \psi \\ &= c (1 + \tan^2 \psi) \\ &= c \left(1 + \frac{s^2}{c^2} \right) \\ &= \frac{c^2 + s^2}{c} \text{ (விடை)} \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 1.9 : $r^2 = a^2 \sin 2\theta$ என்ற வளைவரையில் வளைவு ஆரமானது, ஆரவெக்டராக மாறுபடுகிறது என நிறுவுக

தீர்வு : நீங்களே முயற்சி செய்யுங்கள்.

எடுத்துக்காட்டு 1.10 : ρ_1 மற்றும் ρ_2 ஆகியவை, $r = a(1 - \cos \theta)$ என்ற நெஞ்சுவளையின் துருவப் புள்ளி வழியாக செல்லும் ஏதேனும் ஒரு நாணின் துருவப் புள்ளிகளில் வளைவு ஆரங்கள் எனில்

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 = \frac{16a^2}{9} \text{ எனக் காட்டுக.}$$

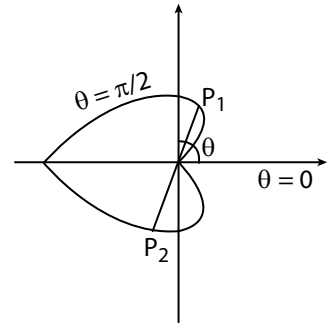
தீர்வு : $r = a(1 - \cos \theta)$ என்ற நெஞ்சுவளை படம் 1.8-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

P_1 எனும் புள்ளி (r_1, θ) எனில் P_2 எனும் புள்ளி $(r_2, \pi + \theta)$ ஆக இருக்கும் ஏனெனில் P_1 மற்றும் P_2 ஆகியவை துருவப் புள்ளி வழியாக செல்லும் நாணின் முனை புள்ளிகள்.

$$\text{எனவே } \frac{dr}{d\theta} = r_1 = a \sin \theta$$

$$\text{மற்றும் } \frac{d^2r}{d\theta^2} = r_2 = a \cos \theta$$

$$\begin{aligned} \text{எனவே } \rho &= \frac{(r^2 + r_1^2)^{3/2}}{r^2 + 2r_1^2 - rr_2} \\ &= \frac{[a^2(1 - \cos \theta)^2 + a^2 \sin^2 \theta]^{3/2}}{a^2(1 - \cos \theta)^2 + 2a^2 \sin^2 \theta - a^2(1 - \cos \theta) \cos \theta} \\ &= \frac{a^3(1 - \cos \theta)^{3/2} 2\sqrt{2}}{3a^2(1 - \cos \theta)} = \frac{a}{2} 2\sqrt{2} (1 - \cos \theta)^{1/2} \\ \rho_1 &= \frac{2\sqrt{2}}{3} a(1 - \cos \theta)^{1/2} \end{aligned}$$



படம் 1.8

$$\begin{aligned}\text{மற்றும் } \rho_2 &= \frac{2\sqrt{2}}{3} a(1 - \cos(\theta + \pi))^{1/2} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} a(1 - \cos\theta)^{1/2}\end{aligned}$$

$$\therefore \rho_1 + \rho_2 = \frac{8a^2}{9} a(1 - \cos\theta + 1 + \cos\theta) = \frac{16a^2}{9} \text{ நிரூபிக்கப்பட்டது.}$$

பயிற்சி 1.1

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளியில் பின்வரும் வளைவரைக்களுக்கான வளைவு ஆரத்தைக் காண்க :

1. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ புள்ளி: $\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right)$ 2. $x^3 + y^3 = 3axy$, புள்ளி: $\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$
3. $y^2 = \frac{a^2(a-x)}{x}$, புள்ளி: [குறிப்பு: வளைவுவின் சமன்பாடு $x = \frac{a^2}{y^2 + a^2}$]
4. $x^2y = a(x^2 + y^2)$ புள்ளி: $(-2a, 2a)$
5. $y = e^x$ என்ற வளைவரையின் வளைவு ஆரத்தை அவ்வளைவரை y -அச்சை கடக்கும் புள்ளியில் காண்க
6. $y = c \cos h\left(\frac{x}{c}\right)$ என்ற கேடனரியின் வளைவு ஆரத்தை ஏதேனும் ஒரு புள்ளி $(0, c)$ யில் காண்க.
7. $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையத்தின் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி P யில் ρ என்பது வளைவு ஆரமாகவும் மற்றும் S என்பது பரவளையத்தின் குவியமாகவும் இருக்கும்போது அப்பரவளையத்திற்கு p^2 -ன் மதிப்பு $(SP)^3$ யைப் பொறுத்து மறுமாடுகிறது எனக் காட்டுக.
8. $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ என்ற உருள்வளையில் P, Q ஆகிய புள்ளிகளில் உள்ள இரு தொடுகோடுகளுக்கிடையேயான கோணம் செங்கோணம் என்க. ρ_1, ρ_2 ஆகியவை P, Q என்ற புள்ளிகளில் உள்ள வளைவு ஆரங்கள் எனில் $\rho_1^2 + \rho_2^2 = 16a^2$ எனக் காட்டுக.
9. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ என்ற நான்மடிகைவளையருவியின் மேல் உள்ள எந்த ஒரு புள்ளிலும் வளைவு ஆரமானது, ஆதி புள்ளியிலிருந்து அப்புள்ளியின் தொடுகோட்டுக்கிடையேயான தொலைவிற்கு செங்குத்தாக இருக்கும் என நிறுவுக.
10. பின்வரும் நீள்வட்டத்திற்கு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\rho = \frac{a^2b^2}{p^3}$ என நிறுவுக. இங்கு P என்பது (x, y) என்ற புள்ளியில் உள்ள தொடுகோட்டு மையத்திலிருந்து செல்லும் செங்குத்து.
11. எந்தப் புள்ளியில் $y^2 = 8x$ என்ற பரவளையத்தின் வளைவு ஆரம் $7\frac{13}{16}$ ஆக இருக்கும் என காண்க.
12. $\theta = -\frac{\pi}{4}$ என்ற புள்ளியில், வளைவரை; $x = a \cos\theta (1 + \sin\theta)$, $y = a \sin\theta (1 + \cos\theta)$ யின் வளைவு ஆரம் a என நிறுவுக.

பின்வரும் வளைவரைக்களுக்கான வளைவு ஆரத்தைக் காண்க:

13. $r = a \cos n\theta$

14. $r^m = a^m \sin m\theta$

15. $r^2 \cos 2q = a^2$
16. $r = a$ எனில் $r = a \cos n\theta$ என்ற வளைவரையின் வளைவு ஆரம் எந்த ஒரு புள்ளியிலும், $\frac{a}{1+n^2}$ என நிறுவுக.
17. $\theta = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a} - \cos^{-1}$ என்ற வளைவரையின் வளைவு ஆரம் $\sqrt{r^2 - a^2}$ என நிறுவுக.
18. $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ என்ற ஞாணி (lemniscate) யின் வளைவு ஆரமானது, தொடுகோடு x- அச்சுக்கு இணையாக உள்ள புள்ளியில் $\frac{\sqrt{2}}{3} a$ என காட்டுக.

விடைகள் 1.1

1. $\frac{a}{\sqrt{2}}$ 2. $\frac{3a}{8\sqrt{2}}$ 3. $\frac{a}{2}$ 4. 2
5. $\sqrt{2}$ 6. c 11. $\left(\frac{9}{8}, 3\right)$ and $\left(\frac{9}{8}, -3\right)$
13. $\frac{(r^2 + a^2n^2 - r^2n^2)^{3/2}}{r^2 - r^2n^2 + 2a^2n^2}$ 14. $\frac{a^m}{(m+1)r^{m-1}}$ 15. $\frac{r^3}{a^2}$

1.1.3 வளைவு மையம், வளைவு வட்டம்

1.1.3.1 வளைவு மையம்

P என்ற AB வளைவரையின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க. எந்த புள்ளி P என்ற புள்ளியில் உள்ள செங்கோட்டுக்கு நேர் திசையிலும் மற்றும் அதிலிருந்து வளைவு ஆரத்திற்கு சமமான தூரத்தில் உள்ளதோ அப்புள்ளி வளைவு மையம் எனப்படும்

1.1.3.2 வளைவு வட்டம்

P என்ற AB வளைவரையின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க. C என்பது வளைவு மையம், ρ என்பது வளைவு ஆரம் என்க. C-யை மையமாகவும், ρ -வை ஆரமாகவும் கொண்டு P என்ற புள்ளியின் வழியாக செல்லும் வட்டம் வளைவு வட்டம் எனப்படும். ρ என்பது வளைவின் ஆரம் மற்றும் $(\bar{x}, \bar{y})$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட புள்ளியில் வளைவு மையத்தின் ஆயத்தொலைவுகளாக இருக்கட்டும், பின்னர் வளைவு வட்டத்தின் சமன்பாடு $(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 = \rho^2$ ஆல் வழங்கப்படுகிறது.

1.1.4 வளைவு மையத்தின் ஆயங்கள்

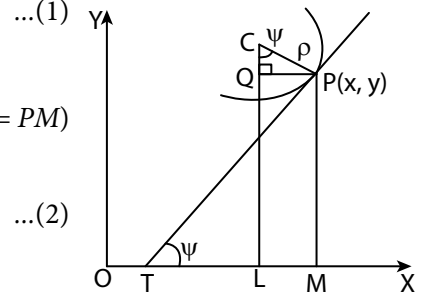
$(\bar{x}, \bar{y})$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட புள்ளியில் வளைவு மையத்தின் ஆயங்களாக இருக்கட்டும். இந்த ஆயங்கள், $PC = \rho$ என இருக்கும் வளைவரையில் $P(X, Y)$ என்ற புள்ளியில் உள்ள செங்கோட்டின் மீதுள்ளது. படம் 1.9, இலிருந்து, நாம் பெறுவது, $\bar{x} = OL = OM - LM$

$$= OM - PQ$$

$$(\because LM = PQ)$$

$$\text{இங்கு, } OM = x$$

$$\begin{aligned}
 PQ &= PC \sin \psi = \rho \sin \psi \\
 \bar{x} &= x - \rho \sin \psi \\
 \text{இதேபோல், } \bar{y} &= CL = CQ + QL \\
 &= CQ + PM \quad (\because QL = PM) \\
 \text{இங்கு } CQ &= PC \cos \psi = \rho \cos \psi \text{ மற்றும் } PM = y \\
 \therefore \bar{y} &= y + \rho \cos \psi \\
 \tan \psi &= \frac{dy}{dx} = y_1, \text{ என்பதை நாம் அறிவோம்.} \\
 \therefore \sin \psi &= \tan \psi \cos \psi \\
 \frac{\tan \psi}{\sec \psi} &= \frac{\tan \psi}{\sqrt{1 + \tan^2 \psi}} \text{ அல்லது } \sin \psi = \frac{y_1}{\sqrt{1 + y_1^2}} \\
 \bar{x} &= x - \rho \frac{y_1}{\sqrt{1 + y_1^2}}
 \end{aligned}$$



படம் 1.9

மேலுள்ள $\sin \psi$ மற்றும் $\cos \psi$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளை (1) மற்றும் (2) ல் பிரதியிட, நமக்கு கிடைப்பது,

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= x - \rho \frac{y_1}{\sqrt{1 + y_1^2}} \text{ மற்றும் } \bar{y} = y + \frac{\rho}{\sqrt{1 + y_1^2}} \\
 \rho &= \frac{(1 + y_1^2)^{3/2}}{y_2} \text{ என்பதை நாம் அறிவோம்.}
 \end{aligned}$$

ρ -வின் மதிப்பை வைத்து, நாம் பெறுவது,

$$\bar{x} = x - \frac{y_1}{y_2} (1 + y_1^2) \quad \dots (3)$$

$$\bar{y} = y - \frac{1}{y_2} (1 + y_1^2) \quad \dots (4)$$

ஆகியவை தேவையான வளைவு மையத்தின் ஆயங்கள் ஆகும்.

சமன்பாடுகள் (3) மற்றும் (4) மற்றும் வளைவரையின் சமன்பாடு ஆகியவற்றிலிருந்து x, y யை அகற்ற நாம் $\bar{x}$ மற்றும் $\bar{y}$ -க்கு இடையேயான தொடர்பை பெறலாம். இதுவே அலர்வரையின் சமன்பாடு ஆகும்.

வரலாறு

ஹ்யூஜென்ஸ் என்பவர் வளைவரையின் விளைவு மையத்தின் நியமபாலைக்கு அலர்வரை எனப் பெயரிட்டார் மற்றும் வீச்சை சாராத காலத்தை கொண்ட சரியான ஊசலை எப்படி உருவாக்குவது எனக் காட்டினார். இந்த உருவாக்கம், உருள்வளை அதன் அலர்வரைக்கு ஒத்து உள்ளது என்பதை அடிப்படையாகக் கொண்டுள்ளது.

1.1.5 அலர்வரை (Evolute)

ஒரு வளைவரையில் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியையும் பொருத்து அந்த இடத்தில் வளைவரையின் வளைவைக் காணலாம். இந்த புள்ளிகளில் செங்கோட்டை வரைந்து, இந்த ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் தொடர்புடைய வளைவு மையத்தை நாம் காணலாம். வளைவரை புள்ளிக்கு புள்ளி மாறுபடுவதால், வளைவு மையமும் வேறுபடுகிறது. கொடுக்கப்பட்ட வளைவரையின் அனைத்து வளைவு மையங்களின் மொத்தமும் மற்றொரு வளைவரையை வரையறுக்கும் மற்றும் இந்த வளைவரை வளைவரையின் அலர்வரை என்று அழைக்கப்படுகிறது.

கொடுக்கப்பட்ட வளைவரையின் வளைவு மையங்களின் நியமபாதை அந்த வளைவரையின் அலர்வரை என்று அழைக்கப்படுகிறது. வளைவரையின் மீதுள்ள P என்ற மாறி புள்ளியில் உள்ள வளைவு மையம் C-ன் நியமப்பாதை அந்த வளைவரையின் அலர்வரை என்று அழைக்கப்படுகிறது. வளைவரையே அதன் அளர்வரையின் உட்கருள் என அழைக்கப்படுகிறது.

இங்கே, வளைவரையின் வெவ்வேறு புள்ளிகளுக்கு, நாம் வெவ்வேறு வளைவு மையங்கள் பெறுகிறோம். இந்த அனைத்து வளைவு மையங்களின் நியமபாதை அலர்வரை என அழைக்கப்படுகிறது. இந்த வளைவு மையங்கள் அனைத்தையும் திருப்திப்படுத்தும் வெளிப்புற வளைவரை வளைவரையின் என அழைக்கப்படுகிறது. இங்கே அலர்வரை என்பது வளைவரை சமன்பாட்டைத் தவிர வேறில்லை.

அலர்வரையை கண்டுபிடிக்க, பின்வரும் மாதிரிகள் உள்ளன. வளைவரையின் சமன்பாடு கொடுக்கப்பட்டு, நாம் L.H.S = R.H.S, என நிரூபிக்க வேண்டும் என்றால், பின்வருவனவற்றை பின்பற்ற வேண்டும்:

1. முதலில் வளைவு மையம், $C(x, y)$ யை காண வேண்டும் இங்கே,

$$\bar{x} = x - \frac{y_1(1+y_1^2)}{y_2}, \bar{y} = y - \frac{1+y_1^2}{y_2}$$

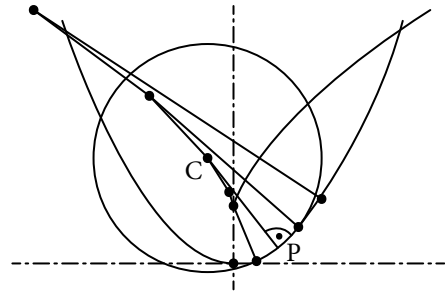
பின்னர் L.H.S ஐக் கருதி: க்குப் பதிலாக x மற்றும் $\bar{x}$ -க்கு பதிலாக y என பிரதியிடவும். இதேபோல் R.H.S க்கு பின்பற்றவும். பின்னர் L.H.S = R.H.S என காட்டலாம்.

2. ஒரு வளைவரை கொடுக்கப்பட்டு, கொடுக்கப்பட்ட வளைவரையின் அலர்வரையைக் கண்டுபிடிக்கும்படி கேட்டால், பின்வருமாறு செய்யவும்:

முதலில் வளைவு மையம் $C(x, y)$ -ஐக் கண்டறிந்து, பின்னர் $\bar{x}$ -க்குப் பதிலாக x மற்றும் $\bar{y}$ -க்கு பதிலாக y என மாற்றி எழுதவும், பின்னர் கொடுக்கப்பட்ட வளைவரையில் பிரதியிட, இது நமக்கு தேவையான அலர்வரையை அளிக்கிறது.

3. ஒரு வளைவரை கொடுக்கப்பட்டால், அது அளவுரு (துணைஅலகு) வடிவத்தில் இருந்தால், முதலில் வளைவு மையத்தைக் கண்டறியவும், அது அளவுருவின் அடிப்படையில் இருக்கும். பின்னர் x மற்றும் y இன் இந்த மதிப்புகளைப் பயன்படுத்தி அளவுருவை நீக்க, இது நமக்கு அலர்வரையை அளிக்கிறது.

படம் 1.10 இல் அலர்வரை மற்றும் வளைவு மையத்தின் சித்திர உருவமைப்பு உள்ளது.



படம் 1.10

1.1.6 உட்கருள் (Involute)

கற்பனையான ஒரு கம்பியை இணைப்பதன் மூலம் பெறப்பட்ட ஒரு வளைவரை மற்றும் பின்னர் கொடுக்கப்பட்ட வளைவரையின் மேல் இறுக்கமாக முறுக்குவது மற்றும் அவிழ்ப்பது வகையீட்டு வடிவியலில் உட்கருள் என்று அழைக்கப்படுகின்றன. இந்த கம்பியின் இலகுவான முடிவின் நியமப்பாதை உட்கருள் ஆகும்.

மேலும் தெளிவுபடுத்துதல்களுக்கு : ஒரு வளைவரையின் உட்கருளின் அலர்வரை அந்த அசல் வளைவரையை என்று குறிப்பிடுகிறது. வேறு வார்த்தைகளில் கூறுவதானால், ஒரு வளைவரையின் வளைவு மையத்தின் நியமப்பாதை அலர்வரை என்று அழைக்கப்படுகிறது மற்றும் கண்டுபிடிக்கப்பட்ட வளைவரை அதன் அலர்வரையின் உட்கருளாக அறியப்படுகிறது.

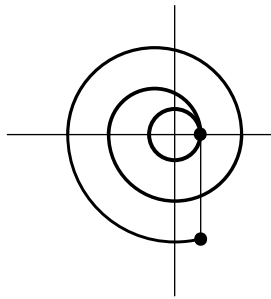
குறிப்புரை : இது வடிவியலின் ஒரு சிறப்பு பிரிவின் ஒரு பகுதியாகும். இது வளைவரையின் வகையீட்டு வடிவியல் என்று அழைக்கப்படுகிறது. இது யூக்ளிடியன் புறவெளியில் இருக்கும் மென்மையான வளைவரைகளைப் பற்றி பிரசுரிக்கிறது மற்றும் தொகையிடல் மற்றும் வகைநுண்கணிதத்தில் வெவ்வேறு முறைகளின் பயன்பாடுகளைக் கொண்டுள்ளது. வேறு சில வளைவரைகள் தொடர்பான வடிவங்கள் உட்கருள் என்று அழைக்கப்படுகின்றன. இதை 1673 இல் கிறிஸ்டின் ஹியூஜென்ஸ் கண்டுபிடித்தார். அவர் ஒரு டச்சு கணிதவியலாளர் மற்றும் இயற்பியலாளர் ஆவார்.

1.1.6.1 வளைவரைகளின் உட்கருள்கள்

கீழே காட்டப்பட்டுள்ளபடி வெவ்வேறு வளைவரைகளின் உட்கருள்களை இங்கே பார்ப்போம்:

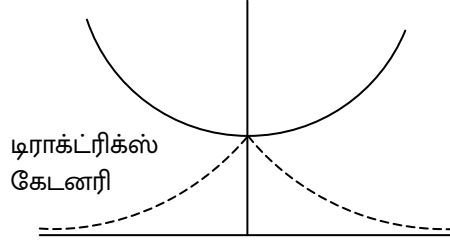
- * ஒரு வட்டத்தின் உட்கருள்
- * ஒரு தொங்கல் வளையின் உட்கருள்
- * ஒரு பிரமிடு அமைப்பின் உட்கருள்
- * ஒரு பரவளையத்தின் உட்கருள்
- * ஒரு நீள்வட்டத்தின் உட்கருள்

1. ஒரு வட்டத்தின் உட்கருள் : இது ஆர்க்கிமிடீஸ் சுருள் போன்றது.



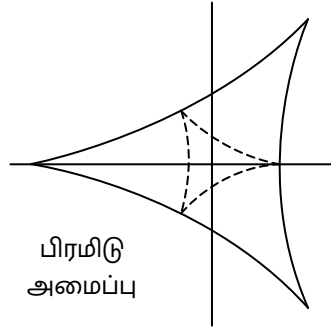
படம் 1.11: ஒரு வட்டத்தின் உட்கருள்

2. ஒரு தொங்கல் வளையின் உட்கருள் : முனைகளால் தாங்கும் தொங்கி கொண்டு இருக்கின்ற வட்டத்தை போன்றது இது. எனவே, இது ஒரு U-வடிவ தொங்கும் சங்கிலி, இது ஒரு பரவளையம் போல் காட்சியளிக்கும். சமதொடு வரைகோடு என்பது முனையின் வழியாக நுழையும் தொங்கல் வளையின் உட்கருள் ஆகும்.



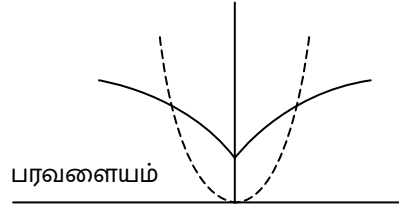
படம் 1.12: தொங்கல் வளையின் உட்கருள்

3. ஒரு பிரமிடு அமைப்பின் உட்கருள் : இது மூன்று குவளைகளைக் கொண்ட ஒரு முக்கோண வளைவரை. இது கிரேக்க எழுத்து டெல்டாவை ஒத்திருக்கிறது.



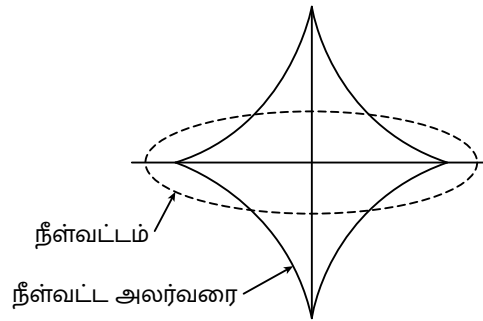
படம் 1.13: பிரமிடு அமைப்பின் உட்கருள்

4. ஒரு பரவளையத்தின் உட்கருள் :



படம் 1.14: பரவளையத்தின் உட்கருள்

5. ஒரு நீள்வட்டத்தின் உட்கருள் :



படம் 1.15: நீள்வட்டத்தின் உட்கருள்

கொடுக்கப்பட்டதை வரையறுக்க பின்வரும் சமன்பாடுகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன:

- * வட்டத்தின் உட்கருள்
- * தொங்கல் வளையின் உட்கருள்
- * பிரமிடு அமைப்பின் உட்கருள்
- * பரவளையத்தின் உட்கருள்

வட்டத்தின் உட்கருள் : $x = r(\cos t + t \sin t)$, $y = r(\sin t - t \cos t)$ இங்கு, r = வட்டத்தின் ஆரம், t = ரேடியனில் கோணத்தின் அளவுரு.

தொங்கல் வளையின் உட்கருள் : $x = t - \tanh t$, $y = \operatorname{sech} t$, இங்கு t = என்பது அளவுரு.

பிரமிடு அமைப்பின் உட்கருள் : $x = 2r \cos t + r \cos 2t$, $y = 2r \sin t - r \sin 2t$, இங்கு, r = பிரமிடு அமைப்பு உருவாவதில் ஈடுபட்டுள்ள உருளும் வட்டத்தின் ஆரம்.

பரவளையத்தின் உட்கருள் : $x^3 = a y^2$

1.1.7 சூழ்வு (Envelope)

கொடுக்கப்பட்ட குடும்ப வளைவரையின் ஒவ்வொரு உறுப்பினரையும் தொடும் ஒரு வளைவரை அந்த குடும்பத்தின் சூழ்வு என்று அழைக்கப்படுகிறது.

கொடுக்கப்பட்ட குடும்ப வளைவரைக்கான சூழ்வு கண்டுபிடிக்க செயல்முறை:

வகை 1 : ஒரு அளவுரு (துணைஅலகு) குடும்ப வளைவரையின் சூழ்வு.

$Y = f(x, a)$ ஆனது கொடுக்கப்பட்ட வளைவரைகளின் குடும்பம் மற்றும் 'a' ஐ அளவுருவாகக் கருதுவோம்.

படி 1 : a-ஐப் பொறுத்து பகுதி வகையிட்டு, அளவுருவின் மதிப்பைக் கண்டறியவும்.

படி 2 : கொடுக்கப்பட்ட குடும்ப வளைவரையில் அளவுருவின் மதிப்பை பிரதியிடுவதன் மூலம், தேவையான சூழ்வு நமக்கு கிடைக்கும்.

சிறப்பு வகை : கொடுக்கப்பட்ட வளைவரையின் சமன்பாடு அளவுருவின் அடிப்படையில் இருபடி வடிவமாக இருந்தால், அதாவது $Aa^2 + Ba + c = 0$, பின்னர் இதன் தன்மைக் காட்டி $= 0$, அதாவது $B^2 - 4AC = 0$ மூலம் சூழ்வு வழங்கப்படுகிறது.

வகை 2 : இரு அளவுரு (துணைஅலகு) குடும்ப வளைவரையின் சூழ்வு.

கொடுக்கப்பட்ட வளைவரைகளின் குடும்பம் $Y = f(x, a, b)$ எனவும் மற்றும் $g(a, b) = 0$, என்பது a மற்றும் b, ஆகிய இரண்டு அளவுருக்களை இணைக்கும் தொடர்பு எனவும் கருத்தில் கொள்வோம்.

படி 1 : a யை சாரமாறியாகவும் மற்றும் b என்பது a யை பொறுத்து உள்ளது எனவும் கருதுக. a-ஐப் பொறுத்து $Y = f(x, a, b)$ மற்றும் $g(a, b) = 0$ ஆகியவற்றை பகுதி வகையிடவும்.

படி 2 : படி 1 லிருந்து பெறப்பட்ட சமன்பாடுகள் மற்றும் $g(a, b) = 0$ ஆகியவற்றிலிருந்து a, b அளவுருக்களை அகற்ற, தேவையான சூழ்வு கிடைக்கும்.

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1.11 : $\sqrt{x} + \sqrt{y} = a$ என்ற வளைவரையின் வளைவு மையம் மற்றும் வளைவு வட்டத்தின் சமன்பாடு $(a/4, a/4)$ என்ற புள்ளியில் $(3a/4, 3a/4)$ மற்றும் $\left(x - \frac{3}{4}a\right)^2 + \left(y - \frac{3}{4}a\right)^2 = \frac{a^2}{2}$ என காட்டுக.

தீர்வு : இங்கு வளைவரையின் சமன்பாடானது

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = a \quad \dots(i)$$

(i) ஐ, x - ஐப் பொறுத்து வகையிட, நமக்கு கிடைப்பது

$$\frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{1}{2}y^{-1/2}y_1 = 0 \quad \dots(ii)$$

(ii) ஐ, x - ஐப் பொறுத்து வகையிட, நமக்கு கிடைப்பது

$$-\frac{1}{4}x^{-3/2} - \frac{1}{4}y^{-3/2}y_1 \cdot y_1 + \frac{1}{2}y^{-1/2}y_2 = 0 \quad \dots(iii)$$

(iii) லிருந்து $\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right)$, என்ற புள்ளியில், நாம் பெறுவது

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{a}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{a}}y_1 = 0$$

$$\Rightarrow y_1 = -1$$

(iv) லிருந்து $\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right)$, என்ற புள்ளியில், நாம் பெறுவது

$$-\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{a} \cdot \frac{2}{\sqrt{a}} - \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{a} \cdot \frac{2}{\sqrt{a}}(-1)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{a}}y_2 = 0$$

$$-\frac{4}{a\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}}y_2 = 0$$

$$\Rightarrow y_2 = \frac{4}{a}$$

$$\text{எனவே, } \rho \text{ (கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள்)} = \frac{[1 + y_1^2]^{3/2}}{y_2} = \frac{(1 + 1)^{3/2}}{4/a}$$

$$= 2\sqrt{2} \left(\frac{a}{4}\right) = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$(a/4, a/4)$ என்ற புள்ளியில், $(\bar{x}, \bar{y})$ என்பது வளைவு மையம் எனில்,

$$\bar{x} = x - \frac{y_1[1 + y_1^2]^{3/2}}{y_2} = \frac{(1 + 1)^{3/2}}{4/a}$$

$$= \frac{a}{4} - \left[-\frac{(1 + 1)}{4/a} \right]$$

$$= \frac{a}{4} - \left[-\frac{(1+1)}{4/a} \right]$$

$$\begin{aligned} \text{இதேபோல், } \bar{y} &= y + \frac{1+y_1^2}{y_2} \\ &= \frac{a}{4} + \frac{1+1}{4/a} \\ &= \frac{a}{4} + \frac{a}{2} = \frac{3}{4}a \end{aligned}$$

∴ வளைவு வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 = \rho^2$$

$$\left(x - \frac{3}{4}a\right)^2 + \left(y - \frac{3}{4}a\right)^2 = \frac{a^2}{2} \quad (\text{நிரூபிக்கப்பட்டது.})$$

எடுத்துக்காட்டு 1.12 : $x = c \cos t + c \log \tan \left(\frac{t}{2}\right)$, $y = c \sin t$ என்ற சம தொடு வரைகோட்டின் அலர்வரை

$y = c \cosh\left(\frac{x}{c}\right)$ சமன்பாடானது என்ற தொங்கல் வளை என நிறுவுக.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட வளைவரையின் சமன்பாடானது

$$x = c \cos t + c \log \tan \left(\frac{t}{2}\right), y = c \sin t$$

t - ஐப் பொறுத்து வகையிட, நமக்கு பெறுவது

$$\frac{dx}{dt} = -c \sin t + \frac{c}{\tan \left(\frac{t}{2}\right)} \cdot \frac{1}{2} \sec^2 \left(\frac{t}{2}\right)$$

$$= -c \sin t + \frac{c \cos \left(\frac{t}{2}\right)}{\sin \left(\frac{t}{2}\right)} \cdot \frac{1}{2 \cos^2 \left(\frac{t}{2}\right)}$$

$$= -c \sin t + \frac{c}{2 \sin \left(\frac{t}{2}\right) \cdot \cos \left(\frac{t}{2}\right)} = -c \sin t + \frac{c}{\sin t}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c(1 - \sin^2 t)}{\sin t} = \frac{c \cos^2 t}{\sin t}$$

மற்றும் $\frac{dy}{dt} = c \cos t$

$$y_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}, \text{ என்பதை நாம் அறிவோம்}$$

$$= c \cos t \cdot \frac{\sin t}{c \cos^2 t} = \tan t$$

மற்றும்

$$y_2 = \frac{d^2y}{dx^2} = \sec^2 t \frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 t} \cdot \frac{\sin t}{c \cos^2 t} = \frac{\sin t}{c \cos^4 t}$$

$(\bar{x}, \bar{y})$ என்பது வளைவரையின் மீதுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியின் வளைவு மையம் என்க. எனவே

$$\bar{x} = x - \frac{y_1 (1 + y_1^2)}{y_2}$$

$$= c \cos t + c \log \tan \left(\frac{t}{2} \right) - c \cdot \frac{\cos^4 t}{\sin t} \cdot \frac{\sin t}{\cos t} \cdot \frac{1}{\cos^2 t}$$

$$= c \cos t + c \log \tan \left(\frac{t}{2} \right) - c \cos t$$

$$\bar{x} = c \log \tan \left(\frac{t}{2} \right) \quad \dots(i)$$

மற்றும்

$$\bar{y} = y + \frac{1 + y_1^2}{y_2}$$

$$= c \sin t + \frac{1 + \tan^2 t}{\frac{\sin t}{c \cos^4 t}} \cdot \sec^2 t$$

$$= c \sin t + \frac{c \cos^4 t}{\sin t} \cdot \sec^2 t$$

$$= c \sin t + \frac{c \cos^2 t}{\sin t}$$

$$= \frac{c (\sin^2 t + \cos^2 t)}{\sin t}$$

$$\bar{y} = \frac{c}{\sin t} \quad [\because \sin^2 t + \cos^2 t = 1] \quad \dots(ii)$$

கொடுக்கப்பட்டுள்ள வளைவரையின் அலர்வரையானது $(\bar{x}, \bar{y})$ -இன் நியமபாதை ஆகும். (i) மற்றும்

(ii) க்கு இடையே உள்ள 't' ஐ அகற்றுவோம்.

(i) லிருந்து, $\log \tan \left(\frac{t}{2} \right) = \frac{\bar{x}}{c}$

$$\Rightarrow \tan \left(\frac{t}{2} \right) = e^{\bar{x}/c} \quad \dots(iii)$$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii) லிருந்து, } \quad \frac{\bar{y}}{c} &= \frac{1}{\sin t} = \frac{1 + \tan^2 q(t/2)}{2 \tan(t/2)} \\
 \frac{\bar{y}}{c} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\tan(t/2)} + \tan^2 q(t/2) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left(e^{\bar{x}/c} + e^{\bar{x}/c} \right) \\
 \bar{y} &= c \cosh \left(\frac{\bar{x}}{c} \right)
 \end{aligned}$$

$\bar{x}$ -க்கு x , $\bar{y}$ -க்கு y என மாற்ற $(\bar{x}, \bar{y})$ என்ற புள்ளியின் நியமப்பாத்தை $y = c \cosh \left(\frac{\bar{x}}{c} \right)$ என கிடைக்கும். இது அலர்வரை சமன்பாடு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.13 : கொடுக்கப்பட்டுள்ள $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ ன்ற வளைவரைக்கு ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் வளைவு மையத்தின் ஆயங்களை காண்க. மேலும் வளைவு ஆரத்தின் (ρ) மதிப்பையும் மற்றும் அலர்வரை சமன்பாட்டையும் காண்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட வளைவரையின் துணைஅலகு சமன்பாடானது

$$x = a \cos^3 t \quad y = a \sin^3 t \quad \dots(1)$$

t -ஐப் பொறுத்து வகையிட,

$$\frac{dx}{dt} = -3a \cos^2 t \sin t \quad \frac{dy}{dt} = 3a \sin^2 t \cos t$$

$$\therefore y_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = -\frac{3a \sin^2 t \cos t}{3a \cos^2 t \sin t} = -\tan t$$

$$\begin{aligned}
 y_2 &= \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} (-\tan t) \\
 &= -\sec^2 t \frac{dx}{dt} = \frac{-\sec^2 t}{-3a \cos^2 t \sin t} = \frac{1}{3a \sin t \cos^4 t}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{வளைவு ஆரம் } (\rho) &= \frac{[1 + y_1^2]^{3/2}}{y_2} \\
 &= (1 + \tan^2 t)^{3/2} \times 3a \sin t \cos^4 t \\
 &= \frac{3a \sin t \cos^4 t}{(\cos^2 t)^{3/2}} = 3a \sin t \cos t
 \end{aligned}$$

இப்போது, ' t ' என்ற புள்ளியில் உள்ள வளைவின் மையம் $(\bar{x}, \bar{y})$ பின்வருமாறு

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= x - \rho \sin \psi \\
 &= x - \frac{y_1 (1 + y_1^2)}{y_2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= x + \tan t(1 + \tan^2 t) \times 3a \sin t \cos^4 t \\
 &= a \cos^3 t + x + 3a \sin^2 t \cos t \quad [\because x = a \cos^3 t] \quad \dots(2)
 \end{aligned}$$

இதேபோல்,

$$\begin{aligned}
 \bar{y} &= y + \frac{1 + y_1^2}{y_2} \\
 &= y + \frac{1 + \tan^2 t}{\frac{1}{3a \sin t \cos^4 t}} \\
 &= y + (1 + \tan^2 t) (3a \sin t \cos^4 t) \\
 &= y + 3a \sin t \cos^2 t \\
 \bar{y} &= a \sin^3 t + 3a \sin t \cos^2 t \quad [\because y = a \sin^3 t] \quad \dots(3)
 \end{aligned}$$

சமன்பாடுகள் (1), (2) மற்றும் (3)லிருந்து, $\bar{x}$, $\bar{y}$ மற்றும் t -ஐ அகற்ற, நமக்கு கிடைப்பது

$$\begin{aligned}
 \bar{x} + \bar{y} &= a(\cos^3 t + \sin^3 t + 3\sin^2 t \cos t + 3\cos^2 t \sin t) \\
 &= a(\cos t + \sin t)^3 \\
 (\bar{x} + \bar{y})^{2/3} &= a^{2/3} (\cos t + \sin t)^2 \quad \dots(4)
 \end{aligned}$$

இதேபோல்,

$$(\bar{x} - \bar{y})^{2/3} = a^{2/3} (\cos t - \sin t)^2 \quad \dots (5)$$

சமன்பாடுகள் (1) மற்றும் (2) ஐ கூட்ட, நாம் பெறுவது

$$\begin{aligned}
 (\bar{x} + \bar{y})^{2/3} + (\bar{x} - \bar{y})^{2/3} &= a^{2/3} (\cos^2 t + \sin^2 t + 2 \cos t \sin t + \cos^2 t + \sin^2 t - 2 \cos t \sin t) \\
 &= a^{2/3} (1 + 1) = 2a^{2/3}
 \end{aligned}$$

அதனால் $(\bar{x}, \bar{y})$ இன் நியமப்பாதை, அதாவது அலர்வரையின் சமன்பாடு

$$(\bar{x} + \bar{y})^{2/3} + (\bar{x} - \bar{y})^{2/3} = 2a^{2/3} \text{ ஆகும்.}$$

மற்றும் வளைவு மையத்தின் ஆயங்கள் $(a \cos^3 t + x + 3a \sin^2 t \cos t, a \sin^3 t + 3a \sin t \cos^2 t)$ ஆகியவை ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.14 : கொடுக்கப்பட்ட செவ்வக அதிபரவளையத்திற்கு $xy = a^2$ (அதாவது $x = at, y = a/t$)

- வளைவு ஆரத்தை காண்க (ρ).
- வளைவு மையத்தின் ஆயங்களை காண்க $(\bar{x}, \bar{y})$
- கொடுக்கப்பட்ட வளைவரையின் அலர்வரை $(x + y)^{2/3} - (x - y)^{2/3} = (4a)^{2/3}$ என காட்டுக.

தீர்வு : (i) வளைவு ஆரத்தை காணல்:

$$xy = a^2 \text{ அல்லது } y = \frac{a^2}{x}$$

$$\therefore y_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{a^2}{x^2} \text{ மற்றும் } y_2 = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2a^2}{x^3}$$

ஆகவே,

$$\rho = \frac{[1 + y_1^2]^{3/2}}{y_2} = \frac{\left(1 + \frac{a^4}{x^4}\right)^{3/2}}{2a^2/x^3}$$

$$\rho = \frac{x^3}{2a^2} \left(\frac{x^4 + a^4}{x^4}\right)^{3/2}$$

(ii) வளைவு மையத்தின் ஆயங்களை காணல்:

$$\bar{x} = x - \frac{y_1(1 + y_1^2)}{y_2} \text{ மற்றும் } \bar{y} = y + \frac{1 + y_1^2}{y_2}$$

$\Rightarrow$

$$\bar{x} = x - \frac{\frac{-a^2}{x^2} \left(1 + \frac{a^4}{x^4}\right)}{2a^2/x^3}$$

$\Rightarrow$

$$= x + \frac{x^4 + a^4}{2x^3}$$

$\Rightarrow$

$$= \frac{2x^4 + x^4 + a^4}{2x^3}$$

$\Rightarrow$

$$= \frac{3x^4 + a^4}{2x^3} = \frac{3x^4 + x^2y^2}{2x^3} \quad [\because xy = a^2]$$

$\Rightarrow$

$$\bar{x} = \frac{3}{2}x + \frac{y^2}{2x}$$

இதேபோல்,

$$\bar{y} = y + \frac{1 + y_1^2}{y_2}$$

$$= y + \frac{1 + \frac{a^4}{x^4}}{2a^2/x^3} = y + \frac{x^4 + a^4}{2a^2x}$$

$$= y + \frac{x^4 + x^2y^2}{2x^2y} \quad [\because xy = a^2]$$

$$\bar{y} = y + \frac{x^2 + y^2}{2y} = \frac{x^2 + 3y^2}{2y} = \frac{3y}{2} + \frac{x^2}{2y}$$

எனவே, வளைவு மையத்தின் ஆயங்கள்

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{3x}{2} + \frac{y^2}{2x}, \frac{3y}{2} + \frac{x^2}{2y}\right) \text{ ஆகியவை ஆகும்.}$$

(iii) கூடுதலாக, கொடுக்கப்பட்ட வளைவரையின் அலர்வரை $(x+y)^{2/3} - (x-y)^{2/3} = (4a)^{2/3}$ என காட்டுதல்:

$$\begin{aligned}\bar{x} + \bar{y} &= \frac{1}{2xy} [x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2] \\ &= \frac{1}{2xy} (x+y)^3 = \frac{1}{2a^2} (x+y)^3 \quad [\because xy = a^2]\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\bar{x} + \bar{y}) = \frac{1}{(2a^2)^{2/3}} (x+y)^2$$

இதேபோல், $(\bar{x} - \bar{y}) = \frac{1}{(2a^2)^{2/3}} (x-y)^2$

எனவே நாம் பெறுவது,

$$\begin{aligned}(\bar{x} + \bar{y})^{2/3} - (\bar{x} - \bar{y})^{2/3} &= \frac{1}{(2a^2)^{2/3}} [(x+y)^2 - (x-y)^2] \\ &= \frac{1}{(2a^2)^{2/3}} (4xy) = \frac{1}{(2a^2)^{2/3}} (4a^2) = (4a)^{2/3}\end{aligned}$$

எனவே $(\bar{x}, \bar{y})$ இன் நியமப்பாதை $(x+y)^{2/3} + (x-y)^{2/3} = (4a)^{2/3}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.15 : பின்வரும் வளைவரைகளின் வளைவு மையத்தை காண்க :

(i) $y = x^3 - 6x^2 + 3x + 1$, புள்ளி $(1, -1)$

(ii) பரவளையம் $y^2 = 4ax$, புள்ளி (x, y) . மேலும் கொடுக்கப்பட்ட வளைவரையின் அலர்வரை சமன்பாட்டை காண்க

(iii) நீள்வட்டம் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, புள்ளி (x, y) மேலும் அதன் அலர்வரையை காண்க

தீர்வு : (i) கொடுக்கப்பட்ட வளைவரை $y = x^3 - 6x^2 + 3x + 1$ ஆகும்.

x -ஐப் பொறுத்து வகையிட,

$$y_1 = \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12x + 3$$

$$y_1(1, -1) = -6$$

மற்றும் $y_1 = \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12x + 3$

$$y_2(1, -1) = -6$$

ஆகவே,

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x - \frac{y_1(1 + y_1^2)}{y_2} \\ &= 1 - \frac{(-6)[1 + (-6)^2]}{y_2} = -36\end{aligned}$$

இதேபோல்,
$$\bar{y} = y + \frac{1 + y_1^2}{y_2} = -1 + \frac{1 + (-6)^2}{-6} = -\frac{43}{6}$$

எனவே வளைவு மையம் $(\bar{x}, \bar{y}) = (-36, -43/6)$ ஆகும்

(ii) கொடுக்கப்பட்ட பரவளையத்தின் சமன்பாடு $y^2 = 4ax$ ஆகும்.

$$\Rightarrow y = 2\sqrt{ax}$$

x -ஐப் பொறுத்து வகையிட,

$$y_1 = \frac{dy}{dx} = 2\sqrt{a} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{a}{x}}$$

$$\Rightarrow y_2 = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2} \sqrt{a} x^{-3/2}$$

அதனால்
$$\bar{x} = x - \frac{y_1(1 + y_1^2)}{y_2}$$

$$= x - \frac{\sqrt{\frac{a}{x}} \left(1 + \frac{a}{x}\right)}{-\frac{1}{2} \sqrt{a} x^{-3/2}} = x + 2(x+a)$$

$$= 3x + 2a$$

...(1)

மற்றும்,
$$\bar{y} = y + \frac{(1 + y_1^2)}{y_2} = y + \frac{1 + \frac{a}{x}}{\frac{1}{2} \sqrt{a} x^{-3/2}}$$

$$= 2\sqrt{a}\sqrt{x} - \frac{2(x+a)}{\sqrt{a}x^{-1/2}} \quad [\because y = 2\sqrt{ax}]$$

$$= 2\sqrt{a}\sqrt{x} \left(1 - \frac{x+a}{a}\right) = -\frac{2}{\sqrt{a}} x^{3/2}$$

...(2)

எனவே கொடுக்கப்பட்ட வளைவரையின் வளைவு மையம் $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(3x + 2a, -\frac{2x^{3/2}}{\sqrt{a}}\right)$ ஆகும்.

(1) லிருந்து நாம் பெறுவது, $x = \frac{\bar{x} - 2a}{3}$

இந்த மதிப்பை (2) ல் பிரதியிட, நாம் பெறுவது,

$$\bar{y} = -\frac{2\left(\frac{\bar{x} - 2a}{3}\right)^{3/2}}{\sqrt{a}}$$

$$a \bar{y}^2 = 4 \left(\frac{\bar{x} - 2a}{3} \right)^3$$

$$27a \bar{y}^2 = 4(\bar{x} - 2a)^3$$

எனவே $(\bar{x}, \bar{y})$ இன் நியமப்பாத்தை $27a \bar{y}^2 = 4(\bar{x} - 2a)^3$ ஆகும். இதுவே தேவையான அலர்வரை ஆகும்.

(iii) கொடுக்கப்பட்ட நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ஆகும்

x-ஐப் பொறுத்து வகையிட,

$$y_1 = \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y} \text{ மற்றும் } y_2 = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3}$$

$$\text{அதனால், } \bar{x} = x - \frac{y_1(1 + y_1^2)}{y_2}$$

$$= x - \frac{-\frac{b^2x}{a^2y} \left(1 + \frac{b^4x^2}{a^4y^2} \right)}{-\frac{b^4}{a^2y^3}} = x - \frac{x}{a^4b^2} (a^4y^2 + b^4x^2)$$

$$= x - \frac{x}{a^4b^2} [a^2b^2(a^2 - x^2) + b^4x^2]$$

$$\bar{x} = \frac{a^2 - b^2}{a^4} x \quad \dots(1)$$

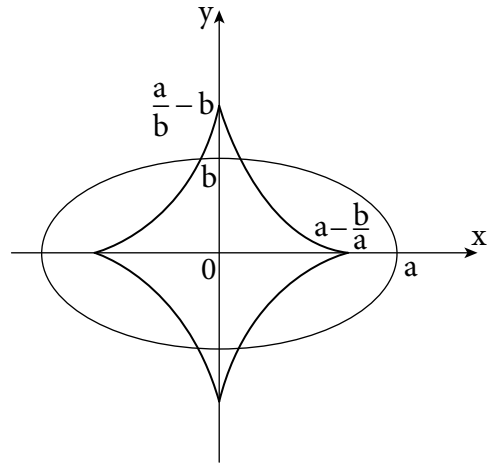
இதேபோல்,

$$\bar{y} = y + \frac{(1 + y_1^2)}{y_2}$$

$$= y + \frac{1 + \frac{b^4x^2}{a^4y^2}}{-\frac{b^4}{a^2y^3}} = y - \frac{y}{a^2b^4} (a^4y^2 + b^4x^2)$$

$$= y - \frac{y}{a^2b^4} [a^4b^2 + a^2b^2(b^2 - y^2)]$$

$$\bar{y} = \frac{b^2 - a^2}{b^4} y^3 \quad \dots(2)$$



படம் 1:16

(1)-லிருந்து நாம் பெறுவது,

$$x = \left(\frac{\bar{x} a^4}{a^2 - b^2} \right)^{1/3}$$

மற்றும் (2) லிருந்து நாம் பெறுவது,

$$y = \left(\frac{\bar{y} b^4}{b^2 - a^2} \right)^{1/3}$$

இம்மதிப்புகளை நீள்வட்டத்தின் சமன்பாட்டில் பிரதியிட, நாம் பெறுவது,

$$\frac{1}{a^2} \left(\frac{\bar{x} a^4}{a^2 - b^2} \right)^{2/3} + \frac{1}{b^2} \left(\frac{\bar{y} b^4}{b^2 - a^2} \right)^{2/3} = 1$$

$$(a\bar{x})^{2/3} + (b\bar{y})^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$$

எனவே இன் நியமப்பாத்தை $(a\bar{x})^{2/3} + (b\bar{y})^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$ ஆகும்.

இதுவே தேவையான, கொடுக்கப்பட்ட நீள்வட்டத்தின் அலர்வரை ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.16 : $y = mx + \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$ என்ற நேர்கோட்டு குடும்பத்தின் சூழ்வை காண்க. இங்கு m என்பது துணைஅலகு .

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட நேர்கோட்டு குடும்பத்தின் சமன்பாடு $y = mx + \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$ ஆகும்.

$$\Rightarrow y - mx = \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow (y - mx)^2 = a^2 m^2 + b^2$$

$$\Rightarrow y^2 + m^2 x^2 - 2mxy = a^2 m^2 + b^2$$

$$\Rightarrow m^2(x^2 - a^2) - 2mxy + (y^2 - b^2) = 0$$

‘ m ’ - ஐப் பொறுத்து வகையிட,

$$m(x^2 - a^2) - 2xy = 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{xy}{x^2 - a^2}$$

m -ன் மதிப்பை கொடுக்கப்பட்ட வளைவரை குடும்பத்தில் பிரதியிட,

$$m^2(x^2 - a^2) - 2mxy + (y^2 - b^2) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{xy}{x^2 - a^2} \right)^2 (x^2 - a^2) - 2 \left(\frac{xy}{x^2 - a^2} \right) xy + (y^2 - b^2) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 y^2}{x^2 - a^2} - \frac{2x^2 y^2}{x^2 - a^2} + y^2 - b^2 = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{x^2 y^2}{x^2 - a^2} + y^2 - b^2 = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{x^2 y^2}{x^2 - a^2} = y^2 - b^2$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow x^2y^2 = (x^2 - a^2)(y^2 - b^2) \\
 &\Rightarrow x^2y^2 = x^2y^2 - x^2b^2 - a^2y^2 + a^2b^2 \\
 &\Rightarrow x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \\
 &\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1
 \end{aligned}$$

எனவேகொடுக்கப்பட்ட நேர்கோட்டு குடும்பத்தின் சூழ்வு ஓர் நீள்வட்டம் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.17 : $y = mx + am^p$ என்ற வளைவரையின் சூழ்வை காண்க இங்கு m என்பது துணைஅலகு மற்றும் a, p ஆகியவை மாறிலிகள்.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட வளைவரை

$$y = mx + am^p \quad \dots(1)$$

‘ m ’ ஐப் பொறுத்து வகையிட,

$$\begin{aligned}
 0 &= x + p am^{p-1} \\
 \Rightarrow m &= \left(-\frac{x}{pa} \right)^{\frac{1}{p-1}}
 \end{aligned}$$

(2)-ஐ பயன்படுத்தி (1) லிருந்து m -ஐ அகற்ற,

$$\begin{aligned}
 y &= \left(-\frac{x}{pa} \right)^{\frac{1}{p-1}} x + a \left(-\frac{x}{pa} \right)^{\frac{1}{p-1}} \\
 y^{p-1} &= \left(-\frac{x}{pa} \right) x^{p-1} + a^{p-1} (-x)^p \\
 a p y^{p-1} &= (-x)^p + a^{p-2} (-x)^p
 \end{aligned}$$

இதுவே கொடுக்கப்பட்ட வளைவரையின் சூழ்வின் சமன்பாடு ஆகும்.

இரு துணைஅலகு குடும்ப வளைவரையின் சூழ்வை அடிப்படையாகக் கொண்ட கணக்குகள்:

எடுத்துக்காட்டு 1.18 : $ax + by = 1$ என்ற நேர்கோட்டு குடும்பத்தின் சூழ்வை காண்க. இங்கு a மற்றும் b என்ற துணைஅலகுகள், $ab = 1$ என்ற தொடர்பால் இணைக்கப்பட்டுள்ளது.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட வளைவரை $ax + by = 1 \quad \dots(1)$

மற்றும் $ab = 1 \quad \dots(2)$

(1)-ஐ a -ஐப் பொறுத்து வகையிட,

(a யை சாரமாறியாகவும் மற்றும் b என்பது a யை பொறுத்து உள்ளது எனவும் கருதுக)

$$\begin{aligned}
 x + \frac{db}{da} y &= 0 \\
 \Rightarrow \frac{db}{da} &= -\frac{x}{y} \quad \dots(3)
 \end{aligned}$$

(2) யை a - ஐப் பொறுத்து வகையிட,

$$b + a \frac{db}{da} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{db}{da} = -\frac{b}{a} \quad \dots(4)$$

(3) மற்றும் (4) லிருந்து, நாம் பெறுவது

$$\frac{x}{y} = \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{ax}{1} = \frac{by}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{ax}{1} = \frac{by}{1} = \frac{ax + by}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2x}, b = \frac{1}{2y}$$

(5) யை (2) ல் பிரதியிட

$$\left(\frac{1}{2x}\right)\left(\frac{1}{2y}\right) = 1$$

$$\Rightarrow 4xy = 1$$

எடுத்துக்காட்டு 1.19 : $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$ என்ற நேர்கோட்டு குடும்பத்தின் சூழ்வை காண்க. இங்கு a மற்றும்

b என்ற துணைஅலகுகள், $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$ என்ற தொடர்பால் இணைக்கப்பட்டுள்ளது.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட வளைவரை

$$\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1 \quad \dots(1)$$

$$\text{மற்றும்} \quad \sqrt{a} + \sqrt{b} = 1 \quad \dots(2)$$

(1) யை a - ஐப் பொறுத்து வகையிட,

$$\frac{\sqrt{x}}{2a^{3/2}} - \frac{\sqrt{y}}{2b^{3/2}} \frac{db}{da} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{db}{da} = -\frac{\sqrt{x} b \sqrt{b}}{\sqrt{y} a \sqrt{a}} \quad \dots(3)$$

(2) யை a - ஐப் பொறுத்து வகையிட,

$$\frac{1}{2\sqrt{a}} + \frac{1}{2\sqrt{b}} \frac{db}{da} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{db}{da} = -\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \quad \dots(4)$$

(3) மற்றும் (4) லிருந்து, நாம் பெறுவது

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \frac{b}{a} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{b}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{1}{1}$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{x}, b = \sqrt{y} \quad \dots(5)$$

(5) யை (2) ல் பிரதியிட, நாம் பெறுவது

$$x^{1/4} + y^{1/4} = 1$$

இதுவே கொடுக்கப்பட்ட வளைவரையின் சூழ்வின் சமன்பாடு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.20 : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ என்ற நேர்கோட்டு குடும்பத்தின் சூழ்வை காண்க. இங்கு a மற்றும் b என்ற துணைஅலகுகள், $a + b = c$ என்ற தொடர்பால் இணைக்கப்பட்டுள்ளது .

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட வளைவரை

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \dots(1)$$

மற்றும் $a + b = c$

$$\Rightarrow b = c - a \quad \dots(2)$$

(2) யை (1) ல் பிரதியிட, நாம் பெறுவது

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{c-a} = 1$$

a - ஐப் பொறுத்து வகையிட,

$$-\frac{x}{a^2} + \frac{y}{(c-a)^2} = 0$$

$$\frac{x}{a^2} = \frac{y}{(c-a)^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{(c-a)^2}{a^2} &= \frac{y}{x} \\ \frac{c-a}{a} &= \sqrt{\frac{y}{x}} \\ \frac{c}{a} &= \sqrt{\frac{y}{x}} + 1 = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x}} \\ a &= \frac{c\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\end{aligned}$$

‘a’ ன் மதிப்பை (2) ல் பிரதியிட,

$$\begin{aligned}b &= c - \frac{c\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \\ &= \frac{c\sqrt{x} + c\sqrt{y} - c\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{c\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\end{aligned}$$

‘a’ மற்றும் ‘b’ - ன் மதிப்பை (1) ல் பிரதியிட,

$$\begin{aligned}\frac{x}{\left(\frac{c\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\right)} + \frac{y}{\left(\frac{c\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\right)} &= 1 \\ \frac{x(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{c\sqrt{x}} + \frac{y(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{c\sqrt{y}} &= 1 \\ (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \left(\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{y}{\sqrt{y}}\right) &= c \\ (\sqrt{x} + \sqrt{y}) (\sqrt{x} + \sqrt{y}) &= c \\ (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 &= c \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} &= \sqrt{c}\end{aligned}$$

இது தேவையான சூழ்வு ஆகும்.

அலர்வரையை செங்கோட்டின் சூழ்வு எனும் கருத்தை அடிப்படையாக கொண்ட கணக்குகள்:

எடுத்துக்காட்டு 1.21 : அலர்வரையை செங்கோட்டின் சூழ்வு என்பதை கருத்தில் கொண்டு,

$x = \cos\theta + \theta \sin\theta$, $y = \sin\theta - \theta \cos\theta$ - ன் அலர்வரையை காண்க

தீர்வு : $x = \cos\theta + \theta \sin\theta$, $y = \sin\theta - \theta \cos\theta$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

θ - வை பொறுத்து வகையிட,

$$\frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta + \theta \cos\theta + \sin\theta = \theta \cos\theta \quad \text{மற்றும்} \quad \frac{dy}{d\theta} = \cos\theta - \theta (-\sin\theta) - \cos\theta = \theta \sin\theta$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\theta \sin \theta}{\theta \cos \theta} = \tan \theta$$

தேவையான செங்கோட்டின் சமன்பாடு,

$$(y - (\sin \theta - \theta \cos \theta)) = \frac{1}{\tan \theta} (x - (\cos \theta + \theta \sin \theta))$$

$$(y - (\sin \theta - \theta \cos \theta)) = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} (x - (\cos \theta + \theta \sin \theta))$$

$$y \sin \theta - \sin^2 \theta + \theta \sin \theta \cos \theta = -x \cos \theta + \cos^2 \theta + \theta \sin \theta \cos \theta$$

$$y \sin \theta + x \cos \theta = 1 \quad \dots(1)$$

θ-வை பொறுத்து வகையிட,

$$y \cos \theta - x \sin \theta = 0 \quad \dots(2)$$

(1) யை $\cos \theta$ மற்றும் (2) யை $\sin \theta$ ஆல் பெருக்கி பின்னர் கழித்தால், நமக்கு கிடைப்பது

$$x = \cos \theta$$

இதேபோல், நமக்கு கிடைப்பது

$$y = \sin \theta$$

(3) மற்றும் (4) லிருந்து θ-வை அகற்ற, நமக்கு தேவையான சூழ்வு $x^2 + y^2 = 1$ என கிடைக்கின்றது

எடுத்துக்காட்டு 1.22 : அலர்வரையை செங்கோட்டின் சூழ்வு என்பதை கருத்தில் கொண்டு,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ - ன் அலர்வரையை காண்க.}$$

தீர்வு : நீங்களே முயற்சி செய்யுங்கள்

பயிற்சி 1.2

1. $y = \tan x$ என்ற வளைவரையின் வளைவு ஆரம் மற்றும் வளைவு மையத்தை $x = \pi/4$ என்ற புள்ளியில் காண்க.
2. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற அதிபரவளையத்தின் வளைவு மையத்தை காண்க. மேலும் இதன் அலர்வரையை பெறுக.
3. $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$ என்ற வட்டப்புள்ளியுருவின் அலர்வரையானது மற்றொரு வட்டப்புள்ளியுரு என நிறுவுக
4. $x = a(\cos \theta + \theta \sin \theta)$, $y = a(\sin \theta - \theta \cos \theta)$ என்ற வளைவரையின் அலர்வரையானது $x^2 + y^2 = a^2$ என நிறுவுக

5. $x \sin \theta - y \cos \theta$ என்ற வளைவரையின் சூழ்வை தீர்மானி. இங்கு θ என்பது துணைஅலகு.
6. $x \sec^2 \theta + y \operatorname{cosec}^2 \theta = a$ என்ற வளைவரையின் சூழ்வை காண்க. இங்கு θ என்பது துணைஅலகு.
7. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ என்ற நேர்கோட்டு குடும்பத்தின் சூழ்வை காண்க. இங்கு a மற்றும் b என்ற துணைஅலகுகள், $a^2 b^3 = c^5$ என்ற தொடர்பால் இணைக்கப்பட்டுள்ளது.
8. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள்வட்டத்தின் மேல் மையங்களையும் மற்றும் இதன் மையத்தின் வழியாகவும் செல்லும் வட்ட குடும்பத்தின் சூழ்வை காண்க.
9. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள்வட்ட குடும்பத்தின் சூழ்வின் சமன்பாட்டை தீர்மானி. இங்கு a மற்றும் b என்ற துணைஅலகுகள், $\frac{a^2}{l^2} + \frac{b^2}{m^2} = 1$ என்ற தொடர்பால் இணைக்கப்பட்டுள்ளது, l மற்றும் m ஆகியவை பூச்சியமில்லா மாறிலிகள்.

விடைகள்

1. $\frac{5\sqrt{5}}{4}, \left(\frac{\pi - 10}{4}, \frac{9}{4} \right)$
2. குறிப்பு: $x = a \sec \theta$, $y = b \tan \theta$, வளைவு மையம்
 $\left(\frac{a^2 + b^2}{a \cos^3 \theta}, \frac{-\sin^3 \theta (a^2 + b^2)}{\cos^3 \theta} \right) (a x)^{2/3} - (b y)^{2/3} = (a^2 + b^2)^{2/3}$
5. $x = a(\sin \theta + \cos \theta)$, $y = a(\sin \theta - \cos \theta)$
7. $x^2 y^3 = \frac{712}{3125} c^5$ 8. $(x^2 + y^2)^2 = 4(a^2 x^2 + b^2 y^2)$ 9. $\frac{x}{l} + \frac{y}{m} = 1$

சுவாரஸ்யமான உண்மை

குரங்குகள் விளையாடும் கருவி போன்ற முறுக்கு மீசையைக் கொண்டிருக்கும் இயந்திரங்கள் அல்லது பொம்மைகளை நீங்கள் எப்போதாவது கவனித்தீர்களா? உள்ளே உள்ள சுருள்வில் வட்டமான உட்கருளின் அசைவை மேற்கொள்கிறது.



Curvature and
Evolute

இணையச் செயல்பாடுகள்

<http://kmr.csc.kth.se/wp/research/math-rehab/learning-object-repository/geometry-2/metric-geometry/euclidean-geometry/geometry/plane-curves/evolutes/>

அன்றாட வாழ்வில் பயன்பாடுகள் :

- ♦ அவை இயந்திரத் தொழில்களில் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. குறிப்பாக சுழலும் இயந்திரங்கள் மற்றும் பற்சக்கரங்கள் தயாரிக்கப்படும் தொழிற்சாலைகளில், முடிந்தவரை அதிர்வுகளைக் குறைக்க பயன்படுத்தப்படுகின்றன.
- ♦ உருட்டு மற்றும் எரிவாயு அழுக்கிகள் ஆகிய இரண்டு வகையான இயந்திரங்கள் திரவங்களை வெளிக்கொணரவும், அழுக்கவும் அல்லது அழுத்தவும் பயன்படுகின்றன. இது அவை திறமையானவை மற்றும் குறைவான சத்தமாக இருப்பதை உறுதி செய்கிறது.
- ♦ சாலை வளைவுகளை வடிவமைக்கும்போது சாலை பாதுகாப்பை மனதில் கொள்ள வேண்டும். அதேபோல் அரைக்கும் சக்கரத்தின் அளவையும் கருத்தில் கொள்ள வேண்டும். அந்த நேரத்தில் வளைவு பற்றிய கருது நடைமுறைக்கு வருகிறது.

1.2 வரையறுத்த மற்றும் முறையற்ற தொகையீடுகளின் மதிப்பீடு**1.2.1 வரையறுத்ததொகையீடு**

ஒரு வரையறுத்த தொகையீடு $\int_a^b f(x)$ ஆல் குறிக்கப்படுகிறது, இங்கு 'a' என்பது வகையீட்டின் கீழ் எல்லை என்றும் 'b' என்பது வகையீட்டின் மேல் எல்லை என்றும் அழைக்கப்படுகிறது. வரையறுத்த தொகையீடு கூட்டலின் எல்லையாக அறிமுகப்படுத்தப்படுகிறது. அல்லது $[a, b]$ என்ற இடைவெளியில் F எனும் எதிர் வகையீட்டை கொண்டுத்திருந்தால் பின்னர் தொகையீட்டின் மதிப்பு முனைப் புள்ளிகளில் F-ன் மதிப்பின் வேறுபாட்டிற்கு சமம். அதாவது $F(b) - F(a)$. வரையறுத்த தொகையீடு ஒரு தனித்துவமான மதிப்பைக் கொண்டுள்ளது.

1.2.1.1 வரையறுத்த தொகையீடு கூடுதலின் எல்லைக்கு ஒப்பானது:

$[a, b]$ என்ற மூடிய இடைவெளியில் f என்பது தொடர்ச்சியான சார்பாக இருக்கட்டும். சார்பின் அனைத்து மதிப்புகளும் குறையற்ற எண் என அனுமானம் கொள்க. அப்போது தான் f-ன் வரைபடம் x-அச்சுக்கு மேற்புறத்தில் வளைவரையாகக் கிடைக்கும்.

வரையறுத்த தொகையீடு $\int_a^b f(x)$ ஆனது $x = a$, $x = b$ என்ற கோடுகள், x-அச்ச மற்றும் $y = f(x)$, என்ற வளைவரை ஆகியவற்றால் அடைபடும் பரப்பாகும்.

இந்த பரப்பை நம் மதிப்பிடும் போது,

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} [f(a) + f(a+h) + \dots + f(a+(n-1)h)]$$

இங்கு $h = \frac{b-a}{n} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, என இருக்கும் போது.

மேற்கண்ட கோவை, வரையறுத்த தொகையீட்டை கூட்டலின் எல்லையாக பரிச்சயம் செய்கிறது.

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1.23 : கூட்டலின் எல்லையாக $\int_0^2 (x^2+1)dx$ -ன் மதிப்பை காண்க.

தீர்வு : வரையறையின்படி,

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} [f(a) + f(a+h) + \dots + f(a+(n-1)h)]$$

இங்கு

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$\begin{aligned} \text{ஆகையால், } \int_0^2 (x^2+1)dx &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[f(0) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{4}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{2(n-1)}{n}\right) \right] \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[1 + f\left(\frac{2^2}{n^2} + 1\right) + f\left(\frac{4^2}{n^2} + 1\right) + \dots + f\left(\frac{(2n-2)^2}{n^2} + 1\right) \right] \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\underbrace{(1+1+\dots+1)}_{n \text{ times}} + \frac{1}{n^2} (2^2 + 4^2 + \dots + (2n-2)^2) \right] \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[n + \frac{2^2}{n^2} (1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2) \right] \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[n + \frac{4}{n^2} \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \right] \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[n + \frac{2}{3} \frac{(n-1)(2n-1)}{6} \right] \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[1 + \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right) \right] \\ &= 2 \left[1 + \frac{2}{3} (1)(2) \right] = 2 \left[1 + \frac{4}{3} \right] = \frac{14}{3} \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 1.24 : கூட்டலின் எல்லையாக $\int_0^2 e^x dx$ -ஐ மதிப்பிடுக

தீர்வு : வரையறையின்படி,

$$\int_0^2 e^x dx = (2-0) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[e^0 + e^{2/n} + e^{4/n} + \dots + e^{(2n-2)/n} \right]$$

$a = 1$, $r = e^{2/n}$ எனக் கொண்டு பெருக்கு தொடரின்(G.P) முதல் n -உறுப்புகளின் கூட்டலை பயன்படுத்த, நாம் பெறுவது,

$$\begin{aligned} \int_0^2 e^x dx &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\frac{e^{\frac{2n}{n}} - 1}{e^{\frac{2}{n}} - 1} \right] \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\frac{e^2 - 1}{e^{\frac{2}{n}} - 1} \right] \\ &= \frac{2(e^2 - 1)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{2/n} - 1}{2/n} \right)} = e^2 - 1 \quad \left[\because \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^h - 1}{h} = 1 \right] \end{aligned}$$

நுண்கணித அடிப்படை தேற்றம்

1.2.2 முதல் நுண்கணித அடிப்படை தேற்றம்

$f(x)$ என்ற சார்பு $[a, b]$ இடைவெளியில் வரையறுக்கப்பட்டால், பின்னர் வரையறுத்த தொகையீடானது பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

இங்கு $\frac{dy}{dx} F(x) = f(x)$

வரையறுக்கப்பட்ட மேற்கண்ட, வரையறுத்த தொகையீடு ஆனது $x = a$, $x = b$ என்ற கோடுகள், x-அச்ச மற்றும் $y = f(x)$, என்ற வளைவரை ஆகியவற்றால் அடைபடும் பரப்பைக் குறிக்கும்.

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1.25 : மதிப்பிடுக. $\int_0^2 x^2 dx$

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டது, $\int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \left[\frac{(2)^3}{3} - 0 \right]$
 $= \frac{8}{3}$

எடுத்துக்காட்டு 1.26 : மதிப்பிடுக. $\int_0^{2\pi} \cos x dx$

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டது, $\int_0^{2\pi} \cos x dx = [-\sin x]_0^{2\pi}$
 $= [-\sin 2\pi + \sin 0] = [-0 + 0] = 0$

எடுத்துக்காட்டு 1.27 : மதிப்பிடுக. $\int_2^3 (x+1) dx$

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டது, $\int_2^3 (x+1) dx = \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_2^3$
 $= \left[\left(\frac{3^2}{2} + 3 \right) - \left(\frac{2^2}{2} + 2 \right) \right]$
 $= \left[\left(\frac{9}{2} + 3 \right) - \left(\frac{4}{2} + 2 \right) \right]$
 $= \left[\left(\frac{9+6}{2} \right) - \left(\frac{4+4}{2} \right) \right]$
 $= \left[\frac{15}{2} - \frac{8}{2} \right] = \frac{7}{2}$

1.2.3 இரண்டாம் நுண்கணித அடிப்படை தேற்றம்

$[a, b]$ இடைவெளியில் $f(x)$ என்பது தொடர்ச்சியான சார்பாகவும் மற்றும் F என்பது $f(x)$ ன் வரையறாத தொகையீடாகவும் இருக்குமானால், பின்னர் இரண்டாம் நுண்கணித அடிப்படை தேற்றம் பின்வருமாறு கூறுகிறது,

$$F'(x) = f(x)$$

கணித ரீதியாக, $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, என இருக்குமானால்,

பின்னர்
$$F'(x) = f(x)$$

குறிப்புரை : வகையீடு மற்றும் எதிர் வகையீடு ஒன்றுக்கொன்று நேர்மாறாக இருப்பதால், சார்பின் எதிர் வகையீட்டை வருவிக்கும்போது, தொடக்கத்தில் இருந்த சார்பை நம்மால் பெற முடியும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.28 : இரண்டாம் நுண்கணித அடிப்படை தேற்றத்தை பயன்படுத்தி கொடுக்கப்பட்டுள்ளதை தீர்க்க.

$$F(x) = \int_0^{x^3} (t^2 + t) dt$$

தீர்வு: கொடுக்கப்பட்டது, $F(x) = \int_0^{x^3} (t^2 + t) dt$

$$= \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} \right]_0^{x^3} = F(x^3) - F(0)$$

$$F(x) = \left(\frac{(x^3)^3}{3} - \frac{(x^3)^2}{2} \right) - \left(\frac{(0)^3}{3} - \frac{(0)^2}{2} \right)$$

$$F(x) = \frac{x^9}{3} - \frac{x^6}{2}$$

$$F(x) = 3x^8 - 3x^5$$

$$F'(x) = 3x^2((x^3)^2 + (x^3))$$

மேல் எல்லை x^3 -ன் வகையீடு $3x^2$ மற்றும் $(t^2 + t)$ -ஐ போலவே $((x^3)^2 + (x^3))$ -ம் இருக்கிறது.

இந்த சமன்பாட்டின் முடிவில், $F(x)$ -ன் வகையீடு அதாவது $f(x)$ -ன் தொகையீடு, தொடக்கத்தில் இருந்த சார்பு $f(x)$ க்கு, சமமாக இருப்பதை காண முடியும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.29 : கொடுக்கப்பட்டுள்ள $F(x) = \int_0^{x^2} (t+7)^{1/2} dt$ -ஐ இரண்டாம் நுண்கணித அடிப்படை தேற்றத்தை பயன்படுத்தி தீர்க்க.

தீர்வு: கொடுக்கப்பட்டது, $F(x) = \int_0^{x^2} (t+7)^{1/2} dt$

$$= \left[\frac{2(t+7)^{3/2}}{3} \right]_0^{x^2}$$

$$= F(x) - F(0)$$

$$F(x) = \left(\frac{2(x^2+7)^{3/2}}{3} \right) - \left(\frac{2(0+7)^{3/2}}{3} \right)$$

$$F(x) = \frac{2(x^2 + 7)^{3/2}}{3} - \frac{2(7)^{3/2}}{3}$$

$$F'(x) = 2x(x^2 + 7)^{1/2}$$

மேல் எல்லை x^2 -ன் வகையீடு $2x$ மற்றும் $(t + 7)^{1/2}$ -ஐ போலவே $(x^2 + 7)^{1/2}$ -ம் இருக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 1.30 : கொடுக்கப்பட்டுள்ள $F(x) = \int_{-3}^{\sqrt{x}} (3t^2 - 30) dt$ -ஐ இரண்டாம் நுண்கணித அடிப்படை தேற்றத்தை பயன்படுத்தி தீர்க்க.

$$\begin{aligned} \text{தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டது, } F(x) &= \int_{-3}^{\sqrt{x}} (3t^2 - 30) dt \\ &= [t^3 - 30t]_{-3}^{\sqrt{x}} = F(\sqrt{x}) - F(-3) \\ F(x) &= [(\sqrt{x})^3 - 30(\sqrt{x})] - [(-3)^3 - 30(-3)] \\ F'(x) &= \frac{3}{2} x^{1/2} - \frac{15}{x^{1/2}} \\ F'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} (3x - 30) \end{aligned}$$

மேல் $\sqrt{x}$ எல்லை $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ -ன் வகையீடு மற்றும் $(3t^2 - 30)$ -ஐ போலவே $(3x - 30)$ -ம் இருக்கிறது.

1.2.4 வரையறுத்த தொகையிடலின் பண்புகள்

இங்கு கொடுக்கப்பட்டுள்ள வரையறுத்த தொகையீட்டின் சில பண்புகள், அத்தொகையீட்டை மதிப்பிட பயன்படுகிறது.

1. $[a, b]$, எனும் மூடிய வரம்புக்குட்பட்ட இடைவெளியில் $f_1(x)$ மற்றும் $f_2(x)$ ஆகியவை தொடர்ச்சியான சார்புகள் மற்றும் k_1, k_2 ஆகியவை இரு மாறிலிகள் என்க. பின்னர்

$$\int_a^b [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)] dx = k_1 \int_a^b f_1(x) dx + k_2 \int_a^b f_2(x) dx$$

இது நேரியல் பண்பு என்று அழைக்கப்படுகிறது.

2. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$ இருபுறமும் $F(b) - F(a)$ க்கு சமம். இது வகையீட்டில் உள்ள மாறிகள் போலியானவை என்பதைக் குறிக்கிறது.

$$3. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

இங்கே $F(b) - F(a) = -[F(a) - F(b)]$

$$4. \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

இங்கே, ' c ' என்பது, $a < c < b$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

R.H.S ஆனது $F(c) - F(a) + F(b) - F(c)$ க்கு சமம். மேலும் இது $F(b) - F(a)$ -க்கு சமமாகிறது

$$5. \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$$

இது மாறா பண்பு என்று அறியப்படுகிறது. $a - x = t$ என இடும்போது நம் பெறுவது $-dx = dt$. இது இப் பண்பை நிரூபிக்க பயன்படுகிறது.

$$\int_0^a f(a-x) dx = -\int_a^0 f(t) dt = \int_0^a f(t) dt \quad [\text{பண்பு (3) மூலம்}]$$

$$= \int_0^a f(x) dx \quad [\text{பண்பு (2) மூலம்}]$$

6. $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$, $f(x)$ ஒற்றை சார்பாக இருக்கும் போது, அதாவது $f(-x) = f(x)$
 $= 0$ $f(x)$ இரட்டைச் சார்பாக இருக்கும்போது, அதாவது $f(-x) = -f(x)$

நிரூபணம் : $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$

வலது பக்கம் உள்ள முதல் வகையீட்டில் $x = -t$ என பிரதியிட, நாம் பெறுவது

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = -\int_a^0 f(-t) dt = \int_0^a f(t) dt \quad [\text{பண்பு (3) மூலம்}]$$

$$= \int_0^a f(-x) dx \quad [\text{பண்பு (2) மூலம்}]$$

இதை (1) ல் பிரதியிட நாம் பெறுவது

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_0^a f(-x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx \\ &= \begin{cases} 2 \int_0^a f(x) dx, & f(-x) = f(x) \text{ எனில்} \\ 0, & f(-x) = -f(x) \end{cases} \end{aligned}$$

x^4 , $\cos x$ போன்ற சார்புகளில் $f(-x) = f(x)$, ஆதலால் இவை இரட்டை சார்புகள்

x^3 , $\sin x$ போன்ற சார்புகளில் $f(-x) = -f(x)$, ஆதலால் இவை ஒற்றை சார்புகள்

7. $\int_0^{2a} f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_a^{2a} f(x) dx$, $f(2a-x) = f(x)$ எனில்
 $= 0$, $f(2a-x) = -f(x)$ எனில்

பண்பு (6) யை நிரூபித்தது போலவே பண்பு (7) யும் நிரூபிக்கலாம்.

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1.31 : மதிப்பிடுக. $\int_0^{\pi/2} \log \sin x dx$

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டது, $I = \int_0^{\pi/2} \log \sin x dx$

[பண்பு (5) மூலம்]

(1) மற்றும் (2) யை கூட்ட, நமக்கு கிடைப்பது

$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^{\pi/2} (\log \sin x + \log \cos x) dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \{\log (2 \sin x \cos x) - \log 2\} dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \log \sin 2x dx - \frac{1}{2} \pi \log 2 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \log \sin u \, du - \frac{1}{2} \pi \log 2, \text{ இங்கு } x = \frac{u}{2}$$

$$= \int_0^{\pi} \log \sin u \, du - \frac{1}{2} \pi \log 2$$

[பண்பு (7) மூலம்]

$$2I = I - \frac{1}{2} \pi \log 2$$

எனவே

$$I = -\frac{1}{2} \pi \log 2$$

∴

$$= \int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dx - \frac{1}{2} \pi \log 2$$

எடுத்துக்காட்டு 1.32 : மதிப்பிடுக. $\int_0^{\pi} \frac{x \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx$

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டது, $I = \int_0^{\pi} \frac{x \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx$

$$= \int_0^{\pi} \frac{(\pi-x) \tan(\pi-x)}{\sec(\pi-x) + \tan(\pi-x)} \, dx$$

[பண்பு (5) மூலம்]

$$= \int_0^{\pi} \frac{-(\pi-x) \tan x}{-\sec x + \tan x} \, dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{\tan x}{\sec x + \tan x} \, dx - 1$$

∴

$$2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{\tan x}{\sec x + \tan x} \, dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{\tan x (\sec x + \tan x)}{\sec^2 x + \tan^2 x} \, dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{\sec x \tan x - \tan^2 x}{1} \, dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi} (\sec x \tan x - \sec^2 x + 1) \, dx$$

$$= \pi [\sec x - \tan x + x]_0^{\pi} = \pi(\pi - 2)$$

அல்லது

$$I = \frac{\pi}{2} (\pi - 2)$$

∴

$$\int_0^{\pi} \frac{x \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx = \frac{\pi}{2} (\pi - 2)$$

எடுத்துக்காட்டு 1.33 : மதிப்பிடுக. $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டது, $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$

எனவே, $I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x) \sin x}{1 + \cos^2 (\pi - x)} dx \quad [\because \sin(\pi - x) = \sin x, \cos(\pi - x) = -\cos x]$

[பண்பு (5) மூலம்]

மேலே உள்ள இரண்டையும் கூட்ட, நமக்கு கிடைப்பது

$$2I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x + x) \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

$$= -\pi [\tan^{-1}(\cos x)]_0^{\pi}$$

$$= -\pi \left(-\frac{1}{4}\pi - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$2I = \frac{2\pi^2}{4}$$

$$I = \frac{\pi^2}{4}$$

எனவே, $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi^2}{4}$

எடுத்துக்காட்டு 1.34 : எனக் காட்டுக. $\int_0^{\pi/2} \cos^3 2x \sin^4 4x dx = 0$

தீர்வு : $I = \int_0^{\pi/2} \cos^3 2x \sin^4 4x dx$ என்க

$2x = t$ என பிரதியிட,

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos^3 t \cdot \sin^4 2t dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} 2^4 \cdot \cos^3 t \cdot \sin^4 t dt$$

$$= 8 \int_0^{\pi} \sin^4 t \cdot \cos^7 t dt = 0$$

[பண்பு (7) மூலம்]

எடுத்துக்காட்டு 1.35 : மதிப்பிடுக. $\int_0^1 \cot^{-1}(1-x+x^2) dx$

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட வகையீடை பின்வருமாறு எழுதலாம்

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \tan^{-1} \left(\frac{1}{1-x+x^2} \right) dx \\ &= \int_0^1 \tan^{-1} \left(\frac{1}{1+x(x-1)} \right) dx \\ &= \int_0^1 \tan^{-1} \left[\frac{x-(x-1)}{1+x(x-1)} \right] dx \\ &= \int_0^1 [\tan^{-1} x - \tan^{-1}(x-1)] dx \\ &= \int_0^1 \tan^{-1} x dx - \int_0^1 \tan^{-1}(x-1) dx \end{aligned}$$

ஆனால் $\int_0^1 \tan^{-1}(x-1) dx = \int_0^1 \tan^{-1}(1-x-1) dx = \int_0^1 \tan^{-1} x dx$

$\therefore I = 2 \int_0^1 \tan^{-1} x dx$

‘1’ யை இரண்டாம் சார்பாக கருதி, பகுதி தொகையிடல் முறையில் தொகையிட, நாம் பெறுவது

$$I = 2 [\tan^{-1} x \cdot x]_0^1 - 2 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}$$

$$I = 2.1. \frac{\pi}{4} - [\log(1+x^2)]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{2} - \log 2$$

$\therefore \int_0^1 \cot^{-1}(1-x+x^2) dx = \frac{\pi}{2} - \log 2$

பயிற்சி 1.3

1. கொடுக்கப்பட்டுள்ள வரையறுத்த தொகையீடுகளை கூட்டலின் எல்லையாக கருதி மதிப்பிடுக

i. $\int_a^b x dx$ ii. $\int_0^5 (x+1) dx$ iii. $\int_2^3 x^2 dx$
iv. $\int_1^4 (x^2 - x) dx$ v. $\int_{-1}^1 e^x dx$

2. வரையறுத்த தொகையீடுகளை மதிப்பிடுக

i. $\int_{-1}^1 (x+1) dx$ ii. $\int_1^2 (4x^3 - 5x^2 + 6x + 9) dx$

- iii. $\int_0^{\pi/2} \cos 2x \, dx$ iv. $\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx$
v. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ vi. $\int_2^3 \frac{dx}{x^2-1}$
vii. $\int_2^3 \frac{x}{x^2+1} \, dx$ viii. $\int_0^1 x e^{x^2} \, dx$
ix. $\int_0^{\pi/4} (2 \sec^2 x + x^3 + 2) \, dx$ x. $\int_0^1 \left(x e^x + \sin \frac{\pi x}{4} \right) \, dx$
3. மதிப்பிடுக $\int_0^{\pi} \log(1 + \cos x) \, dx$ 4. மதிப்பிடுக $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2} \, dx$
5. மதிப்பிடுக $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x} \, dx$ 6. $\int_0^{\pi} x f(\sin x) \, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) \, dx$ எனக் காட்டுக.
7. மதிப்பிடுக $\int_0^{\pi} \sin^6 x \cos^7 x \, dx$

விடைகள் 1.3

1. i. $\frac{a}{\sqrt{2}}$ ii. $\frac{35}{2}$ iii. $\frac{19}{3}$ iv. $\frac{27}{2}$ v. $e - \frac{1}{e}$
2. i. 2 ii. $\frac{64}{3}$ iii. 0 iv. $\frac{1}{2} \log 2$ v. $\frac{\pi}{2}$
vi. $\frac{1}{2} \log \left(\frac{3}{2} \right)$ vii. $\frac{1}{2} \log 2$ viii. $\frac{1}{2} \log(e-1)$ ix. $\frac{\pi^4}{1024} + \frac{\pi}{2} + 2$ x. $1 + \frac{4}{\pi} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$
3. $-\pi \log 2$
4. $\frac{\pi}{8} \log 2$
5. $\frac{1}{\sqrt{2}} \log(1 + \sqrt{2})$
7. 0

1.2.5 முறையற்ற தொகையீடு

தொகையீடு $\int_a^b f(x) \, dx$, பின்வரும் நிபந்தனைகளுடன் முறையற்ற தொகையீடு என அழைக்கப்படுகிறது

- தொகையிடுதலின் இடைவெளி $[a, b]$ முடிவுறு எண்ணாக இருக்காது அல்லது 'a' மற்றும் 'b' இரண்டும் முடிவுறு எண்ணாக இருக்காது.
- அல்லது தொகைச்சார்பு $f(x)$, $[a, b]$ என்ற இடைவெளியில் வரம்புக்கு உட்பட்டு இருக்காது.
- இடைவெளி $[a, b]$ முடிவுறு எண்ணாக இருக்காது மற்றும் தொகையுரு $f(x)$ ம் வரம்புக்கு உட்பட்டு இருக்காது

1.2.6 முறையற்ற தொகையீடு வகைகள்

முறையற்ற தொகையீடு மூன்று வகையாகும், அவை பின்வருமாறு விளக்கப்பட்டுள்ளன:

a. முறையற்ற தொகையீடுதலின் முதல் வகை

'a' அல்லது 'b' அல்லது இரண்டும் முடிவிலா எண்ணாகவும், ஆனால் $f(x)$ வரம்புக்கு உட்பட்டும் இருக்குமேயானால், வரையறுத்த தொகையீடு $\int_a^b f(x) dx$ முறையற்ற தொகையீடுதலின் முதல் வகை ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$, $\int_{-\infty}^0 e^{2x} dx$, ஆகியவை முறையற்ற தொகையீடுதலின் முதல் வகை இந்நிலையில்

$$i. \int_a^\infty f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f(x) dx, (t > a) \quad \text{என வரையறுக்கலாம்.}$$

வலது பக்கத்தின் எல்லை முடிவறு எண்ணாக இருக்கும்போது, முறையற்ற தொகையீடு $\int_a^\infty f(x) dx$ ஒருங்கும் மற்றும் எல்லை $+\infty$ அல்லது $-\infty$ ஆக இருக்கும்போது விலகும்.

$$ii. \int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx, (t < b)$$

வலது பக்கத்தின் எல்லை முடிவறு எண்ணாக இருக்கும்போது, முறையற்ற தொகையீடு $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ ஒருங்கும் மற்றும் எல்லை $+\infty$ அல்லது $-\infty$ ஆக இருக்கும்போது விலகும்.

$$iii. \int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^\infty f(x) dx \\ = \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} \int_{t_1}^c f(x) dx + \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \int_c^{t_2} f(x) dx \quad [t_1 < c < t_2]$$

வலது பக்கத்தின் எல்லை முடிவறு எண்ணாக இருக்கும்போது, முறையற்ற தொகையீடு $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$ ஒருங்கும் மற்றும் எல்லை $+\infty$ அல்லது $-\infty$ ஆக இருக்கும்போது விலகும்.

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1.36 : $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$ என்ற முறையற்ற தொகையீட்டின் ஒருங்குதலை ஆராய்க.

$$\begin{aligned} \text{தீர்வு : இங்கு } \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{dx}{\sqrt{x}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t x^{-1/2} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} [2\sqrt{x}]_1^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} [2\sqrt{t} - 2] = \infty \end{aligned}$$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட முறையற்ற தொகையீடு விலகும் தன்மை உடையது.

எடுத்துக்காட்டு 1.37 : $\int_{-\infty}^0 e^{-x} dx$ என்ற முறையற்ற தொகையீட்டை தீர்க்க.

$$\begin{aligned} \text{தீர்வு : இங்கு } \int_{-\infty}^0 e^{-x} dx &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 e^{-x} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \left[\frac{e^{-x}}{-1} \right]_t^0 \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} [-(1 - e^{-t})] \\ &= -1 + e^{\infty} = \infty \end{aligned}$$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட முறையற்ற தொகையீடு விலகும் தன்மை உடையது.

எடுத்துக்காட்டு 1.38 : $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ என்ற முறையற்ற தொகையீட்டின் ஒருங்குதலை பரிசோதிக்க.

$$\begin{aligned} \text{தீர்வு : இங்கு } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} \int_{t_1}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \int_0^{t_2} \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} [\tan^{-1} x]_{t_1}^0 + \lim_{t_2 \rightarrow \infty} [\tan^{-1} x]_0^{t_2} \\ &= \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} [\tan^{-1} 0 - \tan^{-1} t_1] + \lim_{t_2 \rightarrow \infty} [\tan^{-1} t_2 - \tan^{-1} 0] \\ &= -[\tan^{-1}(-\infty)] + [\tan^{-1}(\infty)] = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \end{aligned}$$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட முறையற்ற தொகையீடு ஒருங்கும் தன்மை உடையது .

b. முறையற்ற தொகையிடுதலின் இரண்டாம் வகை

'a' மற்றும் 'b' இரண்டும் முடிவுறு எண்ணாகவும் மற்றும் $f(x)$ வரம்புக்கு உட்படாமலும் இருக்குமேயானால், வரையறுத்த தொகையீடு $\int_a^b f(x) dx$ முறையற்ற தொகையிடுதலின் இரண்டாம் வகை ஆகும். இங்கு $f(x)$ ஒன்று அல்லது மேற்பட்ட முடிவிலா தொடர்ச்சியற்ற புள்ளிகளை பெற்று இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டாக : $\int_0^1 \frac{dx}{x}$, $\int_1^4 \frac{dx}{(x-1)(x-4)}$ ஆகியவை முறையற்ற தொகையிடுதலின் இரண்டாம் வகை இந்நிலையில்,

i. 'a' என்பது $f(x)$ ன் ஒரே ஒரு முடிவிலா தொடர்ச்சியற்ற புள்ளியாக இருக்குமெனில்,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx$$

வலப்பக்க எல்லை முடிவுறு எண்ணாக இருப்பின் இது ஒருங்கும், இல்லையெனில் விலகும்.

ii. 'b' என்பது $f(x)$ ன் ஒரே ஒரு முடிவிலா தொடர்ச்சியற்ற புள்ளியாக இருக்குமெனில்,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x) dx$$

வலப்பக்க எல்லை முடிவறு எண்ணாக இருப்பின் இது ஒருங்கும், இல்லையெனில் விலகும்.

iii. 'c', ($a < c < b$) எனும் சில புள்ளிகளில் $f(x)$ முடிவிலா மதிப்பாகுமானால், பின்னர்

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\epsilon_1} f(x) dx + \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0^+} \int_{c+\epsilon_2}^b f(x) dx$$

[a, b] என்ற இடைவெளியில் $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ ஆகியவை $f(x)$ ன் சில முடிவறு எண்ணிக்கையிலான முடிவிலாதொடர்ச்சியற்ற புள்ளிகளாக இருக்குமெனில், பின்னர்

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{c_1} f(x) dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx + \dots + \int_{c_n}^b f(x) dx$$

இங்கு, $a < c_1 < c_2 < c_3 < \dots < c_{n-1} < c_n < b$

வலப்பக்க எல்லை முடிவறு எண்ணாக இருப்பின் முறையற்ற தொகையீடு ஒருங்கும், இல்லையெனில் விலகும்.

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1.39 : $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ என்ற தொகையீட்டின் ஒருங்குதலை ஆராய்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட தொகையீடு இரண்டாவது வகை ஆகும். '0' என்பது [0, 1] என்ற இடைவெளியில் முடிவிலா தொடர்ச்சியற்ற புள்ளியாகும்.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{0+\epsilon}^1 x^{-1/2} dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [2\sqrt{x}]_{\epsilon}^1 \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} 2(1 - \sqrt{\epsilon}) = 2(1 - 0) = 2 \end{aligned}$$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட முறையற்ற தொகையீடு ஒருங்கும். ஒருங்கும் மதிப்பு 2 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.40 : $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$ என்ற தொகையீட்டின் ஒருங்குதலை ஆராய்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட தொகையீடு இரண்டாவது வகை ஆகும். $x = 1$, என்பது $f(x)$ -ன் முடிவிலா தொடர்ச்சியற்ற புள்ளியாகும். எனவே வரையரையின்படி

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(1-x)(2-x)} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x} \right] \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[-\log(1-x) + \log(2-x) \right]_0^{1-\varepsilon} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [-\log \varepsilon + \log(1+\varepsilon) - \log 2] \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\log \left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \right) - \log 2 \right] \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\log \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) - \log 2 \right] \\
 &= \log(1 + \infty) - \log 2 = \infty
 \end{aligned}$$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட முறையற்ற தொகையீடு விலகும் தன்மை உடையது.

எடுத்துக்காட்டு 1.41 : $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ என்ற தொகையீட்டின் ஒருங்குதலை ஆராய்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட தொகையீடு இரண்டாவது வகை ஆகும். '0' என்பது $[-1, 1]$ என்ற இடைவெளியில் முடிவிலா தொடர்ச்சியற்ற புள்ளியாகும். எனவே வரையரையின்படி,

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} &= \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2} \\
 &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_{-1}^{0-\varepsilon_1} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0^+} \int_{0+\varepsilon_2}^1 \frac{dx}{x^2} \\
 &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0^+} \left[\frac{x^{-2+1}}{-1} \right]_{-1}^{-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0^+} \left[\frac{x^{-2+1}}{-1} \right]_{\varepsilon_2}^1 \\
 &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0^+} [-x^{-1}]_{-1}^{-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0^+} [-x^{-1}]_{\varepsilon_2}^1 \\
 &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{\varepsilon_1} - 1 \right] + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0^+} \left[-1 + \frac{1}{\varepsilon_2} \right] \\
 &= \infty - 1 - 1 + \infty = \infty
 \end{aligned}$$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட முறையற்ற தொகையீடு விலகும் தன்மை உடையது.

c. முறையற்ற தொகையிடுதலின் மூன்றாம் வகை (கலப்பு வகை) :

'a' அல்லது 'b' அல்லது இரண்டும் முடிவிலா எண்ணாகவும், மற்றும் $f(x)$ வரம்புக்கு உட்படாமலும் இருக்குமேயானால், வரையறுத்த தொகையீடு $\int_a^b f(x) dx$ முறையற்ற தொகையிடுதலின் மூன்றாம் வகை ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டாக : $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1-x}$, ஆகியவை முறையற்ற தொகையிடுதலின் மூன்றாம் வகை

பயிற்சி 1.4

1. பின்வரும் முறையற்ற தொகையீடுகளின் ஒருங்குதலை பரிசோதிக்க. ஒருங்கும் எனில் அவற்றின் மதிப்புக்களை காண்க.

i. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \log x}$

ii. $\int_a^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$

iii. $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{p^2 + q^2 x^2}$

iv. $\int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}}$

v. $\int_1^{\infty} \frac{\tan^{-1} x}{x^2} dx$

2. பின்வரும் முறையற்ற தொகையீடுகளின் ஒருங்குதலை பரிசோதிக்க. ஒருங்கும் எனில் மேலும் அவற்றின் மதிப்புக்களை காண்க.

i. $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$

ii. $\int_1^2 \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}}$

iii. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin x}} dx$

iv. $\int_0^4 \frac{dx}{x(4-x)}$

v. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin x}$

vi. $\int_0^1 \log x dx$

விடைகள் 1.4

1. i. விலகும் ii. விலகும் iii. ஒருங்கும்; $\frac{\pi}{2pq}$
 iv. ஒருங்கும்; $\frac{\pi}{4}$ v. ஒருங்கும்; $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \log 2$
2. i. ஒருங்கும்; $\frac{8}{3}$ ii. ஒருங்கும்; $\frac{8}{3}$ iii. ஒருங்கும்; 2
 iv. விலகும். v. விலகும். vi. ஒருங்கும்; -1

1.2.7 $\int_a^b f(x) dx$ ஐ, $x = a$ இல் ஒருங்குதலுக்கான ஒப்பீட்டுச் சோதனைகள்

1.2.7.1 ஒப்பீட்டுச் சோதனை - I

கூற்று : f மற்றும் g இரண்டு நேர்மறையான சார்புகளாக இருந்தால், $[a, b]$ மற்றும் 'a' இல் உள்ள அனைத்து x க்கும் $f(x) \leq g(x)$, 'a' என்பது $[a, b]$ இல் எல்லையற்ற இடைநிறுத்தமாக இருப்பின்

i. $\int_a^b g \, dx$ ஒருங்குகிறது $\Rightarrow \int_a^b f \, dx$ ஒருங்குகிறது.

ii. $\int_a^b f \, dx$ விலகுகிறது $\Rightarrow \int_a^b g \, dx$ விலகுகிறது

நிரூபணம் :

$$0 < f(x) \leq g(x), \forall x \in (a, b)$$

$$\int_{a+\varepsilon}^b f \, dx \leq \int_{a+\varepsilon}^b g \, dx \text{ க்கான } 0 < \varepsilon < b-a \quad \dots(1)$$

(i) $X = a, \int_a^b g \, dx$ ல், ஒருங்குதலாக இருக்கட்டும், பிறகு M என்ற நேர்மறை எண்ணின் இருப்பின்படி $\int_{a+\varepsilon}^b g \, dx < M$, க்கான $0 < \varepsilon < b-a$... (2)

(1) மற்றும் (2) ல் இருந்து

$$\int_{a+\varepsilon}^b f \, dx < M, \text{ க்கான } 0 < \varepsilon < b-a$$

$x = a$ -ல் $\int_a^b f \, dx$ ஒருங்குகிறது.

(ii) $X = a$ -ல் $\int_a^b f \, dx$ விலகுகிறது. பின்னர் $\int_{a+\varepsilon}^b f \, dx$ ஒரு மேல்நிலை நிபந்தனை இல்லை, எனவே

(1) இலிருந்து, $\int_{a+\varepsilon}^b g \, dx$ ஒரு மேல்நிலை நிபந்தனை இல்லை.

எனவே, $x = a$ -இல் $\int_a^b g \, dx$ விலகுகிறது.

1.2.7.2 ஒப்பீட்டுச் சோதனைகள் - II

கூற்று : $[a, b]$ ல் f மற்றும் g இரண்டு நேர்மறை சார்புகளாக இருந்தால், 'a' என்ற புள்ளி $[a, b]$, இடைவெளியில் தொடர்ச்சியற்ற இடைநிறுத்தம் மட்டுமே பின்னர்

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \neq 0 \text{ பின்னர் இரண்டு தொகையீடுகளும் ஒன்றாக 'a' இல் } \int_a^b f \, dx \text{ மற்றும் } \int_a^b g \, dx$$

ஒருங்கும் அல்லது விலகும்.

நிரூபணம் :

$(a, b]$ இடைவெளியில் f மற்றும் g இரண்டு நேர்மறை சார்புகள் என்பதால், பிறகு

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0, \forall x \in (a, b] \text{ எனவே } \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \neq 0$$

ஆனால் $1 \neq 0$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது). பின்னர் $1 \geq 0$ என்பதால் $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

$\Rightarrow$ அருகிலுள்ள இடைவெளியில் (a, c) புள்ளி a ($a < c < d$) அத்தகையது

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right| < \varepsilon, \forall x \in (a, c]$$

$$\Rightarrow \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} - 1 < \varepsilon, \forall x \in (a, c]$$

$$\Rightarrow (l - \varepsilon) g(x) < f(x) < (l + \varepsilon) g(x), \forall x \in (a, c]$$

நிலை I : $\int_a^b f dx$ என்பது a என்ற புள்ளியில் ஒருங்குகிறது என கருத்தில் கொள்வோம்.

$\int_a^c f dx$ என்பது a என்ற புள்ளியில் ஒருங்குகிறது.

$$\Rightarrow (l - \varepsilon) \int_a^c g dx \text{ என்பது } a \text{ என்ற புள்ளியில் ஒருங்குகிறது.}$$

$$\Rightarrow \int_a^b g dx \text{ என்பது } a \text{ என்ற புள்ளியில் ஒருங்குகிறது.}$$

நிலை II : $\int_a^b f dx$ என்பது a என்ற புள்ளியில் விலகுகிறது என கருத்தில் கொள்வோம்.

$$\Rightarrow \int_a^c f(x) dx \text{ என்பது } a \text{ என்ற புள்ளியில் விலகுகிறது}$$

$$\Rightarrow (l + \varepsilon) \int_a^c g dx \text{ என்பது } a \text{ என்ற புள்ளியில் விலகுகிறது.}$$

$$\Rightarrow \int_a^b g dx \text{ என்பது } a \text{ என்ற புள்ளியில் விலகுகிறது.}$$

இதேபோல் $\int_a^b g dx$ ஒருங்குதலாக தாக இருந்தால் $\int_a^b f dx$ ஒருங்குகிறது எனவும் $\int_a^b g dx$ விலகுதலாக

இருந்தால் $\int_a^b f dx$ விலகுகிறது எனவும் நிரூபிக்க முடியும்.

தேற்றம் நிரூபணமானது.

1.2.8 முக்கிய தேற்றங்கள் (Important Theorems)

(i) முறையற்ற தொகையீடு $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n}, n < 1$ என்றால் மட்டுமே ஒருங்குதலாக இருக்கும்.

(ii) முறையற்ற தொகையீடு $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n}, n < 1$ என்றால் மட்டுமே ஒருங்குதலாக இருக்கும்.

நிரூபணம் :

(i) $n \leq 0$ க்கு கொடுக்கப்பட்ட தொகையீடானது $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n}$ முறையான தொகையீடாகும். எனவே

அது ஒருங்குதலாக இருக்கும். $n > 0$ எனில் தொகையீடானது முறையற்ற தொகையீடாகும், மேலும் 'a' என்பது தொடர்ச்சியற்ற இடைநிறுத்தத்தின் ஒரே புள்ளி ஆகும்.

நிலை I : $n \neq 1$ எனில்

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^n}, 0 < \varepsilon < b-a$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} \right]_{a+\varepsilon}^b \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-n} \left[\frac{1}{(b-a)^{n-1}} - \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \right] \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{(1-n)(b-a)^{n-1}}, & \text{If } n < 1 \\ \infty, & \text{if } n > 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$\therefore \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n}, 0 < n < 1$ ல் ஒருங்குகிறது $n > 1$ -ல் விலகுகிறது.

நிலை II : $n = 1$ எனில்

$$\begin{aligned}
 \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n} &= \int_a^b \frac{dx}{x-a} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{x-a} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [\log|x-a|]_{a+\varepsilon}^b \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [\log(b-a) - \log \varepsilon] \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \log \left(\frac{b-a}{\varepsilon} \right) = \infty
 \end{aligned}$$

$\therefore \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n}, n = 1$ எனில், விலகுகிறது.

எனவே $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n}, n < 1$ ல் ஒருங்குகிறது $n \geq 1$ -ல் விலகுகிறது.

(ii) $n \leq 0$ க்கு கொடுக்கப்பட்ட தொகையீடானது $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n}$ முறையான தொகையீடாகும். எனவே அது ஒருங்குதலாக இருக்கும். $n > 0$ எனில் தொகையீடானது முறையற்ற தொகையீடாகும், மேலும் 'b' என்பது தொடர்ச்சியற்ற இடைநிறுத்தத்தின் ஒரே புள்ளி ஆகும்.

நிலை I : $n \neq 1$ எனில்

$$\begin{aligned}
 \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^n} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{(b-x)^{-n+1}}{-(-n+1)} \right]_a^{b-\varepsilon} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{n-1} [(b-x)^{-n+1}]_a^{b-\varepsilon} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{n-1} [\varepsilon^{1-n} - (b-a)^{1-n}]
 \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \infty, & \text{if } n > 1 \\ \frac{1}{(1-n)(b-a)^{n-1}}, & \text{If } n < 1 \end{cases}$$

$\therefore \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n}$ $0 < n < 1$ -ல் ஒருங்குகிறது $n > 1$ ல் விலகுகிறது.

நிலை II : $n = 1$ எனில்

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n} &= \int_a^b \frac{dx}{b-x} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [-\log |b-x|]_a^{b-\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [-\log \epsilon + \log(b-a)] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \log\left(\frac{b-a}{\epsilon}\right) = \infty \end{aligned}$$

$\therefore \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n}$ $n = 1$ எனில் $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n}$ விலகுகிறது.

எனவே, $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n}$, $n < 1$ ல் ஒருங்குகிறது $n \geq 1$ -ல் விலகுகிறது.

குறிப்புரை : $\int_0^1 \frac{1}{x^n} dx$, $n < 1$ -ல் ஒருங்குகிறது $n \geq 1$ -ல் விலகுகிறது.

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1.42 : $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}(1+x^2)}$ என்ற தொகையீட்டின் ஒருங்குதலை ஆராய்க.

தீர்வு : $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}(1+x^2)}$ என எடுத்துக் கொள்வோம்.

இங்கு $f(x) = \frac{1}{x^{1/2}(1+x^2)}$ மேலும் $x = 0$, ஆனது $f(x)$ ன் தொடர்ச்சியற்ற இடைநிறுத்தத்தின்

ஒரே புள்ளி மற்றும் $f(x) > 0$, $x \in (0, 1]$

$g(x) = \frac{1}{x^{1/2}}$ என எடுத்துக் கொள்வோம்.

இப்பொழுது $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+x^2} = 1 \neq 0$ [இது வரையறுக்கப்பட்ட மற்றும் பூஜ்ஜியமற்றது]

∴ ஒப்பீட்டு சோதனையின் படி,

தொகையீடுகள் $\int_0^1 f(x) dx$ மற்றும் $\int_0^1 g(x) dx$ ஒன்றாக ஒருங்கும் அல்லது விலகும்.

ஆனால், தொகையீடு $\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}}$, $x = 0$ ல் ஒருங்கும். [∵ $n = 1/2 < 1$]

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2} (1+x^2)} \text{ என்ற தொகையீடும் ஒருங்கும்.}$$

எடுத்துக்காட்டு 1.43 : $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^{3/2}}$ என்ற தொகையீட்டின் ஒருங்குதலை விவாதி.

தீர்வு : $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^{3/2}}$ என எடுத்துக் கொள்வோம்.

இங்கு $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ மேலும் $x = 0$, ஆனது $f(x)$ ன் தொடர்ச்சியற்ற இடைநிறுத்தத்தின் ஒரே புள்ளி மற்றும் $f(x) > 0$, $x \in (0, \pi/2]$

$$g(x) = \frac{1}{x^{1/2}} \text{ என எடுத்துக் கொள்வோம்.}$$

$$\text{இப்பொழுது } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq 0 \quad [\text{இது வரையறுக்கப்பட்ட மற்றும் பூஜ்ஜியமற்றது}]$$

∴ ஒப்பீட்டு சோதனையின் படி,

தொகையீடுகள் $\int_0^{\pi/2} g(x) dx$ மற்றும் $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ ஒன்றாக ஒருங்கும் அல்லது விலகும்.

ஆனால், தொகையீடு $\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}}$, $x = 0$ ல் ஒருங்கும். [∵ $n = 1/2 < 1$]

$$\therefore \int_0^{\pi/2} f(x) dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^{3/2}} dx \text{ என்ற தொகையீடும் ஒருங்கும்.}$$

1.2.9 ∞ ல் ஒருங்குதலுக்கான ஒப்பீட்டுச் சோதனைகள்

1.2.9.1 ஒப்பீட்டுச் சோதனை I

கூற்று : f மற்றும் g இரண்டு நேர்மறையான சார்புகளாக இருந்தால், அனைத்து $x \geq a$ க்கும் $f(x) \leq g(x)$ எனில்

$$(i) \int_a^\infty g dx \text{ ஒருங்குகிறது} \Rightarrow \int_a^\infty f dx \text{ ஒருங்குகிறது.}$$

$$(ii) \int_a^\infty f dx \text{ விலகுகிறது} \Rightarrow \int_a^\infty g dx \text{ விலகுகிறது}$$

நிரூபணம் : f மற்றும் g இரண்டு நேர்மறையான சார்புகளாக இருந்தால், $f(x) \leq g(x)$, $x \in [a, t]$ எனில்

$$\therefore \int_a^t f(x) dx \leq \int_a^t g(x) dx \quad \dots(1)$$

i. $\int_a^b g(x) dx$ ஒருங்குதலாக இருக்கட்டும், பிறகு M என்ற நேர்மறை எண்ணின் இருப்பின்படி

$$\int_a^t g(x) dx < M, \forall t \geq a \quad \dots(2)$$

(1) மற்றும் (2)-ல் இருந்து

$$\int_a^t f(x) dx < M, \forall t \geq a$$

எனவே $\int_a^b f(x) dx$ ஒருங்குகிறது.

ii. $\int_a^b f(x) dx$ விலகுகிறது என எடுத்துக் கொள்வோம்.

பின்னர் $\int_a^t f(x) dx$ ஒரு மேல்நிலை நிபந்தனை இல்லை, எனவே (1) இலிருந்து $\int_a^t g(x) dx$, ஒரு மேல்நிலை நிபந்தனை இல்லை.

எனவே $\int_a^\infty g(x) dx$, விலகுகிறது.

1.2.9.2 ஒப்பீட்டுச் சோதனை II

கூற்று : $[a, \infty)$ -ல் f மற்றும் g இரண்டு நேர்மறை சார்புகளாக இருக்கும் போது $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$, என

இருந்தால் பின்னர் இரண்டு தொகையீடுகளும் $\int_a^b f(x) dx$ மற்றும் $\int_a^b g(x) dx$ ஒன்றாக ஒருங்கும் அல்லது விலகும்.

நிரூபணம் :

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0, \forall x \geq a \text{ மற்றும் } l \neq 0 \quad [f \text{ மற்றும் } g \text{ இரண்டு நேர்மறை சார்புகள்}]$$

$$\therefore l > 0$$

$l - \varepsilon > 0$ என்றவாறு $\varepsilon > 0$ எனத் தெரிவு செய்க.

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l, \text{ எனவே } k \text{ என்ற எண் உள்ளது}$$

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| < \varepsilon, \forall x \geq k$$

$$\Rightarrow \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} - l < \varepsilon, \forall x \geq k > a$$

$$\Rightarrow (1 - \varepsilon) g(x) < f(x) < (1 + \varepsilon) g(x), \forall x \geq k > a$$

ஒப்பீட்டுச் சோதனை I-ன் படி $\int_a^\infty g(x) dx$ ஒருங்குதலாகதாக இருந்தால் $\int_a^\infty f(x) dx$ ஒருங்கிறது எனவும் $\int_a^\infty g(x) dx$ விலகுதலாக இருந்தால் $\int_a^\infty f(x) dx$ விலகுகிறது எனவும் நிரூபிக்க முடியும்.

இரண்டு தொகையீடுகளும் ஒன்றாக $\int_a^\infty f(x) dx$ மற்றும் $\int_a^\infty g(x) dx$ ஒருங்கும் அல்லது விலகும்.

1.2.10 முக்கிய தேற்றம் (Important Theorem)

கூற்று :

முறையற்ற தொகையீடு $\int_a^\infty \frac{dx}{x^n}$ ($a > 0$) $n > 1$ என்றால் மட்டுமே ஒருங்குதலாக இருக்கும். மேலும் $n \leq 1$ என்றால் மட்டுமே விலகுதலாக இருக்கும்.

நிரூபணம் :

$$\begin{aligned} \int_a^\infty \frac{dx}{x^n} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t \frac{dx}{x^n} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1} \right]_a^t, n \neq 1 \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{1-n}}{1-n} - \frac{a^{1-n}}{1-n} \right], n \neq 1 \\ &= \begin{cases} -\frac{a^{1-n}}{1-n}, & \text{If } n > 1 \\ \infty, & \text{if } n < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$n = 1$ எனும்போது,

$$\begin{aligned} \int_a^\infty \frac{dx}{x^n} &= \int_a^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t \frac{dx}{x} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} [\log x]_a^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} [\log t - \log a] \\ &= \log \infty - \log a = \infty \end{aligned}$$

எனவே, முறையற்ற தொகையீடு $\int_a^\infty \frac{dx}{x^n}$ ($a > 0$) $n > 1$ என்றால் மட்டுமே ஒருங்குதலாக இருக்கும்.

மேலும் $n \leq 1$ என்றால் மட்டுமே விலகுதலாக இருக்கும்.

குறிப்புரை : $\int_a^\infty \frac{1}{x^n} dx$, ($a > 0$) $n > 1$ எனும்போது ஒருங்குதலாகவும் $n \geq 1$ எனும்போது விலகுதலாகவும் இருக்கும்.

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1.44 : $\int_1^\infty \frac{x^3}{(1+x)^5} dx$ என்ற தொகையீட்டின் ஒருங்குதலை ஆராய்க.

தீர்வு : $I = \int_1^\infty \frac{x^3}{(1+x)^5} dx$ என எடுத்துக் கொள்வோம்.

இங்கு

$$f(x) = \frac{x^3}{(1+x)^5} = \frac{x^3}{x^5 \left(1 + \frac{1}{x}\right)^5}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)^5}$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2} \text{ என எடுத்துக் கொள்வோம்.}$$

இப்பொழுது $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^5} = 1 \neq 0$

$\therefore$ ஒப்பீட்டு சோதனையின் படி,

தொகையீடுகள் $\int_1^\infty f(x) dx$ மற்றும் $\int_1^\infty g(x) dx$ ஒன்றாக ஒருங்கும் அல்லது விலகும்.

ஆனால், தொகையீடு $\int_1^\infty g(x) dx = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ ஒருங்குகிறது [$\because n = 2 > 1$]

$\therefore$ தொகையீடு $\int_1^\infty \frac{x^3}{(1+x)^5} dx$ ஒருங்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.45 : $\int_1^\infty x^n e^{-x} dx$ என்ற முறையற்ற தொகையீட்டின் ஒருங்குதலை விவாதி.

தீர்வு : $I = \int_1^\infty x^n e^{-x} dx$ என எடுத்துக் கொள்வோம்

இங்கு $f(x) = x^n e^{-x}$

$$g(x) = \frac{1}{x^2} \text{ என எடுத்துக் கொள்வோம்}$$

$$\text{இப்பொழுது } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{n+2}}{e^x} = 0, \forall n$$

$$\int_1^{\infty} g(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} \text{ ஒருங்குகிறது} \quad [\because n = 2 > 1]$$

$\therefore$ ஒப்பீட்டு சோதனையின் படி, தொகையீடு $\int_1^{\infty} x^n e^{-x} dx$ ஒருங்குகிறது.

1.2.11 முழுமையான ஒருங்குதல்

$\int_a^b |f| dx$ ஒருங்குதலாக இருந்தால் $\int_a^b f dx$ என்ற முறையற்ற தொகையீடானது முழுமையான ஒருங்குதலாக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.46 : $\int_0^1 \frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}} dx$ -ல் ஒருங்குதலை ஆராய்க.

தீர்வு : $I = \int_0^1 \frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}} dx$ என எடுத்துக் கொள்வோம்

இங்கு, $f(x) = \frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}}$ ஆனது '0'-ல் அண்மைப்புள்ளியில் அதே அடையாளத்தை வைத்திருக்க முடியாது. '0' ஆனது $[0, 1]$ -ல் f -ன் தொடர்ச்சியற்ற இடைநிறுத்தத்தின் ஒரே புள்ளி.

$$\text{இப்பொழுது, } |f(x)| = \left| \frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}} \right| = \frac{|\sin(1/x)|}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} = g(x) \quad \left[\because \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1 \right]$$

$$\text{ஆனால், } \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}, x = 0 \text{ -ல் ஒருங்குதலாக இருக்கும்.} \quad \left[\because n = \frac{1}{2} < 1 \right]$$

$\therefore$ எனவே $\int_0^1 |f|, x = 0$ -ல் ஒருங்குதலாக இருக்கும்.

கொடுக்கப்பட்ட தொகையீடானது $\int_0^1 \frac{\sin(1/x)}{\sqrt{x}} dx, x = 0$ முழுமையான ஒருங்குதலாக இருக்கும்.

பயிற்சி 1.5

1. பின்வரும் தொகையீடுகளின் ஒருங்குதலை விவாதி:

$$\text{i. } \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/3} (1+x^2)} \quad \text{ii. } \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \quad \text{iii. } \int_0^1 \frac{dx}{x^3 (1+x^2)^5}$$

2. $\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ ஒருங்குதலை ஆராயவும்:

3. பின்வரும் தொகையீடுகளின் ஒருங்குதலை ஆராய்க:

$$\text{i. } \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2} (1-x)^{1/3}} \quad \text{ii. } \int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}} dx \quad \text{iii. } \int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{\log x} dx \quad \text{iv. } \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$$

4. பின்வரும் தொகையீடுகளின் ஒருங்குதலை ஆராய்க:

$$\text{i. } \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx \quad \text{ii. } \int_1^\infty \frac{\log x}{x^2} dx \quad \text{iii. } \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x} (1+x^n)} \quad \text{iv. } \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x} (2+x)}$$

$$\text{v. } \int_0^\infty e^{-x^2} dx \text{ [குறிப்பு : } e^{x^2} > x^2, \forall x \in \mathbb{R}]$$

விடைகள் 1.5

1. i. ஒருங்குதல் ii. ஒருங்குதல் $n > -1$ iii. விலகுதல்
2. ஒருங்குதல்
3. i. ஒருங்குதல் ii. ஒருங்குதல் iii. ஒருங்குதல் iv. ஒருங்குதல்
4. i. ஒருங்குதல் ii. ஒருங்குதல் iii. ஒருங்குதல் $n > 1/2$ iv. ஒருங்குதல்
- v. ஒருங்குதல்

சுவராஸ்யமான உண்மைகள்

- ♦ இந்த கருத்து பிளாஸ்மா மருந்து செறிவு கண்டுபிடிக்க மருந்தியல் ஆராய்ச்சியில் அதிகபட்ட மருந்து செறிவு என்ன அது எப்போது நிகழ் போகிறது என அறிய பயன்படுத்தப்படுகிறது.
- ♦ இரண்டு வெவ்வேறு அளவுகளின் விகிதத்தை கணக்கிடுகின்ற எந்த மருந்துகளின் 'R'- மதிப்பு இந்த கருத்தை பயன்படுத்தி அளவிடப்படுகிறது.
- ♦ எந்தப் பொருளின் நிறை மையத்தையும் கண்டுபிடிக்க பொறியாளர்கள் தொகையீட்டைப் பயன்படுத்துகின்றனர்
- ♦ கால்குலஸில் ஒரு சுவராஸ்யமான உறவு, வகையீடு மற்றும் தொகையீடு ஆகியவை தலைகீழ் செயல்முறைகள் ஆகும். அவை ஒன்றுக்கொன்று தலைகீழ் மற்றும் அவை “கால்குலஸ் அடிப்படை கோட்பாடு” பயன்படுத்தி இணைக்கப்பட்டுள்ளது.



Beta & Gamma Function



Improper Integrals (Cont.) 1



Improper Integrals (Cont.) 2

அன்றாட வாழ்வில் பயன்பாடுகள்

- ♦ புள்ளியியல் மற்றும் நிகழ்தகவுக்கான விண்ணப்பம்
- ♦ குவாண்டம் இயற்பியல் மற்றும் பொருளாதாரத்தில் முக்கியத்துவம், இது நிகழ்தகவு விநியோகத்தின் அடிப்படையில் உருவாக்கப்பட்டது.
- ♦ இது சராசரி மாற்றங்கள், தொகுதிகள், பிழை மதிப்பீடுகள் மற்றும் மேற்பரப்பு பகுதிகளைக் கண்டறியவும் பயன்படுத்தப்படுகிறது.
- ♦ இயக்கவியல் ஆற்றலைக் கண்டறியவும் அதே கருத்து பயன்படுத்தப்படுகிறது.

வரலாறு (HISTORY)

கணித பகுப்பாய்வில் சிறப்பு செயல்பாடுகள் அடிக்கடி நிகழ்கின்றன. சிறப்பு செயல்பாடுகளில், காமா செயல்பாடு பரவலாகப் பயன்படுத்தப்படுகிறது. காமா செயல்பாடு $\Gamma(x)$ துல்லியமான அறிவியலில் கிட்டத்தட்ட நன்கு அறியப்பட்ட காரணிக் குறியீடான $x!$ பிரபல கணிதவியலாளர் எல்.யூலர் (1729) இதை அறிமுகப்படுத்தினார். பீட்டா செயல்பாடு முதலில் யூவர் மற்றும் லெஜென்ட்ரேயால் ஆய்வு செய்யப்பட்டது மற்றும் அதன் பெயர் ஜாக் பி.என்.ட்டால் வழங்கப்பட்டது.

1.3 பீட்டா காமா சார்புகள் மற்றும் அதன் பண்புகள்**1.3.1 காமா சார்புகள்**

n ஒரு மிகை முழுக்கள் எனும்போது, முறையற்ற தொகையீடு $\int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx$ காமா சார்பு ஆகும். இதை $\Gamma(n)$ என்ற குறியீட்டில் எழுதுவோம் மற்றும் “காமா n ” எனப் படிப்போம். இதை ஆயிலர் தொகையிட்டின் இரண்டாம் வகை எனவும் கூறலாம்.

$$\text{எனவே, } \Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx \quad \dots(1)$$

குறிப்பு : காமா சார்பானது வரையறுத்த தொகையிட்டின் மதிப்பீடுகளில் முக்கிய பங்கு வகிக்கிறது

1.3.1.1 காமா சார்பின் பண்புகள்

a. நிரூபிக்க வேண்டியது $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= \int_0^{\infty} e^{-x} x^{(n+1)-1} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx \quad [(1) \text{ லிருந்து}] \\ &= [-e^{-x} x^n]_0^{\infty} + n \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx \\ &= 0 + n\Gamma(n) \end{aligned}$$

$$\text{எனவே } \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \quad \dots(2)$$

b. நிரூபிக்க வேண்டியது $\Gamma(n) = (n-1)!$ இங்கு n என்பது மிகை முழு (Positive integer)

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= (n-1) \Gamma(n-1) && [(2) \text{ லிருந்து}] \\ &= (n-1)(n-2) \Gamma(n-2) && [(2) \text{ லிருந்து}] \end{aligned}$$

$$= (n-1)(n-2)(n-3) \dots 3 \cdot 2 \Gamma(2) \quad [(2) \text{ன் வழியை பின்பற்றும்போது}]$$

$$= (n-1)(n-2)(n-3) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 \Gamma(1)$$

$$= (n-1)! \Gamma(1) = (n-1)! \int_0^\infty e^{-x} dx \quad [(1) \text{லிருந்து}]$$

$$= (n-1)! [-e^{-x}]_0^\infty = (n-1)! [0 + 1] = (n-1)! \quad n \text{ என்பது மிகை முழு (Positive integer)}$$

c. நிரூபிக்க வேண்டியது $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

$n = \frac{1}{2}$ என (1) ல் பிரதியிட நமக்கு கிடைப்பது

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\frac{1}{2}-1} dx = \int_0^\infty e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} dx \quad \dots(3)$$

$x = v^2$ எனும்போது $\Rightarrow dx = 2v dv$, நமக்கு கிடைப்பது

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^\infty e^{-v^2} v dv \quad \dots(4)$$

(4) ல் v க்கு பதிலாக u என எழுதக் கிடைப்பது

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} du \quad \dots(5)$$

(4) மற்றும் (5) பெருக்க கிடைப்பது

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)} du dv$$

$u = r \cos\theta$, $v = r \sin\theta$ என்றால் $u^2 + v^2 = r^2$ மற்றும் $q = \tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right)$ மேலும் $du dv = r dr d\theta$,

$0 \leq r \leq \infty$ மற்றும் $0 \leq \theta \leq \pi/2$

$$\therefore \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\theta$$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^\infty d\theta = 4 \int_0^{\pi/2} 1 \cdot d\theta = \pi$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad \dots(6)$$

d. நிரூபிக்க வேண்டியது $\Gamma(0) = \infty$

(2)லிருந்து நமக்கு கிடைப்பது,

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}$$

$n \rightarrow 0$ எனில்

$$\Gamma(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(0+1)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \infty$$

எனவே $\Gamma(0) = \infty$

மேலும் $\Gamma(-1)$, $\Gamma(-2)$, $\Gamma(-3)$ ஆகியவை வரையறுக்கப்படவில்லை. காமா சார்பானது ஏதோ ஒரு $n > 0$ -ல் தொடர்ச்சியாகவும் $n = 0, -1, -2, \dots$ தொடர்ச்சியற்றதாகவும் இருக்கும்.

இவ்வாறாக $\Gamma(n)$ ஆனது 0 மற்றும் குறை முழுக்கள் தவிர மற்ற அனைத்து n -களிலும் வரையறுக்கப்படுகிறது.

e. நிரூபிக்க வேண்டியது $\Gamma(n+1) = (m+1)^{n+1} (-1)^n \int_0^1 x^m (\log x)^n dx$

இங்கு n ஒரு மிகை முழு மேலும் $m > -1$

$$\int_0^1 x^m (\log x)^n dx$$

$x = e^{-y}$ எனப் பிரதியிட $dx = -e^{-y} dy = -x dy$

$$\therefore \int_0^1 x^m (\log x)^n dx = \int_0^\infty e^{-my} (-y)^n e^{-y} dy = (-1)^n \int_0^\infty y^n e^{-(m+1)y} dy$$

$(m+1)y = u$ எனப் பிரதியிட $dy = \frac{du}{m+1}$

$$\therefore \int_0^1 x^m (\log x)^n dx = (-1)^n \int_0^\infty \frac{u^n}{(m+1)^n} e^{-u} \frac{du}{(m+1)}$$

$$= \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}} \int_0^\infty e^{-u} u^{(n+1)-1} du$$

$$\int_0^1 x^m (\log x)^n dx = \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}} \Gamma(n+1)$$

[(1) லிருந்து]

$$\text{எனவே} \quad \Gamma(n+1) = (m+1)^{n+1} (-1)^n \int_0^1 x^m (\log x)^n dx \quad \dots(8)$$

இங்கு n ஒரு மிகை முழு மேலும் $m > -1$

$$\text{சூத்திரம் : } \int_0^{\pi/2} \sin^m \theta \cos^n \theta d\theta = \frac{\Gamma(m+1)}{2\Gamma(n+1) \Gamma\left(\frac{(m+n+2)}{2}\right)}; m, n > -1$$

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1.47 : மதிப்பீடு $\int_0^\infty x^{1/4} e^{-\sqrt{x}} dx$

$$\text{தீர்வு :} \quad I = \int_0^\infty x^{1/4} e^{-\sqrt{x}} dx$$

$\sqrt{x} = u$ எனப் பிரதியிட, $\Rightarrow x = u^2 \Rightarrow dx = 2u du$

$$\therefore I = \int_0^\infty e^{-u} (u^2)^{1/4} 2u du = 2 \int_0^\infty e^{-u} u^{3/2} du$$

$$= 2 \int_0^\infty e^{-u} u^{\frac{5}{2}-1} du = 2\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$= 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$[\because \Gamma(n+1) = n\Gamma n]$$

$$= \frac{3}{2} \sqrt{\pi} \text{ (விடை)}$$

$$\left[\because \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \right]$$

எடுத்துக்காட்டு 1.48 : மதிப்பீடு $\int_0^\infty x^{n-1} e^{-h^2 x^2} dx$

தீர்வு : $I = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-h^2 x^2} dx$

$$h^2 x^2 = y \text{ எனப் பிரதியிட } h^2 2x dx = dy$$

$$dx = \frac{1}{2} \frac{dy}{h^2 x} = \frac{1}{2} \frac{dy}{h\sqrt{y}}$$

$$I = \int_0^\infty e^{-y} \left(\frac{\sqrt{y}}{h}\right)^{n-1} \frac{1}{2} \frac{dy}{h\sqrt{y}}$$

$$= \frac{1}{2h^n} \int_0^\infty e^{-y} y^{\frac{n-2}{2}} dy$$

$$= \frac{1}{2h^n} \int_0^\infty e^{-y} y^{\frac{n}{2}-1} dy$$

$$= \frac{1}{2h^n} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \text{ (விடை) [காமா சார்பின் வரையறையின் படி]}$$

எடுத்துக்காட்டு 1.49 : மதிப்பீடு $\int_0^\infty x^6 e^{-2x} dx$

தீர்வு : $I = \int_0^\infty x^6 e^{-2x} dx$

$$2x = y \text{ எனப் பிரதியிட } dx = \frac{dy}{2}$$

$$\therefore I = \int_0^\infty e^{-y} \left(\frac{y}{2}\right)^6 \frac{dy}{2} = \frac{1}{2^7} \int_0^\infty e^{-y} y^{7-1} dy = \frac{1}{2^7} \Gamma(7)$$

$$I = \frac{1}{2^7} \Gamma(7)$$

[வரையறையின் படி]

$$\frac{1}{2^7} (6!) = \frac{45}{8} \text{ (விடை)}$$

$$[\because G(n+1) = n!, n > 0]$$

எடுத்துக்காட்டு 1.50 : நிறுவுக $\int_a^\infty e^{(2ax - x^2)} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} e^{a^2}$

நிரூபணம் :

$$I = \int_a^\infty e^{(2ax - x^2)} dx = \int_a^\infty e^{a^2 - (x^2 - 2ax + a^2)} dx$$

$$= \int_a^\infty e^{a^2 - (x - a)^2} dx = e^{a^2} \int_a^\infty e^{-(x - a)^2} dx$$

$$x - a = y \text{ எனப் பிரதியிட } \Rightarrow dx = dy$$

$$I = e^{a^2} \int_0^\infty e^{-y^2} dy \quad \dots(1)$$

காமா சார்பின் வரையறையின் படி,

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-u} u^{n-1} du, \quad n > 0$$

$$n = \frac{1}{2} \text{ எனப் பிரதியிட } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-u} u^{-1/2} du$$

$$u = y^2 \text{ எனப் பிரதியிட } \Rightarrow du = 2y dy$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-y^2} (y)^{-1/2} 2y dy$$

$$\Rightarrow \sqrt{\pi} = 2 \int_0^\infty e^{-y^2} dy \quad \left[\because \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \right] \quad \dots(2)$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(2) ஐ பயன்படுத்த (1)ஆனது,

$$I = e^{a^2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} e^{a^2} \text{ (விடை)}$$

எடுத்துக்காட்டு 1.51 : மதிப்பீடு $\int_0^\infty x^{-3/2} (1 - e^{-x}) dx$

தீர்வு :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty x^{-3/2} (1 - e^{-x}) dx \\ &= \left[(1 - e^{-x}) \frac{x^{-1/2}}{\left(\frac{-1}{2}\right)} \right]_0^\infty - \int_0^\infty e^{-x} \frac{x^{-1/2}}{\left(\frac{-1}{2}\right)} dx \\ &= 0 + 2 \int_0^\infty e^{-x} x^{-1/2} dx \\ &= 2 \int_0^\infty e^{-x} x^{\frac{1}{4}-1} dx = 2 \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 2 \sqrt{\pi} \text{ (விடை)} \end{aligned}$$

1.3.2 பீட்டா சார்பு

பீட்டா சார்பானது $B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$ என்று வரையறுக்கப்படுகிறது. இங்கு m, n என்பன மிக எண்கள் முழுக்கள் அல்லது பின்னமாக இருக்கலாம். இதை ஆயிலர் தொகையிட்டின் முதல் வகை எனவும் கூறலாம்.

1.3.2.1 பீட்டா சார்பின் எளிமையான பண்புகள்

i. நிரூபிக்க வேண்டியது $B(m, n) = B(n, m)$

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 (1-x)^{m-1} [1 - (1-x)]^{n-1} dx \quad [\because \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx] \\
 &= \int_0^1 (1-x)^{m-1} x^{n-1} dx = \int_0^1 x^{n-1} (1-x)^{m-1} dx \\
 &= B(n, m)
 \end{aligned}$$

எனவே $B(m, n) = B(n, m)$

ii. நிரூபிக்க வேண்டியது $\int_0^a x^{m-1} (a-x)^{n-1} dx = a^{m+n-1} B(m, n)$

(1)லிருந்து, $\int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx = B(m, n)$

$x = \frac{y}{a}$ எனப் பிரதியிட, $\Rightarrow dx = \frac{dy}{a}$ மேலும் $0 \leq y \leq a$

$$\int_0^a \left(\frac{y}{a}\right)^{m-1} \left(1 - \frac{y}{a}\right)^{n-1} \frac{dy}{a} = B(m, n)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^{m+n-1}} \int_0^a y^{m-1} (a-y)^{n-1} dy = B(m, n)$$

$$\Rightarrow \int_0^a x^{m-1} (a-x)^{n-1} dy = a^{m+n-1} B(m, n)$$

iii. நிரூபிக்க வேண்டியது

$$B(m, n) = \int_0^1 \frac{x^{m-1} + x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}} dx$$

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$$

$x = \frac{1}{y+1}$ எனப் பிரதியிட $dx = \frac{dy}{(1+y)^2}$ மேலும் $-\infty \leq y \leq 0$

$$B(m, n) = \int_{-\infty}^0 \left(\frac{1}{y+1}\right)^{m-1} \left[1 - \frac{1}{y+1}\right]^{n-1} \left[-\frac{dy}{(1+y)^2}\right]$$

$$B(m, n) = \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+y)^{m-1}} \cdot \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{n-1}} \cdot \frac{dy}{(1+y)^2}$$

$$B(m, n) = \int_0^{\infty} \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}} dy$$

...(1)

(இந்தத் தொகையீட்டு செயல்பாட்டின் சமச்சீர் தன்மையின் படி m & n மாறுபடலாம்)

$$மீண்டும் (1) ஐ \quad B(m, n) = \int_0^1 \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}} dy + \int_1^{\infty} \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}} dy \quad \dots(2)$$

என்று எழுதலாம்.

R.H.S-இல் இரண்டாவது தொகையீட்டைத் தீர்க்கும் பொருட்டு $y = \frac{1}{x}$, எனில் $dy = -\frac{1}{x^2} dx$ மேலும் $1 \leq x \leq \infty$

$$\int_1^{\infty} \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}} dy = \int_1^0 \left(\frac{1}{x}\right)^{n-1} \frac{x^{m+n}}{(1+x)^{m+n}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx = \int_0^1 \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}} dx \quad \dots (3)$$

(3) ஐ பயன்படுத்த (2)ஆனது,

$$\begin{aligned} B(m, n) &= \int_0^1 \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}} dy + \int_0^1 \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}} dx + \int_0^1 \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}} dx \quad [\because \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(y) dy] \end{aligned}$$

எனவே $B(m, n) = \int_0^1 \frac{x^{m-1} + x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}} dx$

iv. நிரூபிக்க வேண்டியது $B(m, n) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta d\theta$

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$$

$$x = \sin^2 \theta \text{ எனப் பிரதியிட } \Rightarrow dx = 2 \sin \theta \cos \theta d\theta \text{ மேலும் } 0 \leq \theta \leq \pi/2$$

$$\begin{aligned} B(m, n) &= \int_0^{\pi/2} (\sin^2 \theta)^{m-1} (1-\sin^2 \theta)^{n-1} 2 \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta d\theta \end{aligned}$$

எனவே $B(m, n) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta d\theta$

குறிப்பு நிலை :

$$m = \frac{1}{2}, n = \frac{1}{2} \text{ எனும்போது, மேலே குறிப்பிட்ட வெளிப்பாடு}$$

$$B = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\pi/2} 1 \cdot d\theta = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

எனத் தருகிறது

v. நிரூபிக்க வேண்டியது $(a-b)^{m+n-1} B(m, n) = \int_a^b (x-b)^{m-1} (a-x)^{n-1} dx$

$$B(m, n) = \int_0^1 y^{m-1} (1-y)^{n-1} dy$$

$$y = \frac{x-b}{a-b} \text{ எனப் பிரதியிட, } \Rightarrow dy = \frac{dx}{a-b} \text{ மேலும் } b \leq y \leq a$$

$$\begin{aligned} \therefore B(m, n) &= \int_b^a \left(\frac{x-b}{a-b}\right)^{m-1} \left(1 - \frac{x-b}{a-b}\right)^{n-1} \frac{dx}{a-b} \\ &= \frac{1}{(a-b)^{m+n-1}} \int_b^a (x-b)^{m-1} (a-x)^{n-1} dx \end{aligned}$$

எனவே. $\int_b^a (x-b)^{m-1} (a-x)^{n-1} dx = (a-b)^{m+n-1} B(m, n)$

1.3.3 பீட்டா மற்றும் காமா சார்புகளுக்கு இடையேயான உறவு

நிரூபிக்க வேண்டியது $B(m, n) = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$, $m > 0, n > 0$

நிரூபணம் :

$$\frac{\Gamma(n)}{z^n} = \int_0^\infty e^{-zy} y^{n-1} dy \quad \dots(1)$$

அல்லது $\Gamma(n) = \int_0^\infty z^n e^{-zy} y^{n-1} dy \quad \dots(2)$

மேலும் $\Gamma(m) = \int_0^\infty z^m e^{-zy} y^{m-1} dy \quad \dots(3)$

(2)-ஐ $e^{-z} \cdot z^{m-1}$ ஆல் இருபுறமும் பெருக்க கிடைப்பது

$$\begin{aligned} \Gamma(n) e^{-z} \cdot z^{m-1} &= \int_0^\infty z^{m+n-1} e^{-zy} y^{m-1} e^{-z} dy \\ &= \int_0^\infty z^{m+n-1} e^{-(y+1)z} y^{n-1} dy \end{aligned}$$

இருபுறமும் z ஐப் பொறுத்து 0 விலிருந்து ∞ வரை தொகையிட நமக்கு கிடைப்பது,

$$\Gamma(n) \int_0^\infty e^{-z} \cdot z^{m-1} dz = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty z^{m+n-1} e^{-(y+1)z} dz \right] y^{n-1} dy$$

$$\Gamma(n) \Gamma(m) = \int_0^\infty \frac{\Gamma(m+n)}{(1+y)^{m+n}} y^{n-1} dy \quad [\text{பண்புகள் (1) மற்றும் (3) லிருந்து}]$$

$$\Gamma(n) \Gamma(m) = \Gamma(m+n) \int_0^\infty \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}} dy$$

$$= \Gamma(m+n) \cdot B(m, n)$$

[1.3.2 ல் (iii) ல் 1 ன் படி]

எனவே $B(m, n) = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$

குறைப்பு (i) நிரூபிக்க வேண்டியது $\Gamma(n) \Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}$, $0 < n < 1$

நிரூபணம் :

$$\frac{\Gamma(1-n) \Gamma(n)}{\Gamma(1)} = B(m, n) = \int_0^\infty \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}} dy$$

$m+n=1$ மற்றும் $m=1-n$ எனப் பிரதியிட நமக்கு கிடைப்பது

$$\therefore \frac{\Gamma(1-n) \Gamma(n)}{\Gamma(1)} = \int_0^\infty \frac{y^{n-1}}{1+y} dy$$

$$\Rightarrow \Gamma(1-n) \Gamma(n) = \frac{\pi}{\sin n\pi} \quad \left[\because \Gamma(1) = 1, \int_0^{\infty} \frac{y^{n-1}}{1+y} dy = \frac{\pi}{\sin n\pi}, 0 < n < 1 \right]$$

குறைப்பு (ii), நிரூபிக்க வேண்டியது $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

நிரூபணம் :

$$\Gamma(1-n) \Gamma(n) = \frac{\pi}{\sin n\pi} \quad \text{என எடுத்துக் கொள்வோம்}$$

$$n = \frac{1}{2} \quad \text{எனப் பிரதியிட,}$$

$$\therefore \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^2 = \pi'$$

$$\Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

குறைப்பு (iii), நிரூபிக்க வேண்டியது

$$\int_0^{\pi/2} \cos^m \theta \sin^n \theta d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2 \Gamma\left(\frac{m+n+2}{2}\right)}, m > -1, n > -1$$

நிரூபணம் : $I = \int_0^{\pi/2} \cos^m \theta \sin^n \theta d\theta$ என எடுத்துக் கொள்வோம்

$$\sin^2 \theta = x \quad \text{எனப் பிரதியிட,}$$

$$\Rightarrow 2 \sin \theta \cos \theta d\theta = dx$$

$$d\theta = \frac{dx}{2\sqrt{x} \sqrt{1-x}}$$

மேலும் $\theta = 0$ எனும்போது $x = 0$ மற்றும் $\theta = \pi/2$ எனும்போது $x = 1$

$$I = \int_0^1 (1-x)^{\frac{m}{2}} \cdot x^{\frac{n}{2}} \frac{dx}{2\sqrt{x} \sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x^{\frac{n-1}{2}} \cdot (1-x)^{\frac{m-1}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x^{\frac{n-1}{2}-1} \cdot (1-x)^{\frac{m-1}{2}-1} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{m+1}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) \quad [\because B(n, m) = B(m, n)] \\
 &= \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+n+2}{2}\right)} \quad \left[\because B(m, n) = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \right] \\
 \int_0^{\pi/2} \cos^m \theta \sin^n \theta \, d\theta &= \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+n+2}{2}\right)}, \quad m > -1, n > -1
 \end{aligned}$$

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1.52 : மதிப்பீடு $\int_0^1 x^4 (1 - \sqrt{x})^5 \, dx$

தீர்வு : $\sqrt{x} = y$ என எடுத்துக் கொள்வோம். $x = y^2 \Rightarrow dx = 2y \, dy$

$$\therefore \int_0^1 y^8 (1 - y)^5 \cdot 2y \, dy = 2 \int_0^1 y^{10-1} (1 - y)^{6-1} \, dy$$

$$= 2 B(10, 6) = 2 \frac{\Gamma(10) \Gamma(6)}{\Gamma(16)} = \frac{2 \cdot 9! 5!}{15!} = \frac{1}{15015} \quad (\text{விடை})$$

எடுத்துக்காட்டு 1.53 : மதிப்பீடு $\int_0^\infty x^{-3/2} (1 - e^{-x}) \, dx$

தீர்வு : $x^3 = y$ என எடுத்துக் கொள்வோம் $x = y^{1/3} \Rightarrow dx = \frac{1}{3} y^{-2/3} \, dy$

$$\int_0^1 (1 - x^3)^{-1/2} \, dx = \int_0^1 (1 - y)^{-1/2} \cdot \frac{1}{3} y^{-2/3} \, dy$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^1 y^{\frac{1}{3}-1} (1 - y)^{\frac{1}{2}-1} \, dy$$

$$= \frac{1}{3} B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)} \quad (\text{விடை})$$

எடுத்துக்காட்டு 1.54 : பீட்டா செயல்பாட்டின் அடிப்படையில் வெளிப்படுத்தி $\int_0^1 y^m (1 - y^p)^n dy$

$\int_0^1 y^5 (1 - y^3)^{10} dy$ -ஐ மதிப்பீடு செய்யவும்

தீர்வு : $y^p = z$ என எடுத்துக் கொள்வோம் $y = z^{1/p} \Rightarrow dy = \frac{1}{p} z^{\frac{1}{p}-1} dz$

$$\begin{aligned} \int_0^1 y^m (1 - y^p)^n dy &= \int_0^1 z^{m/p} (1 - z)^n \cdot \frac{1}{p} z^{\frac{1}{p}-1} dz \\ &= \frac{1}{p} \int_0^1 z^{\frac{m+1}{p}-1} (1 - z)^{n+1-1} dz = \frac{1}{p} B\left(\frac{m+1}{p}, n+1\right) \end{aligned}$$

$m = 5, p = 3, n = 10$ என (1) ல் பிரதியிட

$$\begin{aligned} \int_0^1 y^5 (1 - y^3)^{10} dy &= \frac{1}{3} B(2, 11) \\ &= \frac{1}{3} \frac{\Gamma(2) \Gamma(11)}{\Gamma(13)} = \frac{1}{3} \frac{1 \cdot \Gamma(1) \Gamma(11)}{12 \cdot 11 \cdot \Gamma(11)} \\ &= \frac{1}{3 \times 12 \times 11} \quad [\because \Gamma(n+1) = n\Gamma(n)] \\ &= \frac{1}{396} \text{ (விடை)} \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 1.55 : மதிப்பீடு $\int_a^\infty \frac{x^8(1 - x^6)}{(1 + x)^{24}} dx$

தீர்வு :

$$\begin{aligned} I &= \int_a^\infty \frac{x^8(1 - x^6)}{(1 + x)^{24}} dx = \int_a^\infty \frac{x^8}{(1 + x)^{24}} dx - \int_a^\infty \frac{x^{14}}{(1 + x)^{24}} dx \\ &= \int_a^\infty \frac{x^{9-1}}{(1 + x)^{9+15}} dx - \int_a^\infty \frac{x^{15-1}}{(1 + x)^{15+9}} dx \\ &= B(9, 15) - B(15, 9) \\ &= 0 \text{ (விடை)} \quad [\because B(m, n) = B(n, m)] \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 1.56 : நிரூபி $\int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{\sin^2 \theta}{2}\right)^{-1/2} d\theta = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2}{4\sqrt{\pi}}$

நிரூபணம் :
$$I = \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{\sin^2 \theta}{2}\right)^{-1/2} d\theta = \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{2 - \sin^2 \theta}}$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + \cos^2 \theta}}$$

$\cos \theta = t$ எனப் பிரதியிட, $\Rightarrow -\sin \theta = dt \Rightarrow d\theta = -\frac{d\theta}{\sqrt{1-t^2}}$

$$I = -\sqrt{2} \int_1^0 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2} \cdot \sqrt{1-t^2}} = \sqrt{2} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

மீண்டும் $t^2 = \sin \theta$ எனப் பிரதியிட, $\Rightarrow 2t dt = \cos \theta d\theta$

$$I = \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \theta d\theta}{2\sqrt{\sin \theta} \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \theta}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \sin^{-1/2} \cos^0 \theta d\theta$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2 \cdot \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \quad \dots(1)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \Gamma\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} = \pi\sqrt{2}$$

$\therefore (1) \Rightarrow I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2 \cdot \sqrt{\pi}}{\pi\sqrt{2}} = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2}{4\sqrt{\pi}} \quad (\text{விடை})$

எடுத்துக்காட்டு 1.57 : மதிப்பீடு $\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^6} dx$

தீர்வு : $I = \int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^6} dx$ என எடுத்துக் கொள்வோம்

$x^6 = y$ எனப் பிரதியிட, $\Rightarrow x = y^{1/6} \Rightarrow dx = \frac{1}{6} y^{-5/6} dy$

$$I = \int_0^{\infty} \frac{y^{1/6}}{(1+y)} \cdot \frac{1}{6} y^{-5/6} dy = \frac{1}{6} \int_0^{\infty} \frac{y^{-2/3}}{1+y} dy$$

$$= \frac{1}{6} \int_0^{\infty} \frac{y^{\frac{1}{3}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}} dy = \frac{1}{6} B\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{6} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)} = \frac{1}{6} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{3}\right)}{\Gamma(1)} \\
 &= \frac{1}{6} \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{3}} \quad \left[\because \Gamma(n) \Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi} \cdot \Gamma(1) = 1 \right] \\
 &= \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \text{ (விடை)}
 \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 1.58 : நிரூபி $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin\theta} d\theta \times \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta}} = \pi$
நிரூபணம் :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n\theta \cos^0\theta d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} \quad \dots(1)$$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin\theta} d\theta \times \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta}} \\
 &= \int_0^{\pi/2} \sin^{1/2}\theta \cos^0\theta d\theta \times \int_0^{\pi/2} \sin^{-1/2}\theta \cos^0\theta d\theta \\
 &= \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)} \times \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \quad [(1) \text{ லிருந்து}] \\
 &= \frac{\pi \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{4\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)} = \frac{\pi \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{4 \cdot \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} = \pi \quad (\text{நிரூபிக்கப்பட்டது}) \quad [\because \Gamma(n+1) = n\Gamma(n)]
 \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 1.59 : நிரூபி $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^4)^3} dx = \frac{5\pi\sqrt{2}}{128}$

நிரூபணம் : $x = \sqrt{\tan\theta}$ எனப் பிரதியிட, $\Rightarrow dx = \frac{1}{2\sqrt{\tan\theta}} \cdot \sec^2\theta d\theta$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^4)} dx &= \int_0^{\pi/2} \frac{\tan \theta \cdot \frac{1}{2} (\tan \theta)^{-1/2} \sec^2 \theta}{(1 + \tan^2 \theta)^3} d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (\tan \theta)^{1/2} (\sec \theta)^{-4} d\theta = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^{1/2} \theta \cos^{7/2} \theta d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{9}{4}\right)}{\Gamma(3)} \\
 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2!} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \\
 &= \frac{5}{128} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{128} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{5\pi\sqrt{2}}{128} \quad (\text{நிரூபிக்கப்பட்டது})
 \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 1.60 : மதிப்பீடு $\int_0^{\infty} e^{-x^{1/3}} dx$

தீர்வு : $x^{1/3} = y$ எனப் பிரதியிட, $\Rightarrow x = y^3 \Rightarrow dx = 3y^2 dy$

$$\begin{aligned}
 \therefore \int_0^{\infty} e^{-x^{1/3}} dx &= \int_0^{\infty} e^{-y} \cdot 3y^2 dy \\
 &= 3 \int_0^{\infty} e^{-y} y^{3-1} dy = 3 \Gamma(3) = 3 \cdot 2! = 6 \quad (\text{விடை})
 \end{aligned}$$

1.3.4 நகல் சூத்திரம்

நிரூபிக்க வேண்டியது $\Gamma(p) \Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}} \Gamma(2p)$, $p > 0$

நிரூபணம் :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m \theta \cos^n \theta d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2 \Gamma\left(\frac{m+n+2}{2}\right)} \quad \dots(1)$$

(1) ல் $n = m$ எனப் பிரதியிடக் கிடைப்பது

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\left[\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\right]^2}{2 \Gamma(m+1)} = \int_0^{\pi/2} (\sin \theta \cos \theta)^m d\theta \\
 &= \frac{1}{2^m} \int_0^{\pi/2} (2 \sin \theta \cos \theta)^m d\theta = \frac{1}{2^m} \int_0^{\pi/2} (\sin 2\theta)^m d\theta \\
 2\theta = \phi &\Rightarrow d\theta = \frac{d\phi}{2} \text{ எனப் பிரதியிட}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\left[\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \right]^2}{2\Gamma(m+1)} = \frac{1}{2^m} \int_0^\pi \sin^m \phi \frac{d\phi}{2} \\
 &= \frac{1}{2^m} \int_0^{\pi/2} \sin^m \phi \cos^0 \phi \frac{d\phi}{2} \left[\because \int_0^{2a} f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx, f(2a-x) = f(x) \right] \\
 &= \frac{1}{2^m} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)} \quad [(1) \text{ லிருந்து}] \\
 \Rightarrow \quad &\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma(m+1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^m} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)}
 \end{aligned}$$

$$\frac{m+1}{2} = p \Rightarrow m = 2p-1, \quad p > 0 \text{ என எடுத்துக் கொள்வோம்}$$

$$\therefore \quad \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(2p)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2p+1}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad \Gamma(p) \Gamma\left(p - \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}} \Gamma(2p), \quad p > 0$$

குறைப்பு (i) நிரூபிக்க வேண்டியது

$$2^m \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right) = \sqrt{\pi} \Gamma(m+1)$$

மஇன் அனைத்து உண்மையான மதிப்புகளுக்கும்.

நிரூபணம் : $2p - 1 = m$ என நகல் சூத்திரத்தில் பிரதியிடக் கிடைப்பது

$$\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^m} \Gamma(m+1)$$

$$\Rightarrow \quad 2^m \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right) = \sqrt{\pi} \Gamma(m+1)$$

குறைப்பு (ii) நிரூபிக்க வேண்டியது

$$\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2m)!}{2^m \cdot m!} = \sqrt{\pi}, m > 0$$

நிரூபணம் :

$$\frac{\Gamma(2m)}{\Gamma(m)} = \frac{(2m-1)}{(m-1)!} = \frac{2m \cdot (2m-1)}{2m(m-1)!} = \frac{(2m)!}{2 \cdot (m)!} \quad \dots(1)$$

நகல் சூத்திரத்தை பயன்படுத்தக் கிடைப்பது

$$\begin{aligned} \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}} \cdot \frac{\Gamma(2m)}{\Gamma(m)} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}} \cdot \frac{(2m)!}{2 \cdot (m)!} \\ &= \frac{(2m)!}{2 \cdot (m)!} \sqrt{\pi} \end{aligned} \quad [(1) \text{ லிருந்து}]$$

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1.62 : நிரூபி $B(m, n) = 2^{1-2n} B\left(n, \frac{1}{2}\right)$

நிரூபணம் :

$$\begin{aligned} B\left(n, \frac{1}{2}\right) &= \frac{\Gamma(n) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} = \frac{\Gamma(n) \Gamma(n) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n) \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{\Gamma(n) \Gamma(n) \sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi} \Gamma(2n) 2^{1-2n}} \\ &= \frac{B(n, n)}{2^{1-2n}} \end{aligned}$$

[நகல் சூத்திரத்தின் படி]

$$\Rightarrow B(n, n) = 2^{1-2n} B\left(n, \frac{1}{2}\right)$$

(நிரூபிக்கப்பட்டது)

எடுத்துக்காட்டு 1.63 : நிரூபி $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2^{1/3} \sqrt{\pi}} \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2$

நிரூபணம் : நகல் சூத்திரத்தின் படி $\Gamma(m) \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}} \Gamma(2m)$

$$m = \frac{1}{6} \text{ எனப் பிரதியிட,}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{6}\right) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2^{-2/3}}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2^{-2/3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \quad \dots (1)$$

$$\Gamma(n) \Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}$$

$$n = \frac{1}{3} \text{ எனப் பிரதியிடக் கிடைப்பது,}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

$$\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \quad \dots (2)$$

$$(2) \text{ ஐப் பயன்படுத்தும் போது } \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2^{-2/3}} \cdot \frac{\sqrt{3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2\pi} = \frac{\sqrt{3}}{2^{1/3} \sqrt{\pi}} \left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \right]^2 \text{ (நிரூபிக்கப்பட்டது)}$$

எடுத்துக்காட்டு 1.64 : பீட்டா காமா சார்புகளை பயன்படுத்தி நிரூபி $\int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2} x^2\right) dx = 1$

நிரூபணம் : $I = \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2} x^2\right) dx = 2 \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2} x^2\right) dx$ என எடுத்துக் கொள்வோம்

$$\frac{\pi x^2}{2} = y \text{ எனப் பிரதியிட, } \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2}{\pi}} y^{1/2}$$

$$\Rightarrow dx = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) y^{-1/2} dy$$

$$\therefore I = 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} y^{-1/2} \cos y dy = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} y^{-1/2} \cos y dy$$

$$= \text{உண்மையான பகுதி} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} y^{-1/2} e^{-iy} dy \quad [\because e^{-i\theta} = \cos\theta - i \sin\theta]$$

$$= \text{உண்மையான பகுதி} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} y^{\frac{1}{2}-1} e^{-iy} dy$$

$$\begin{aligned}
 &= \text{உண்மையான பகுதி} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{e^{i\pi/2}}} \left[\because \int_0^\infty e^{-kx} x^{n-1} dx = \frac{\Gamma(n)}{k^n} \right] \\
 &= \text{உண்மையான பகுதி} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)^{1/2}} \quad [\because i = e^{i\pi/2}] \\
 &= \text{உண்மையான பகுதி} \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)^{-1/2} \\
 &= \text{உண்மையான பகுதி} \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) \\
 &= \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 \quad (\text{நிரூபிக்கப்பட்டது})
 \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 1.65 : பீட்டா காமா சார்புகளை பயன்படுத்தி மதிப்பீடு $\int_0^\infty \cos(\lambda^2 x^2) dx$

நிரூபணம் : $I = \int_0^\infty \cos(\lambda^2 x^2) dx$

$x^2 = z$ எனப் பிரதியிட,

$$\Rightarrow dx = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} dz$$

$$\therefore I = \int_0^\infty \cos(\lambda^2 z) \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} dz = \frac{1}{2} \int_0^\infty z^{\frac{1}{2}-1} \cos \lambda^2 z dz$$

$$= \text{உண்மையான பகுதி} = \frac{1}{2} \int_0^\infty z^{\frac{1}{2}-1} e^{-i\lambda^2 z} dz$$

$$= \text{உண்மையான பகுதி} \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{(i\lambda^2)^{1/2}} \left[\because \int_0^\infty e^{-kx} x^{n-1} dx = \frac{\Gamma(n)}{k^n} \right]$$

$$= \text{உண்மையான பகுதி} \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\lambda(e^{i\pi/2})^{1/2}} \quad [\because i = e^{i\pi/2}]$$

$$= \text{உண்மையான பகுதி} \frac{\pi}{2\lambda} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)^{-1/2}$$

$$= \text{உண்மையான பகுதி} \frac{\pi}{2\lambda} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2\lambda} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2\lambda} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = (\text{விடை})$$

எடுத்துக்காட்டு 1.66 : பீட்டா காமா சார்புகளை பயன்படுத்தி மதிப்பீடு. $\int_0^1 \log \Gamma(y) dy$

நிரூபணம் : $I = \int_0^1 \log \Gamma(y) dy$... (1)

$$= \int_0^1 \log \Gamma(1-y) dy \quad \dots (2)$$

(1) மற்றும் (2) ஐக் கூட்ட கிடைப்பது

$$2I = \int_0^1 [\log \Gamma(y) + \log \Gamma(1-y)] dy$$

$$= \int_0^1 [\log \Gamma(y) \Gamma(1-y)] dy$$

$$= \int_0^1 \log \left(\frac{\pi}{\sin \pi y} \right) dy \quad \left[\because \Gamma(n) \Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi} \right]$$

$$= \int_0^1 [\log \pi - \log \sin \pi y] dx$$

$$= \log \pi [y]_0^1 - \int_0^1 \log \sin z \cdot \frac{1}{\pi} dz \quad [(2) \text{ல் எனப் பிரதியிட}]$$

$$= \log \pi - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \log \sin z dz \quad \left[\because \int_0^{2a} f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx, f(2a-x) = f(x) \right]$$

$$= \log \pi - \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\pi}{2} \log 2 \right] \quad \left[\because \int_0^{\pi/2} \log \sin x dx = -\frac{\pi}{2} \log 2 \right]$$

$$= \log \pi + \log 2 = \log 2\pi \quad [\text{எடுத்துக்காட்டு 1.31 ஐப் பார்க்கவும்}]$$

$$I = \frac{1}{2} \log 2\pi \quad (\text{விடை})$$

எடுத்துக்காட்டு 1.67 : நிரூபி $\Gamma\left(\frac{3}{2} - m\right) \Gamma\left(\frac{3}{2} + m\right) = \left(\frac{1}{4} - m^2\right) \pi \sec \pi m, -1 < 2m < 1$

நிரூபணம் : $L.H.S = \Gamma\left(\frac{3}{2} - m\right) \Gamma\left(\frac{3}{2} + m\right)$

$$= \left(\frac{1}{2} - m\right) \left[\Gamma\left(\frac{1}{2} - m\right) \right] \cdot \left(\frac{1}{2} + m\right) \left[\Gamma\left(\frac{1}{2} + m\right) \right]$$

$$= \left(\frac{1}{4} - m^2\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - m\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2} + m\right) = \left(\frac{1}{4} - m^2\right) \Gamma\left(\frac{1-2m}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1-2m}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{4} - m^2\right) \left[\frac{\pi}{\sin\left(\frac{1-2m}{2}\right)\pi} \right] = \left(\frac{1}{4} - m^2\right) \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \pi m\right)}$$

$$= \left(\frac{1}{4} - m^2\right) \frac{\pi}{\cos \pi m} = \left(\frac{1}{4} - m^2\right) \pi \sec \pi m \quad (\text{நிரூபிக்கப்பட்டது})$$

எடுத்துக்காட்டு 1.68 : நிரூபி $\int_0^{\pi/2} \tan^n \theta \, d\theta = \frac{\pi}{2} \sec \frac{n\pi}{2}, -1 < n < 1$

நிரூபணம் : $I = \int_0^{\pi/2} \tan^n \theta \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^n \theta \cos^{-n} \theta \, d\theta$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-n}{2}\right)}{2 \Gamma(1)} = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{n+1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\pi}{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\pi} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{n\pi}{2}\right)} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\cos \frac{n\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} \sec \frac{n\pi}{2} \quad (\text{நிரூபிக்கப்பட்டது})$$

பயிற்சி 1.6

1. பின்வரும் தொகையீடுகளுக்கு மதிப்பு காண்:

a. $\int_0^\infty \sqrt{x} \, e^{-x^3} \, dx$	b. $\int_0^\infty (8 - x^3)^{-1/3} \, dx$
c. $\int_0^\infty e^{-x^3} x^{-1/2} \, dx$	d. $\int_0^\infty x^6 e^{-2x} \, dx$
e. $\int_a^\infty \frac{e^{-pt}}{\sqrt{t}} \, dt$	f. $\int_a^\infty \frac{x}{1+x^6} \, dx$
g. $\int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{3t-t^2}}$	h. $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{-\log t}}$

2. நிரூபி $\int_0^1 t^m (\log t)^n \, dt = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(m+1)^{n+1}}$ இங்கு n என்பது மிகை முழு மற்றும் $m > -1$.

3. நிரூபி $\int_0^\infty \frac{t^{m-1}}{(a+bt)^{m+n}} \, dt = \frac{B(m, n)}{a^n b^m}$, இங்கு m, n, a மற்றும் b என்பன மிகை முழுக்கள்.

4. நிரூபி $\int_0^\pi \sqrt{\frac{\sin \theta}{(5+3\cos \theta)^n}} \, d\theta = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2}{2\sqrt{2}\pi}$

5. பின்வரும் தொகையீடுகளுக்கு மதிப்பு காண் :

$$\text{i. } \int_0^1 \frac{dx}{(1-x^n)^{1/n}} \quad \text{ii. } \int_0^1 x^m (1-x^m)^p dx \quad \text{iii. } \int_0^1 \frac{dt}{(1-t^n)^{1/2}} \quad \text{iv. } \int_0^1 x^m e^{-ax^n} dx$$

6. மதிப்பீடு i. $\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)$ ii. $\Gamma\left(-\frac{15}{2}\right)$

7. பின்வரும் தொகையீடுகளுக்கு மதிப்பு காண்:

$$\text{i. } \int_0^1 \sqrt{1-x^4} dx \quad \text{ii. } \int_0^1 \frac{x^{m-1}}{(1+ax)(1-x)^m} dx \quad \text{iii. } \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx \times \int_0^{\pi/2} \sin^{q+1} x dx$$

$$8. \text{ நிரூபி } 1.3.5 \dots (2m-1) = \frac{2^m \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}$$

$$9. \text{ நிரூபி } \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cot \theta} d\theta = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$10. \text{ நிரூபி } \int_0^{\pi/2} (\sqrt{\tan \theta} + \sqrt{\sec \theta}) d\theta = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) + \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$$

விடைகள் 1.6

$$1. \quad \text{a. } \frac{\sqrt{\pi}}{3} \quad \text{b. } \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \quad \text{c. } \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \quad \text{d. } \frac{45}{8}$$

$$\text{e. } \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{2}}, p > 0 \quad \text{f. } \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \quad \text{g. } \pi \quad \text{h. } \sqrt{\pi}$$

$$5. \quad \text{i. } \frac{\pi}{n} \sin \frac{\pi}{n} \quad \text{ii. } \frac{\Gamma(p+1) \Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)}{n \Gamma\left(p+1 + \frac{m+1}{n}\right)}$$

$$\text{iii. } \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\pi \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)} \quad \text{iv. } \frac{1}{na^{(m+1)/n}} \Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$$

$$6. \quad \text{i. } \frac{8}{15} \sqrt{\pi} \quad \text{ii. } \frac{2^8 \sqrt{\pi}}{1.3.5.7 \dots 15}$$

$$7. \quad \text{i. } \frac{[\Gamma(1/4)]^2}{6\sqrt{2\pi}} \quad \text{ii. } \frac{1}{(1+a)^m} \cdot \frac{\pi}{\sin m\pi} \quad \text{iii. } \frac{\pi}{2(q+1)}$$

சுவராஸ்யமான உண்மை

ஃபெய்ன்மேன் வரைபடங்களிலிருந்து (துணைத் துகள்களின் சித்திர பிரதிநிதித்துவத்தை உள்ளடக்கியது), மேக்ஸ்வெல் - போல்ட்ஸ்மேன் புள்ளிவிவரங்கள் மற்றும் பரவல்கள் மூலக்கூறுகளின் வேகத்தை நிர்ணயிக்க இயற்பியல், வேதியியல் மற்றும் புள்ளியியல் இயக்கவியலில் பயன்படுத்தப்படுகிறது), இந்த செயல்பாடுகளில் சில உண்மையான நில பயன்பாடுகள் உள்ளன.

**அன்றாட வாழ்வில் பயன்பாடுகள்**

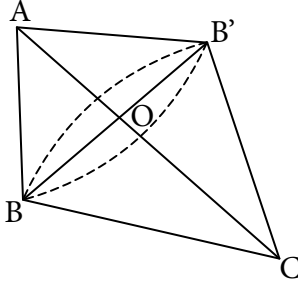
- ◆ வலுவான அணு சக்திகளில் இது பல பயன்பாடுகளைக் கொண்டுள்ளது.
- ◆ நேர மேலாண்மை சிக்கல்களை தீர்க்கும்போது, பீட்டா பரவல்கள் பயன்படுத்தப்படுகிறது.
- ◆ காமா செயல்பாடு, எந்த நேரத்தின் ஆயுட்காலம் போன்ற நேர அடிப்படையிலான நிகழ்வுகளைக் கண்டறியப் பயன்படுகிறது.
- ◆ ஒரு கனசதுரம் ஒரு கோணத்திலோ அல்லது ஒரு கனசதுரமோ பொருந்துவதற்கு பயன்படும்.

1.4 வரையறுத்த தொகையீடுகளின் பயன்பாடுகளைக் கொண்டு சுழற்சியின் மேற்பரப்பு மற்றும் கன அளவை மதிப்பீடல்

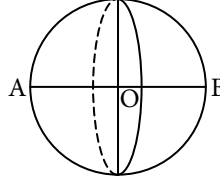
ஒரு தளத்தின் பரப்பானது, அதன் சொந்த தளத்தில் உள்ள நிலையான கோட்டினைப் பற்றி சுழலுமேயானால், தள பரப்பினால் உருவாக்கப்பட்ட உருவம் சுழற்சியின் திடத்தின் கனஅளவு எனவும், மேற்பரப்பு சுழற்சியின் மேற்பரப்பு எனவும் அழைக்கப்படும். மேலும் சுழலும் திடத்தை பொருத்து, நிலையான கோடு சுழற்சியின் அச்ச என்று அழைக்கப்படும்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

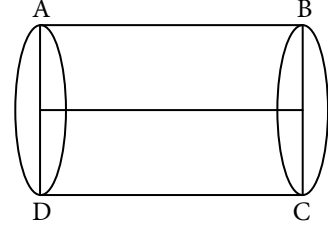
1. ஒரு கோண முக்கோணம் அதன் ஹைபோடெனியூஸைப் பற்றி சுழலும் போது, இரட்டை கூம்பு உருவாகிறது.
2. ஒரு வட்டத்தை அதன் விட்டம் பற்றி சுழற்றும்போது, ஒரு கோளம் உருவாக்கப்படுகிறது.
3. ஒரு சதுரத்தை அதன் எந்தப் பக்கத்திலும் சுழற்றும்போது, வலது வட்ட உருளை உருவாக்கப்படும்.



படம் 1.17



படம் 1.18

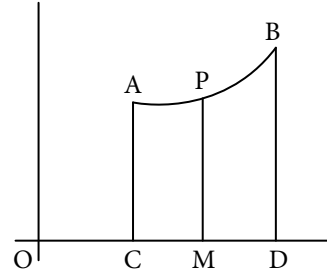


படம் 1.19

1.4.1 சுழற்சியின் திடப்பொருட்களின் கனஅளவுகள்

1.4.1.1 கார்டீசியன் வளைவரைகளுக்கு

1. **x- அச்சைப் பொருத்து சுழலும் போது :** $y = f(x)$, x- அச்ச மற்றும் ஆயத் தொலைவுகள், $x = a$, $x = b$ ஆகியவற்றால் வரையறுக்கப்பட்ட பகுதியின் x- அச்ச பற்றிய சுழற்சியின் மூலம் உருவாக்கப்பட்ட திடத்தின் அளவு $\int_a^b \pi y^2 dx$ ஆகும்.
2. **y-அச்சைப் பொருத்து சுழலும் போது :** $x = f(y)$, y- அச்ச மற்றும் $y = a$, $y = b$ மற்றும் அப்சிசாஸ் (abscissas) ஆகியவற்றால் வரையறுக்கப்பட்ட பகுதியின் x- அச்ச பற்றிய சுழற்சியின் மூலம் உருவாக்கப்பட்ட திடத்தின் அளவு $\int_a^b \pi x^2 dy$ ஆகும்.
3. **எந்த அச்சையும் பொருத்து சுழலும் போது:** AB, அச்ச குறுவட்டு மற்றும் செங்குத்தாக AC, BD யின் எல்லையில் உள்ள பகுதியின் எந்த அச்ச குறுவட்டு பற்றிய சுழற்சியால் உருவாக்கப்பட்ட திடப்பொருளின் தொகுதி $\int_{OC}^{OD} \pi (PM)^2 d(OM)$ ஆகும். CD மற்றும் BM CD ல் வளைவு AB யின் எந்தப் புள்ளியிலிருந்தும் செங்குத்தாக இருக்கும்.



படம் 1.20

1.4.1.2 அளவுரு வளைவரைகளுக்கு

1. $x = f(t)$, $y = \phi(t)$, x- அச்ச மற்றும் ஆயத் தொலைவுகள், $t = a$, $t = b$ ஆகியவற்றால் வரையறுக்கப்பட்ட பகுதியின் x-அச்ச பற்றிய சுழற்சியின் மூலம் உருவாக்கப்பட்ட திடத்தின் அளவு $\int_a^b \pi x^2 \frac{dy}{dt} dt$ ஆகும்.
2. $x = f(t)$, $y = \phi(t)$, $y - x = f(y)$, y- அச்ச மற்றும் $t = a$, $t = b$ மற்றும் அப்சிசாஸ் (abscissas) ஆகியவற்றால் வரையறுக்கப்பட்ட பகுதியின் x- அச்ச பற்றிய சுழற்சியின் மூலம் உருவாக்கப்பட்ட திடத்தின் அளவு $\int_a^b \pi y^2 \frac{dy}{dt} dt$ ஆகும்.
3. இரண்டு திடப்பொருட்களுக்கிடையேயான சுழற்சியின் திடப்பொருளின் அளவு : $y = f_1(x)$ மற்றும் $y = f_2(x)$ வளைவரைகளால் வரையறுக்கப்பட்ட பகுதியின் x - அச்ச பற்றி சுழற்சியால்

உருவாக்கப்பட்ட திடத்தின் அளவு மற்றும் ஒழுங்கு $x = a$, $x = b$ என்பது $\int_a^b \pi [f_1^2(x) - f_2^2(x)] dx$ என்பது மேல் வளைவின் கட்டளைகள் $f_1(x)$ மற்றும் $f_2(x)$ என்பது கீழ் வளைவு ஆகும்.

1.4.1.3 துருவ வளைவரைகளுக்கு

வளைவுவரை $r = f(\theta)$ மற்றும் ஆரம் திசையன்கள் ஆகியவற்றுக்கு இடைப்பட்ட பகுதியின் சுழற்சியால் உருவாகும் திடப்பொருளின் கனஅளவு

i. ஆரம்ப கோட்டைப் பொருத்து OX ($\theta = 0$), $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{2}{3} \pi r^3 \sin \theta d\theta$

ii. OY கோட்டைப் பொருத்து $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right) \int_{\alpha}^{\beta} \frac{2}{3} \pi r^3 \cos \theta d\theta$,

1.4.2 சுழற்சியின் திடமான மேற்பரப்பு பகுதிகள்

1.4.2.1 கார்டீசியன் வளைவரைகளுக்கு

வளைவரை $y = f(x)$, x - அச்ச மற்றும் ஆயத் தொலைவுகள் $x = a$, $x = b$ ஆகியவை X -அச்ச பற்றிய சுழற்சியால் உருவாக்கப்பட்ட திடப்பொருளின் வளைந்த மேற்பரப்பு $\int_a^b 2\pi y \frac{ds}{dx} dx$, இங்கு $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

1.4.2.2 அளவுரு வளைவரைகளுக்கு

வளைவரை $x = f(t)$, $y = \phi(t)$, x - அச்ச மற்றும் ஆயத் தொலைவுகள் $t = a$, $t = b$ ஆகியவை x -அச்ச பற்றிய சுழற்சியால் உருவாக்கப்பட்ட திடப்பொருளின் வளைந்த மேற்பரப்பு

$$\int_a^b 2\pi y \frac{ds}{dt} dt, \text{ இங்கு } \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

1.4.2.3 துருவ வளைவரைகளுக்கு

வளைவுவரை $r = f(\theta)$ மற்றும் ஆரம் திசையன்கள் $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ ஆகியவற்றுக்கு இடைப்பட்ட பகுதியின் ஆரம்ப கோட்டைப் பொருத்து சுழலுவதால் உருவாகும் திடப்பொருளின் மேற்பரப்பு

$$\int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} 2\pi y \frac{ds}{d\theta} d\theta \text{ இங்கு } \frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} \text{ மேலும் } y = r \sin \theta.$$

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1.69 : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள்வட்டத்தை பெருஅச்சைப் பொருத்து சுழற்றுவதால் அடைய பெறும் திடப்பொருளின் கன அளவைக் காண்க.

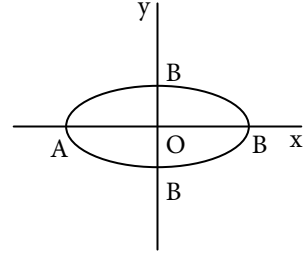
தீர்வு : நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு ஆனது $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2}$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2)$$

இந்த நீள் வட்டமானது y அச்சைப் பொருத்து சமச்சீர் ஆகும் தேவையானது : x -அச்சைப் பொருத்த வட்டத்தினால் பெறப்பட்ட திடப்பொருளின் கன அளவு

$$\begin{aligned} &= 2 \int_0^a \pi y^2 dx = 2\pi \int_0^a \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) dx \\ &= 2\pi \frac{b^2}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2) dx = 2\pi \frac{b^2}{a^2} \left[a^2x - \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{4}{3} \pi ab^2 \text{ (விடை)} \end{aligned}$$



படம் 1.21

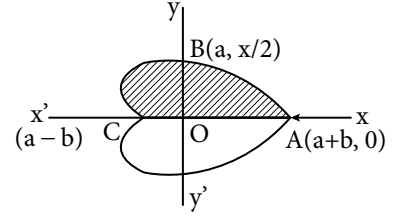
எடுத்துக்காட்டு 1.70 : தொடக்கநிலை கோட்டினை சுழற்றுவதனால் பெறப்பட்ட $r = a + b \cos \theta$, $a > b$ என்ற லிமாகானின் (limacon) கன அளவைக் காண்க.

தீர்வு : ஆரம்பக் கோட்டிற்கு மேலே உள்ள நிழல் பகுதியை மட்டும் நாம் சுழற்றுவோம்

$$V = \frac{2}{3} \pi \int_0^\pi (a + b \cos \theta)^2 \sin \theta d\theta$$

$$a + b \cos \theta = t \Rightarrow b \sin \theta d\theta = -dt$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{3} \pi \int_{a+b}^{a-b} t^2 \left(-\frac{dt}{b} \right) \\ &= -\frac{2}{3} \pi \left[\frac{t^3}{3} \right]_{a+b}^{a-b} = -\frac{2\pi}{3b} \left[\frac{-6a^2b - 2b^3}{3} \right] \\ &= \frac{4}{9} \pi (b^2 + 3a^2) \text{ (விடை)} \end{aligned}$$



படம் 1.22

எடுத்துக்காட்டு 1.71 : $(a-x)y^2 = (a+x)x^2$ என்ற வளைவின் வளைவரையத்தை x - அச்சைப் பொருத்து சுழற்றுவதனால் பெறப்பட்ட திடப்பொருளின் கன அளவைக் காண்க.

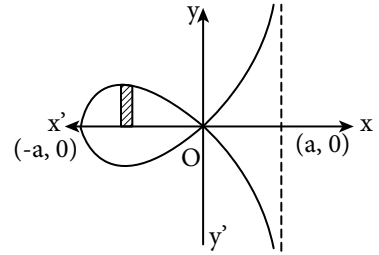
தீர்வு : வளைவின் வடிவம் படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளது வளைவு x - அச்ச பற்றி சமச்சீராக உள்ளது

$$\therefore \text{ தேவையான கன அளவு } V = \int_{-a}^0 \pi y^2 dx = \int_{-a}^0 \pi \frac{(a+x)}{(a-x)} x^2 dx$$

$$a - x = z, dx = -dz \text{ என எடுத்துக் கொள்வோம்}$$

$$x = -a, z = 2a$$

$$x = 0, z = a$$

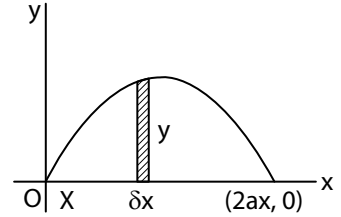


படம் 1.23

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_{2a}^a \frac{(a + a - z)}{z} (a - z)^2 (-dz) = \pi \int_a^{2a} \frac{2a - z}{z} (a - z)^2 dz \\
 &= \pi \int_a^{2a} \frac{2a - z}{z} (a^2 + z^2 - 2az) dz \\
 &= \pi \int_a^{2a} \left[\frac{2a^3}{z} + 2az - 4a^2 - a^2 - z^2 + 2az \right] dz \\
 &= \pi \int_a^{2a} \left[\frac{2a^3}{z} + 4az - z^2 - 5a^2 \right] dz = \pi \left[2a^3 \log z + 2az^2 - \frac{z^3}{3} - 5a^2 z \right]_a^{2a} \\
 &= \pi \left[\left\{ 2a^3 \log 2a + 2a(2a)^2 - \frac{(2a)^3}{3} - 5a^2(2a) \right\} - \left\{ 2a^3 \log a + 2a^3 - \frac{a^3}{3} - 5a^3 \right\} \right] \\
 &= 2\pi a^3 \left[\log 2 - \frac{2}{3} \right] \text{ (விடை)}
 \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 1.72 : $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$ என்ற வட்டப்புள்ளியுரு (Cycloid) ஒரு முழுமையான வளைவின் கீழ் பகுதி x- அச்சைப் பொருத்து சுழற்றுவதனால் பெறப்பட்ட திடப்பொருளின் கன அளவைக் காண்க.

தீர்வு : வளைவின் கீழ் உள்ள பகுதியை dx அகலமான கோடுகளால் n வகுக்கப்படட்டும் || y -அச்ச மற்றும் y க்கு y -அச்சில் இருந்து x தொலைவில் உள்ள வழக்கமான பட்டையின் உயரம்



படம் 1.24

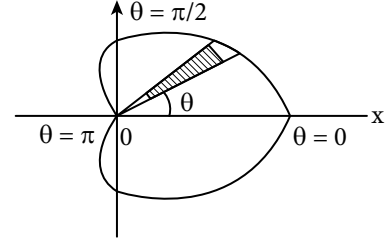
$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^{2\pi} \pi y^2 dx = \int_0^{2\pi} \pi a^2 (1 - \cos \theta)^2 a(1 - \cos \theta) d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \pi a^3 (1 - \cos \theta)^3 d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \pi a^3 \times \left(2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)^3 d\theta \\
 &= 8\pi a^3 \int_0^{2\pi} \sin^6 \left(\frac{\theta}{2} \right) d\theta = 16\pi a^3 \int_0^{\pi} \sin^6 \phi d\phi \quad [\theta = 2\phi] \\
 &= 32\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^6 \phi d\phi \quad [\because \sin(\pi - \phi) = \sin \phi] \\
 &= 32\pi a^3 \frac{5 \times 3 \times 1}{6 \times 4 \times 2} \cdot \frac{\pi}{2} = 5\pi^2 a^3 \text{ (விடை)}
 \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 1.73 : $r = a(1 + \cos \theta)$ என்ற நெஞ்சுவளை (cardioid) தொடக்கநிலை கோட்டினைப் பொருத்து சுழற்றுவதனால் பெறப்பட்ட திடப்பொருளின் கன அளவைக் காண்க.

தீர்வு : பெறப்பட்ட கன அளவு (V)

$$= \frac{2}{3} \pi \int_0^{\pi} r^3 \sin \theta d\theta$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{3} \pi \int_0^{\pi} a^3 (1 + \cos\theta)^3 \sin\theta \, d\theta \\
 &= -\frac{2}{3} \pi \int_0^{\pi} a^3 (1 + \cos\theta)^3 (-\sin\theta) \, d\theta \\
 &= -\frac{2}{3} \pi a^3 \left[\frac{(1 + \cos\theta)^4}{4} \right]_0^{\pi} \\
 &= \frac{2}{3} \pi a^3 \left[\frac{(1 + 1)^4}{4} \right] = \frac{9}{3} \pi a^3 \text{ (விடை)}
 \end{aligned}$$



படம் 1.25

எடுத்துக்காட்டு 1.74 : $y^2 (2a - x) = x^3$ என்ற சிஸ்சோய்டு (cissoids)

அதனுடைய தொலைத் தொடுகோட்டினைப் பொருத்து சுழற்றுவதனால் பெறப்பட்ட திடப்பொருளின் கன அளவு $2\pi^2 a^3$ என காட்டுக.

நிரூபணம் : சிஸ்சோய்டின் தொலைத் தொடு $x = 2a$

$$\text{தேவையான கன அளவு } V = 2\pi \int_0^{2a} (2a - x)^2 \, dy \quad \dots(1)$$

வளைவின் சமன்பாட்டிலிருந்து,

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{x^{3/2}}{\sqrt{2a - x}} \\
 \frac{dy}{dx} &= \frac{(3a - x)\sqrt{x}}{(2a - x)^{3/2}} \\
 dy &= \frac{(3a - x)\sqrt{x}}{(2a - x)^{3/2}} \, dx
 \end{aligned}$$

$$0 < y < \theta \text{ எனும்போது } 0 < x < 2a$$

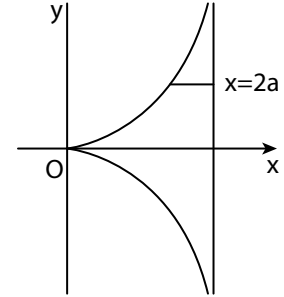
$$\begin{aligned}
 V &= 2\pi \int_0^{2a} (2a - x)^2 \, dy = 2\pi \int_0^{2a} (2a - x)^2 \frac{(3a - x)\sqrt{x}}{(2a - x)^{3/2}} \, dx \\
 &= 2\pi \int_0^{2a} (a - x) \sqrt{2ax - x^2} \, dx + 4\pi a \int_0^{2a} \sqrt{2ax - x^2} \, dx \\
 x &= 2a \sin^2\theta \text{ எனப் பிரதியிட,}
 \end{aligned}$$

$$\int_0^{2a} \sqrt{2ax - x^2} \, dx = \int_0^{\pi/2} 2a \times 4a \sin^2\theta \cos^2\theta \, d\theta = \pi \frac{a^2}{2}$$

$$\therefore V = \pi \left[\frac{(2ax - x^2)^{3/2}}{3/2} \right]_0^{2a} + 4\pi a \frac{\pi a^2}{2} = 0 + 2\pi^2 a^3 = 2\pi^2 a^3 \text{ (நிரூபிக்கப்பட்டது)}$$

எடுத்துக்காட்டு 1.75 : நாண் பற்றி வலது வலது பரவளையம் $y^2 = 4ax$ செவ்வகலத்தின் (latus rectum) ஒரு முனை வரை நாண் பற்றி நான்கு வலது கோணங்கள் வழியாக துண்டிக்கப்பட்டு உருவாக்கப்பட்ட திடத்தின் அளவைக் கண்டறியவும்

தீர்வு : பரவளையத்தின் சமன்பாடு $y^2 = 4ax$ B-ன் ஆயத் தொலைவுகள் $(a, 2a)$ எனவே OB-ன் சமன்பாடு,



படம் 1.26

$$y - 0 = \frac{2a - 0}{a - 0} (x - 0)$$

$$\Rightarrow 2x - y = 0$$

$P(at^2, 2at)$ என்பது OB என்ற வில்லின் மேல் உள்ள புள்ளி எனவும், PM என்பது P -லிருந்து OB க்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோடு எனவும் எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$PM = \frac{2at^2 - 2at}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{2at(t - 1)}{\sqrt{5}}$$

$$OP = \sqrt{(at^2 - 0)^2 + (2at - 0)^2} = at\sqrt{t^2 + 4}$$

$$OM^2 = OP^2 - PM^2 = a^2 t^2 (t^2 + 4) - \frac{4a^2 t^2 (t - 1)^2}{5}$$

$$OM^2 = \frac{a^2 t^2 (t + 4)^2}{5}$$

$$OM = \frac{at(t + 4)}{\sqrt{5}}$$

தேவையான கன அளவு

$$V = \int_{t=0}^1 \pi (PM)^2 d(OM) = \pi \int_0^1 \frac{4a^2 t^2 (t - 1)^2}{5} \left(\frac{at(t + 4)}{\sqrt{5}} \right)$$

$$= \frac{4\pi a^3}{5\sqrt{5}} \int_0^1 t^2 (t^2 - 2t + 1) (2t + 4) dt$$

$$= \frac{4\pi a^3}{5\sqrt{5}} \int_0^1 (2t^5 - 6t^3 + 4t^2) dt = \frac{2\pi a^3}{15\sqrt{5}}$$

(நிரூபிக்கப்பட்டது)

எடுத்துக்காட்டு 1.76 : $x^2 + 4y^2 = 16$ என்ற நீள்வட்டத்தை பெருஅச்சைப் பொருத்து சுழற்றுவதால் அடைய பெறும் திடப்பொருளின் மேற்பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு : நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + 4y^2 = 16$

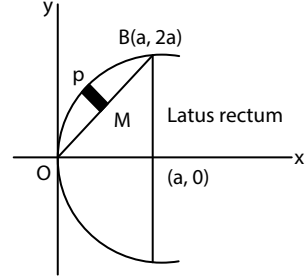
$$4y^2 = 16 - x^2$$

$$\therefore y = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-2x}{\sqrt{16 - x^2}} = -\frac{x}{2\sqrt{16 - x^2}}$$

$$dy = -\frac{x}{2\sqrt{16 - x^2}}$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{4(16 - x^2)}} = \sqrt{\frac{64 - 3x^2}{4(16 - x^2)}}$$



படம் 1.27

$x^2 + 4y^2 = 16$ என்ற நீள்வட்டமானது, x அச்சில் $y = 0$ ல் சந்திக்கும்பொழுது

$$x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$$

முதல் கால்வட்டத்தில் நீள்வட்டத்தின் மேல் பாதியில் x ஆனது 0 முதல் 4 வரை மாறுபடும். நீள்வட்டமானது y - அச்சு பற்றி சமச்சீராக உள்ளது

$\therefore$ தேவையான மேற்பரப்பு

$$\begin{aligned} &= 2 \times \int_0^4 2\pi y \frac{ds}{dx} dx = 4\pi \int_0^4 \frac{\sqrt{16-x^2}}{2} \times \sqrt{\frac{64-3x^2}{4(16-x^2)}} dx \\ &= \pi \int_0^4 \sqrt{64-3x^2} dx = \sqrt{3} \pi \int_0^4 \sqrt{\frac{64}{3}-x^2} dx \\ &= \sqrt{3} \pi \left[\frac{x}{2} \sqrt{\frac{64}{3}-x^2} + \frac{64}{3 \times 2} \sin^{-1} \frac{\sqrt{3}x}{8} \right]_0^4 \\ &= \sqrt{3} \pi \left[2 \sqrt{\frac{64}{3}-16} + \frac{32}{3} \sin^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \\ &= \sqrt{3} \pi \left[2 \times \frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{32}{3} \times \frac{\pi}{2} \right] = 8\pi \left[1 + \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \right] \text{ (விடை)} \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 1.77 : $y = \sin x$ என்ற வளைவரையின் ஒரு வில் x - அச்சைப் பொருத்து சுழற்றுவதால் அடைய பெறும் திடப்பொருளின் மேற்பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு : $y = \sin x$ என்ற வளைவரையின் ஒரு வில் $x = 0$ மற்றும் $x = \pi$ ஆகியவற்றுக்கு இடைப்பட்ட ஒரு பகுதியாகும்.

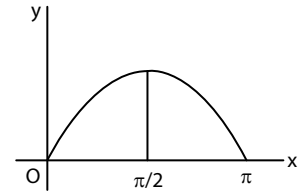
$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \cos^2 x}$$

$$\text{தேவையான மேற்பரப்பு} = 2\pi \int_0^\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$= 2\pi \int_0^\pi \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx \quad [t = \cos t \Rightarrow dt = -\sin t dt]$$

$$= -2\pi \int_1^{-1} \sqrt{1+t^2} dt = 2\pi \int_1^{-1} \sqrt{1+t^2} dt = 2\pi \left[\frac{t\sqrt{1+t^2}}{2} + \frac{1}{2} \sinh^{-1}(t) \right]_{-1}^1$$

$$= \pi [\{\sqrt{2} + \sinh^{-1}(1)\} - \{-\sqrt{2} - \sinh^{-1}(1)\}] = 2\pi [\sqrt{2} + \sinh^{-1}(1)] \text{ (விடை)}$$



படம் 1.28

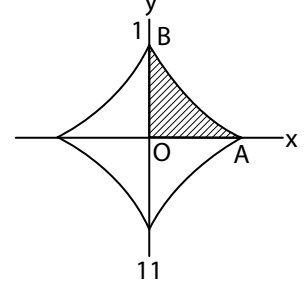
எடுத்துக்காட்டு 1.78 : $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ என்ற உடுவரு x -அச்சைப் பொறுத்து சுழற்றுவதால் அடைய பெறும் திடப்பொருளின் மேற்பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு : நிழலிடப்பட்டுள்ள பரப்பு OAB , x -அச்சின்மேல் சுழல்வதாகக் கொள்வோம்.

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \\ &= \sqrt{(-3a \cos^2 t \sin t)^2 + (3a \sin^2 t \cos t)^2} \\ &= \sqrt{9a^2 \cos^2 t \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)} \\ &= 3a \cos t \sin t\end{aligned}$$

தேவையான மேற்பரப்பு

$$\begin{aligned}&= 2 \int_0^{\pi/2} 2\pi y \frac{ds}{dt} dt = 4\pi \int_0^{\pi/2} a \sin^3 t \times 3a \cos t \sin t dt \\ &= 12\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos t dt \\ &= 12\pi a^2 \left[\frac{\sin^5 t}{5} \right]_0^{\pi/2} = \frac{12}{5} \pi a^2\end{aligned}$$



படம் 1.29

எடுத்துக்காட்டு 1.79 : ஆரம் 'a' உள்ள வட்டத்தின் ஒரு நாற்கரம் அதன் முனைகள் தொடுகளால் பிணைக்கப்பட்டு தொடுகோட்டைச் சுற்றி வருகிறது. அவ்வாறு உருவாக்கப்பட்ட மேற்பரப்புகளின் பரப்பளவு $\pi (\pi - 2) a^2$ என்பதைக் காட்டுங்கள்.

நிரூபணம் : வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 = a^2 \text{ (or) } x = a \cos t, y = a \sin t$$

மேலும் P(x, y) என்பது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்போம்

$$PM = NA = a - x = a - a \cos t = a(1 - \cos t)$$

$$\therefore \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t} = a$$

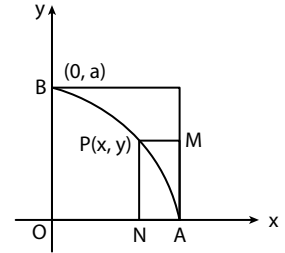
$$\text{தேவையான மேற்பரப்பு} = \int_0^{\pi/2} 2\pi (PM) \times \frac{ds}{dt} \times dt$$

$$= 2\pi a^2 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos t) dt$$

$$= 2\pi a^2 [t - \sin t]_0^{\pi/2}$$

$$= 2\pi a^2 \left[\frac{\pi}{2} - 1 \right]$$

$$= \pi a^2 (\pi - 2) \text{ (நிரூபிக்கப்பட்டது)}$$



படம் 1.30

எடுத்துக்காட்டு 1.80 : $r = a(1 + \cos \theta)$ என்ற நெஞ்சுவளை (cardioid) தொடக்கநிலை கோட்டினைப் பொருத்து சுழற்றுவதனால் பெறப்பட்ட திடப்பொருளின் மேற்பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு : இதய வடிவான வளைவு ஆரம்ப வரியைப் பற்றி சமச்சீராக உள்ளது. மற்றும் அதன் மேல் பாதியில், θ ஆனது 0 முதல் π வரை மாறுபடும்.

$$\begin{aligned}\frac{ds}{d\theta} &= \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{a^2(1 + \cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta} \\ &= a\sqrt{2(1 + \cos\theta)} = a\sqrt{4\cos^2(\theta/2)} = 2a \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{aligned}$$

தேவையான மேற்பரப்பு

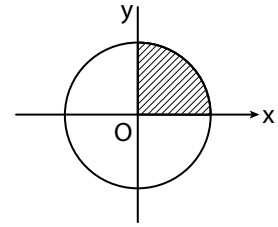
$$\begin{aligned}S &= \int_0^\pi 2\pi y \frac{ds}{d\theta} d\theta = 2\pi \int_0^\pi r \sin\theta \times 2a \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta \quad [\because x = r\cos\theta, y = r\sin\theta] \\ &= 4\pi a \int_0^\pi a(1 + \cos\theta) \sin\theta \cos\frac{\theta}{2} d\theta \\ &= 4\pi a^2 \int_0^\pi 2\cos^2\frac{\theta}{2} \times 2 \sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2} \times \cos\frac{\theta}{2} d\theta \\ &= 16\pi a^2 \int_0^\pi \cos^4\frac{\theta}{2} \sin\frac{\theta}{2} d\theta \\ &= 16\pi a^2 (-2) \int_0^\pi \cos^4\frac{\theta}{2} \left(-\sin\frac{\theta}{2} \times \frac{1}{2}\right) d\theta \\ &= -32\pi a^2 \left[\frac{\cos^5\frac{\theta}{2}}{5}\right]_0^\pi = -\frac{32\pi a^2}{5} (0 - 1) = \frac{32\pi a^2}{5} \text{ (விடை)}\end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 1.81 : ஆரம் a உடைய கோளத்தின் கன அளவைக் காண்க. வட்டத்தின் சமன்பாடு $r = a$.

தீர்வு : வட்டத்தின் சமன்பாடு $r = a$. நிழலிடப்பட்டுள்ள பரப்பு, x -அச்சின் மேல் சுழல்வதாகக் கொள்வோம்.

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{a^2 + 0} = a$$

$$\begin{aligned}S &= 2 \int_0^{\pi/2} 2\pi r \sin\theta \frac{ds}{d\theta} d\theta \\ &= 4\pi \int_0^{\pi/2} a \sin\theta \times a d\theta \\ &= 4\pi \int_0^{\pi/2} a^2 \sin\theta d\theta \\ &= 4\pi a^2 [-\cos\theta]_0^{\pi/2} \\ &= 4\pi a^2 \text{ (விடை)}\end{aligned}$$



படம் 1.31

பயிற்சி 1.7

1. x -அச்சைப் பொருத்து ஆஸ்ட்ராய்டு $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ இன் சுழற்சியால் உருவாக்கப்பட்ட திடப்பொருளின் பரப்பளவைக் காண்க.
2. x -அச்சைப் பொருத்து $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$ என்ற வட்டப்புள்ளியருவின் (Cycloid) சுழற்சியால் உருவாகும் திடப்பொருளின் மேற்பரப்புப் பகுதியைக் காண்க.
3. ஆரம்ப கோட்டைப் பொருத்து வளைவரை $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ இன் சுழற்சியால் உருவாக்கப்பட்ட மேற்பரப்பின் பரப்பளவை தீர்மானிக்கவும்.
4. x -அச்சைப் பொருத்து $y^2(a + x) = x^2(a - x)$ வளைவரையின் சுழற்சியால் உருவான திடத்தின் கனஅளவைக் காண்க.
5. $x = a \cos 3\theta$, $y = a \sin 3\theta$ x வளைவரையின் வில் ஆனது x அச்சில் $\theta = -\pi/2$, $\theta = \pi/2$ இடையே சுழல்கிறது. அவ்வாறு உருவாக்கப்பட்ட திடத்தின் கனஅளவைக் காண்க.
6. x -அச்சு பற்றி $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $x = 0$, $y = 0$ என்ற வளைவரையால் வரையறுக்கப்பட்ட பகுதியை சுழற்றுவதன் மூலம் உருவாக்கப்பட்ட கனஅளவைக் காண்க.
7. x -அச்சைப் பொருத்து $27ay^2 = 4(x - 3a)^2$ என்ற வளைவரையின் சுழற்சியால் உருவான கனஅளவைக் காண்க.
8. $y^2 = 4ax$ மற்றும் $x = 3a$ ஆகியவற்றுக்கு இடைப்பட்ட பகுதியை x - அச்சில் சுழற்றும்போது, உருவான கனஅளவைக் காண்க.
9. $y^2 = x^3$, $x^2 = y^3$ என்ற வளைவரைகளுக்கு இடையில் உள்ள பகுதியை x -அச்சைப் பொருத்து சுழற்றுவதனால் பெறப்பட்ட திடப்பொருளின் கன அளவு $\frac{5\pi}{28}$ என இருப்பதைக் காட்டுங்கள்.
10. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள்வட்டத்தை பெருஅச்சைப் பொருத்து சுழற்றுவதால் உருவான நீள்வட்டத்தின் மேற்பரப்பு மற்றும் கன அளவைக் கண்டறியவும்.
11. செவ்வகலத்தால் வெட்டப்பட்ட பரவளையம் $y^2 = 4ax$ ன் பகுதி உச்சியில் தொடுகோட்டைச் சுற்றி வருகிறது. இவ்வாறு உருவாக்கப்பட்ட பொய்யான பகுதியின் கனஅளவைக் காண்க.
12. செவ்வகலத்தால் வெட்டப்பட்ட பரவளையம் $y^2 = 4ax$ ன் பகுதி உச்சியில் தொடுகோட்டைச் சுற்றி வருகிறது. இவ்வாறு உருவாக்கப்பட்ட பகுதியின் மேற்பரப்பைக் காண்க.
13. வளைவரை $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ க்கு, ஆரம்ப கோட்டைப் பொருத்து சுழற்சியின் கனஅளவு $\left[\frac{\pi a^2}{6\sqrt{2}} 3 \log(\sqrt{2} + 1) - \sqrt{2} \right]$ என்பதை நிரூபிக்கவும்.
14. வளைவரை $\frac{y+8}{x} = x-2$ மற்றும் x -அச்சு ஆகியவற்றுக்கு இடையே உள்ள பகுதியை $x+5 = 0$ என்ற கோட்டைப் பொருத்து சுழற்றுவதன் மூலம் உருவாக்கப்பட்ட திடத்தின் கனஅளவைக் காண்க.

15. x - அச்சைப் பொருத்து $3ay^2 = x(x - a)^2$ என்ற வளைவரையின் ஒரு முழுமையான வளைவை சுழற்றுவதனால் உருவான திடப்பொருளின் மேற்பரப்பைக் காண்க.
16. x - அச்சைப் பொருத்து $x = t^2, y = \frac{t^3}{3}$ என்ற வளைவரையின் ஒரு முழுமையான வளைவை சுழற்றுவதனால் உருவான திடப்பொருளின் கனஅளவு மற்றும் மேற்பரப்பைக் காண்க.
17. ஆரம் ' a ' வட்டத்தின் ஒரு நாற்கரம் அதன் நாண் பற்றி சுழல்கிறது. இவ்வாறு உருவாக்கப்பட்ட சுழலின் (spindle) கனஅளவு $\frac{\pi a^3}{6\sqrt{2}} (10 - 3\pi)$ என்று காட்டவும்.

விடைகள் 1.7

1. $\frac{12}{5} \pi a^2$	2. $\frac{64}{3} \pi a^2$	3. $2\pi^2(2 - \sqrt{2})$	4. $2\pi a^3 \left[\log 2 - \frac{2}{3} \right]$
5. $\frac{16\pi a^2}{105}$	6. $\frac{\pi a^2}{12}$	7. $48\pi a^3$	8. $18\pi a^3$
10. $2\pi a^2 = \sqrt{1 - e^2} + e^{-1} \sin^{-1} e$ மற்றும் $\frac{4\pi}{3} ab^2$	11. $\frac{4\pi}{5} a^3$		
12. $\pi a^2 [\sqrt{2} + \log(\sqrt{2} - 1)]$	14. 432π	15. $\frac{4\pi}{\sqrt{3}}$	16. $\frac{3\pi}{4}, 3\pi$

சுவராஸ்யமான உண்மைகள்

- ◆ உங்களுக்குத் தெரியுமா, மின்சுற்றுகளில், இந்தக் கருத்தினால் கணக்கிடக் கூடிய மின்னோட்டத்திற்கும் கட்டணத்திற்கும் இடையே ஒரு உறவு உள்ளது. (<https://www.math24.net/integrals-electric-circuits>)
- ◆ பல்வேறு தொழிற்சாலைகளில் உள்ள பொறியியல் பணி இந்த கருத்தின் அறிவைப் பயன்படுத்தி எந்தவொரு பொருளின் மந்தநிலையின் மையத்தையும் தருணத்தையும் கண்டுபிடிக்கிறது.
- ◆ கட்டிடக் கலைஞர்கள், எந்தவொரு கட்டிடத்தையும் கட்டும்போது இந்தக் கருத்தைப் பயன்படுத்துங்கள்.



Application
of Definite
Integral - I

அன்றாட வாழ்வில் பயன்பாடுகள்

- ♦ இந்த கருத்து வணிக மற்றும் பொருளாதார களத்தில் “லோரன்ஸ் வளைவு மற்றும் ஜினி குணகம்” கணக்கிட பயன்படுத்தப்படுகிறது மற்றும் மொத்த லாபத்தை அதிகரிக்கிறது.
- ♦ எந்தவொரு பொருளின் நிறை மற்றும் அடர்த்தியைக் கண்டறிய இயற்பியலில் பயன்பாடு.
- ♦ சராசரி மாற்றங்கள், தொகுதிகள், பிழை மதிப்பீடுகள் மற்றும் மேற்பரப்பு பகுதிகளைக் கண்டறியவும் இது பயன்படுத்தப்படுகிறது.

அகநிலை தீர்க்கப்பட்ட கேள்விகள் (Subjective Solved Questions)

எடுத்துக்காட்டு 1 : மதிப்பீடு இங்கு $\int_{-3/2}^{10} \{2x\} dx$ என்பது x ன் பின்ன பகுதி ஆகும்.

தீர்வு : $f(x) = \{2x\}$ என்பது காலம் $1/2$ உடன் ஒரு குறிப்பிட்ட கால சார்பு என்பதை நாம் அறிவோம்.

$$\begin{aligned} I &= \int_{-3/2}^{10} \{2x\} dx = \int_{-3(1/2)}^{20(1/2)} \{2x\} dx \text{ என எடுத்துக் கொள்வோம்.} \\ &= 23 \int_0^{1/2} 2x dx \quad (\{2x\} = 2x - [2x] \text{ படி, } x \in [0, 1/2] \text{ எனும்போது } [2x] = 0) \\ &= \left[23x^2 \right]_0^{1/2} \\ &= \frac{23}{4} \text{ (விடை)} \end{aligned}$$

குறிப்புரை : $f(x)$ என்பது காலம் p உடன் ஒரு குறிப்பிட்ட கால சார்பு எனில்

$$\int_{a/np}^{b/np} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx, \quad n \in I$$

எடுத்துக்காட்டு 2 : மதிப்பீடு $\int_{-1}^1 x^3 e^{x^4} dx$.

தீர்வு : $f(x) = x^3 e^{x^4}$ என எடுத்துக் கொள்வோம்

$$\therefore f(-x) = (-x)^3 e^{(-x)^4} = -x^3 e^{x^4} = -f(x)$$

எனவே $f(x)$ ஒரு ஒற்றைப்படைய சார்பு.

$$\therefore \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 x^3 e^{x^4} dx = 0 \text{ (விடை)}$$

எடுத்துக்காட்டு 3 : மதிப்பீடு $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^n)^{1/n}}$.

தீர்வு : $I = \int_0^1 \frac{dx}{(1-x^n)^{1/n}}$ என எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$x^n = \sin^2 \theta \Rightarrow x = \sin^{2/n} \theta \text{ எனப்பிரதியிடக் கிடைப்பது,}$$

$$\begin{aligned}
 dx &= \frac{2}{n} \sin^{\left(\frac{2}{n}-1\right)} \theta \cos \theta d\theta \\
 \therefore I &= \frac{2}{n} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{\left(\frac{2}{n}-1\right)} \theta \cos \theta}{\cos \theta} d\theta = \frac{2}{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{\left(\frac{2}{n}-1\right)} \theta d\theta \\
 &= \frac{2}{n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2n}\right)} \text{ (விடை)}
 \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 4 : மதிப்பீடு $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$.

தீர்வு : $x = a \cos^2 \theta + b \sin^2 \theta$ என எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\begin{aligned}
 dx &= -2a \cos \theta \sin \theta d\theta + 2b \sin \theta \cos \theta d\theta \\
 &= 2(a-b) \sin \theta \cos \theta d\theta \\
 x-a &= a \cos^2 \theta + b \sin^2 \theta - a \\
 &= (b-a) \sin^2 \theta \\
 b-x &= b - a \cos^2 \theta + b \sin^2 \theta \\
 &= (b-a) \sin^2 \theta \\
 \therefore I &= \int_0^{\pi/2} \frac{2(b-a) \sin \theta \cos \theta}{(b-a) \sin \theta \cos \theta} d\theta \\
 &= 2 \int_0^{\pi/2} 1 \cdot d\theta = \pi \text{ (விடை)}
 \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 5 : பொருத்தமான பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தி

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1} \theta \cos^{2y-1} \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt, \quad x, y > 0 \text{ எனக் காட்டுக.}$$

நிரூபணம் : $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{1+z}}$, $\cos \theta = \frac{z^{1/2}}{\sqrt{1+z}}$, என எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\begin{aligned}
 \cos \theta d\theta &= -\frac{1}{2} (1+z)^{-3/2} dz \\
 I &= \int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1} \theta \cos^{2y-1} \theta d\theta \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+z)^{x-1/2}} \cdot \frac{z^{y-1}}{(1+z)^{y-1}} \cdot \frac{1}{(1+z)^{3/2}} \cdot dz \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{z^{y-1}}{(1+z)^{x+y}} dz = \frac{1}{2} B(y, x)
 \end{aligned}$$

ஏற்கனவே,

$$B(x, y) = B(y, x)$$

எனவே

$$I = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{z^{x-1}}{(1+z)^{x+y}} dz = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt \text{ (நிரூபிக்கப்பட்டது)}$$

எடுத்துக்காட்டு 6 : $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$ எனில், $I_n = \left(\frac{n-1}{n}\right) I_{n-2}$ எனக் காட்டுக.

நிரூபணம் :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx \text{ என எடுத்துக் கொள்வோம்.}$$

$$= [-\sin^{n-1} x \cos x]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (n-1) \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx$$

$$= (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) \, dx$$

$$= (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \, dx - (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$$

$$I_n + (n-1) I_n = (n-1) I_{n-2}$$

$$I_n = \left(\frac{n-1}{n}\right) I_{n-2} \text{ (நிரூபிக்கப்பட்டது)}$$

எடுத்துக்காட்டு 7 : செவ்வகலத்தால் வெட்டப்பட்ட பரவளையம் $y^2 = 4ax$ ன் பகுதி உச்சியில் தொடுகோட்டைச் சுற்றி வருகிறது. இவ்வாறு உருவாக்கப்பட்ட பொய்யான பகுதியின் வளைந்த மேற்பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு : பரவளையத்தின் சமன்பாடு $y^2 = 4ax$

$$x \text{ ஐப் பொருத்து வகையிட } \frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y}$$

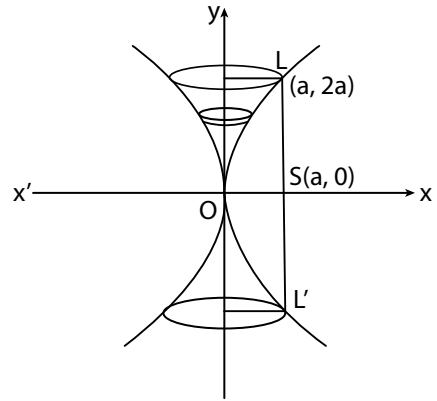
$$\begin{aligned} \frac{ds}{dx} &= \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{4a^2}{y^2}} \\ &= \sqrt{1 + \frac{4a^2}{4ax}} = \sqrt{\frac{x+a}{x}} \end{aligned}$$

தேவையான வளைந்த மேற்பரப்பு வளைவின் LOL' (LOL' செவ்வகலம்), உச்சியில் தொடுதல் அதாவது y -அச்ச மூலம் உருவாக்கப்படுகிறது.

வளைவு x -அச்ச பற்றி சமச்சீர் மற்றும் வளைவு OL -க்கு, $X, 0$ முதல் a வரை மாறுபடும்.

$$\therefore \text{ தேவையான மேற்பரப்பு } S = 2 \int_0^a 2\pi x \frac{ds}{dx} dx$$

$$= 4\pi \int_0^a \left(\frac{x+a}{x}\right) dx = 4\pi \int_0^a \sqrt{x^2 + ax} \, 2x \, dx$$



படம் 1.32

$$\begin{aligned}
 &= 4\pi \int_0^a \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} dx \\
 &= 4\pi \left[\frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{2}\right) \sqrt{x^2 + ax} - \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{4} \log \left\{ \left(x + \frac{a}{2}\right) + \sqrt{x^2 + ax} \right\} \right]_0^a \\
 &= \left[\cdot \int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2} \times \sqrt{x^2 + a^2} - \frac{a^2}{4} \log \left\{ x + \sqrt{x^2 - a^2} \right\} \right] \\
 &= 4\pi \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{3a}{2} a\sqrt{2} - \frac{a^2}{8} \log \left\{ \frac{3a}{2} + a\sqrt{2} \right\} + \frac{a^2}{8} \log \left(\frac{a}{2} \right) \right] \\
 &= 4\pi \left[\frac{3a^2}{4} \sqrt{2} - \frac{a^2}{8} \log \left\{ \frac{\left(\frac{3a}{2} + a\sqrt{2}\right)}{a/2} \right\} \right] \\
 &= \pi a^2 \left[3\sqrt{2} - \frac{1}{2} \log (3 + 2\sqrt{2}) \right] \\
 &= \pi a^2 \left[3\sqrt{2} - \frac{1}{2} \log (\sqrt{2} + 1)^2 \right] \\
 &= \pi a^2 \left[3\sqrt{2} - \log (\sqrt{2} + 1) \right] \text{ (விடை)}
 \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 8 : கூம்பு $z = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}$ மற்றும் பரவளையம் $z = 1 + x^2y^2$ ஆகியவற்றால் வரையறுக்கப்பட்ட திடத்தின் மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் கண்டறியவும்.

தீர்வு : குறிப்பு: துருவ ஆயத்தொலைவுகளுக்கு மாற்றியபின் தீர்வு காண்க

எடுத்துக்காட்டு 9 : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள்வட்டத்தின் பகுதி செவ்வகலத்தால் துண்டிக்கப்பட்டு அருகில் உள்ள உச்சியில் தொடுகோட்டைச் சுற்றி வருகிறது. இவ்வாறு உருவாக்கப்பட்ட பொய்யான பகுதியின் கனஅளவைக் கண்டறியவும்.

தீர்வு : நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

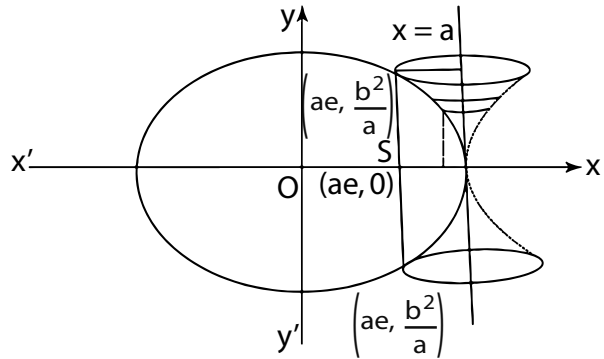
நீள்வட்டத்தின் கவனம் $(ae, 0)$ e என்பது

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \text{ மூலம் கொடுக்கப்பட்ட}$$

விசித்திரத்தன்மை ஆகும்.

ஆரத்தின் வட்டு $(a - x)$ மற்றும் தடிமன் dy வடிவத்தில் ஒரு தொகுதி உறுப்பைக் கவனியுங்கள். இந்த தனிமத்தின் அளவு

$$\pi(a - x)^2 dy$$



படம் 1.33

சுழற்றுவதால் அடைய பெறும் திடப்பொருளின் கன அளவு

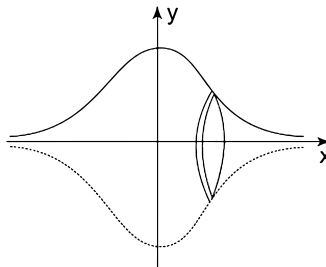
$$\begin{aligned}
 V &= \int_{-b^2/a}^{b^2/a} \pi(a-x)^2 dy \\
 &= 2 \int_0^{b^2/a} \pi(a-x)^2 dy \\
 &= 2\pi \int_0^{b^2/a} (a^2 - 2ax + x^2) dy \quad \left[\text{இங்கு, } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ அதாவது, } x^2 = \frac{a^2}{b^2} (b^2 - y^2) \right] \\
 &= 2\pi \int_0^{b^2/a} \left\{ a^2 - 2a \cdot \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2} + \frac{a^2}{b^2} (b^2 - y^2) \right\} dy \\
 &= \frac{2\pi a^2}{b^2} \int_0^{b^2/a} \left\{ 2b^2 - 2b \cdot \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2} - y^2 \right\} dy \\
 &= \frac{2\pi a^2}{b^2} \left[2b^2 y - 2b \left\{ \frac{1}{2} y \sqrt{b^2 - y^2} + \frac{b^2}{2} \sin^{-1} \left(\frac{y}{b} \right) \right\} - \frac{y^3}{3} \right]_0^{b^2/a} \\
 &= \frac{2\pi a^2}{b^2} \left[2b^2 \cdot \frac{b^2}{a} - 2b \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2}{a} \sqrt{b^2 - \frac{b^4}{a^2}} + \frac{b^2}{2} \sin^{-1} \left(\frac{b}{a} \right) \right\} - \frac{b^6}{3a^3} \right] \\
 &= \frac{2\pi a^2}{b^2} \left[\frac{2b^4}{a} - \frac{b^4}{a^2} \sqrt{a^2 - b^2} - b^3 \sin^{-1} \left(\frac{b}{a} \right) - \frac{b^6}{3a^3} \right] \\
 &= \frac{2\pi b}{3a} \left[6a^2 b - 3ab \sqrt{a^2 - b^2} - 3a^3 \sin^{-1} \left(\frac{b}{a} \right) - b^3 \right] \text{ (விடை)}
 \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 10 : $y = \frac{a^3}{(a^2 + x^2)}$ என்ற வளைவரையின் அதன் தொலைத் தொடுகோட்டினைப்

பற்றி உருவாக்கிய திடப்பொருளின் கனஅளவைக் கண்டறியவும்.

தீர்வு : $\frac{1}{2} \pi^2 a^3$ (விடை)

குறிப்பு :



படம் 1.34

எடுத்துக்காட்டு 11 : $(a - x)y^2 = a^2x$ என்ற வளைவரை, அதன் தொலைத் தொடுகோட்டினைப் பற்றி

சுழலும் போது, உருவாகும் திடப்பொருளின் கன அளவு $\frac{1}{2} \pi^2 a^3$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட வளைவரை $(a - x)y^2 = a^2x$ ஆகும். அதன் வடிவம் படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளது. பூஜ்ஜியத்திற்கு சமமாக, y இன் மிக உயர்ந்த சக்தியின் குணகம், y இன் அச்சுக்கு இணையான தொடுகோடு $a - x = 0$ அதாவது $x = a$.

ஆரத்தின் வட்டு $(a - x)$ மற்றும் தடிமன் dy டை வடிவத்தில் ஒரு தொகுதி உறுப்பைக் கவனியுங்கள். இந்த தனிமத்தின் கன அளவு $\pi(a - x)^2 dy$

தேவையான கன அளவு

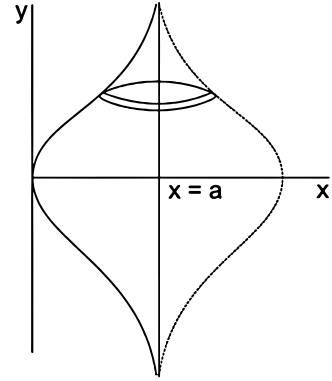
$$\begin{aligned} V &= 2 \int_{y=0}^{\infty} \pi (a - x)^2 dy \\ &= 2\pi \int_a^{\infty} \left(a - \frac{ay^2}{y^2 + a^2} \right) dy \quad \left[\because x = \frac{ay^2}{y^2 + a^2} \right] \\ &= 2\pi a^6 \int_a^{\infty} \frac{dy}{(y^2 + a^2)^2} \end{aligned}$$

$y = a \tan \theta$, $dy = a \sec^2 \theta d\theta$ எனப் பிரதியிடக் கிடைப்பது

$y \rightarrow 0$, $\theta \rightarrow 0$ எனும்போது $y \rightarrow \infty$, $\theta \rightarrow \pi/2$

எனவே, தேவையான கன அளவு

$$\begin{aligned} V &= 2\pi a^6 \int_0^{\pi/2} \frac{a \sec^2 \theta}{a^4 \sec^4 \theta} d\theta = 2\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta \\ &= 2\pi a^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \pi^2 a^3 \text{ (விடை)} \end{aligned}$$



படம் 1.35

எடுத்துக்காட்டு 12 : பீட்டா சார்பின் ஒருங்குதலைப் பற்றி விவாதிக்கவும்.

அல்லது

$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx$, m, n இரண்டும் நேர்மறையாக இருந்தால் மட்டுமே $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx$ இருக்கும் எனக் காட்டுக.

தீர்வு : $I = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx$ என எடுத்துக் கொள்வோம்

$m \geq 1$ மற்றும் $n \geq 1$ என்றால் தொகையீடு முறையான தொகையீடு ஆகும். எனவே அது $m \geq 1$ மற்றும் $n \geq 1$ நோக்கி ஒருங்குகிறது. $m < 1$ மற்றும் $n < 1$ என்றால் முறையே 0 மற்றும் 1 ஆகியவை எல்லையற்ற இடைநீக்கத்தின் புள்ளிகள்.

$m < 1$ மற்றும் $n < 1$ க்கு 0 மற்றும் 1 க்கு இடையில் ஒரு எண் $1/2$ ஐ எடுத்துக் கொள்ளுங்கள், இதனால் நாம் பின்வருமாறு எழுத முடியும்.

$$I = \int_0^{1/2} x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx + \int_{1/2}^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$$

$$I = I_1 + I_2 \quad \dots(1)$$

$m < 1$ எனும்போது, $x = 0$ -ல் $I_1 = \int_0^{1/2} x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$ -ன் ஒருங்குதலை விவாதிக்கலாம்.

$$\text{இங்கு, } f(x) = x^{m-1} (1-x)^{n-1} = \frac{(1-x)^{n-1}}{x^{1-m}} \quad [\because m < 1]$$

$g(x) = \frac{1}{x^{1-m}}$ எனில் $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1-x)^{n-1} = 1$ இது வரையறுக்கப்பட்ட மற்றும் பூஜ்ஜியமற்றது.

$\therefore I_1$ மற்றும் $\int_0^{1/2} g(x) dx = \int_0^{1/2} \frac{1}{x^{1-m}} dx$ ஒன்றாக ஒருங்கும் அல்லது விலகும்.

ஆனால் $1-m < 1$ என இருந்தால் மட்டுமே $x = 0$ -ல் $\int_0^{1/2} \frac{1}{x^{1-m}} dx$ ஒருங்கும்

$\therefore 1-m < 1$ என இருந்தால் மட்டுமே $x = 0$ -ல் I_1 ஒருங்கும்.

$n < 1$ எனும்போது, $x = 1$ ல் $I_2 = \int_{1/2}^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$ ன் ஒருங்குதலை விவாதிக்கலாம்.

$$\text{இங்கு } f(x) = x^{m-1} (1-x)^{n-1} = \frac{x^{m-1}}{(1-x)^{1-n}} \quad [\because n < 1]$$

$g(x) = \frac{1}{(1-x)^{1-n}}$ எனில் $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{m-1} = 1$ இது வரையறுக்கப்பட்ட மற்றும் பூஜ்ஜியமற்றது.

I_2 மற்றும் $\int_{1/2}^1 g(x) dx = \int_{1/2}^1 \frac{1}{(1-x)^{1-n}} dx$ ஒன்றாக ஒருங்கும் அல்லது விலகும்.

ஆனால் $1-n < 1$ என இருந்தால் மட்டுமே $x = 1$ -ல் $\int_{1/2}^1 g(x) dx = \int_{1/2}^1 \frac{1}{x^{1-n}}, x = 1$ ஒருங்கும்.

$1-n < 1$ என இருந்தால் மட்டுமே $x = 1$ -ல் I_2 ஒருங்கும்.

(1)-லிருந்து, $\int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$ m, n இரண்டும் நேர்மறையாக இருந்தால் மட்டுமே

$\int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$ ஒருங்குதலாக இருக்கும்.

மேலும் தொகையீடு முறையான தொகையீடாக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 13 : காமா சார்பின் ஒருங்குதலைப் பற்றி விவாதிக்கவும்.

அல்லது

$n > 0$ எனில் $\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$ என்ற தொகையீடானது ஒருங்கும் எனக் காட்டுக.

தீர்வு : $I = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$ என எடுத்துக் கொள்வோம்

$$\Rightarrow \quad = \int_0^1 x^{n-1} e^{-x} dx + \int_1^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$$

$$I = I_1 + I_2 \quad \dots(1)$$

$$\text{இங்கு } f(x) = x^{n-1} e^{-x} = \frac{e^{-x}}{x^{1-n}}$$

$n < 1$ எனில் $[0, 1]$ ல் $x = 0$ எனும்போது தொகைச்சார்பு f ஆனது எல்லையற்ற இடைநிறுத்தத்தைக் கொண்டுள்ளது. $n < 1$ எனில் I_1 முறையான தொகையீடாகும்.

மேலும் $n \geq 1$ ல் ஒருங்கும்.

$n < 1$ எனும்போது, $x = 0$ -ல் $I_1 = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$ ன் ஒருங்குதலை விவாதிக்கலாம்.

$$\text{இங்கு } f(x) = x^{m-1} (1-x)^{n-1} = \frac{(1-x)^{n-1}}{x^{1-m}} \quad [\because m < 1]$$

$$g(x) = \frac{1}{x^{1-n}} \text{ எனில் } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x} = 1 \text{ இது வரையறுக்கப்பட்ட மற்றும் பூஜ்ஜியமற்றது.}$$

$$\text{ஆனால் } 1 - n < 1 \text{ என இருந்தால் மட்டுமே } x = 0 \text{-ல் } \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{1-n}} dx \text{ ஒருங்கும்.}$$

$$\text{ஒப்பீட்டுச் சோதனையின் படி (Comperision test), } \int_0^1 f dx \text{ தொகையீடு } 0 < n < 1 \text{-க்கு ஒருங்கும்.}$$

மேலும் $n \geq 1$ ல் இது முறையான தொகையீடாகும்.

எனவே $n > 0$ ல் I_1 ஆனது ஒருங்கும்.

$$I_2 = \int_1^\infty x^{n-1} e^{-x} dx \text{ ன் ஒருங்குதலை விவாதிக்கலாம்.}$$

$$\text{இங்கு } g(x) = \frac{1}{x^2} \text{ எனில் } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{e^x} = 0, \forall x$$

$$\int_1^\infty g(x) dx = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} \text{ ஒருங்குதலாகும்.}$$

$\therefore$ ஒப்பீட்டுச் சோதனையின் படி (Comperision test) I_2 , $n > 0$ -ல் ஒருங்குதலாகும்.

(1)-லிருந்து, $n > 0$ என்றால் மட்டுமே கொடுக்கப்பட்ட தொகையீடு I ஒருங்குதலாக இருக்கும் என்று முடிவு செய்கிறோம்.

சுருக்கம்

$$1. \text{ வளைவு ஆரம் } \rho = \frac{(1 + y_1^2)^{3/2}}{y_2} (\bar{x}, \bar{y})$$

$$2. \text{ வளைவு மையத்தின் ஆயங்கள் } \bar{x} = x - \rho \sin \psi, \bar{y} = y + \rho \cos \psi$$

$$\text{மற்றும் } \bar{x} = \frac{y_1(1 + y_1^2)}{y_2}, \bar{y} = y + \frac{1 + y_1^2}{y_2}$$

3. அலர்வரை மற்றும் உட்சுருள் : வளைவரையின் வளைவு மையத்தின் நியமப்பாதை அந்த வளைவரையின் அலர்வரை என்று அழைக்கப்படுகிறது. வளைவரையே அதன் அளர்வரையின் உட்சுருள் என அழைக்கப்படுகிறது.

4. $[a, b]$ என்ற இடைவெளியில் $f(x)$ என்ற தொகையீடு வரையறுக்கப்பட்டால், $f(x)$ ன் வரையறுத்த தொகையீட்டை $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ என எழுதலாம்.
5. 'a' அல்லது 'b' அல்லது இரண்டும் முடிவிலா எண்ணாகவும், மற்றும் $[a, b]$ என்ற இடைவெளியில் $f(x)$ வரம்புக்கு உட்படாமலும் இருக்குமேயானால், வரையறுத்த தொகையீடு $\int_a^b f(x) dx$ முறையற்ற தொகையீடு எனப்படும்.
6. பீட்டா மற்றும் காமா சார்புகள்:

a. $B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$ ஒருங்கும்.

b. $\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx$ ஒருங்கும்.

c. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, $\Gamma(n-1) = n!$

இங்கு n என்பது மிகை முழு

d. $\Gamma(1) = 1 = \Gamma(2)$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

e. $B(m, n) = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$

f. $\int_0^{\pi/2} \sin^p x \cos^q x dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{p+1}{2}, \frac{q+1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{2 \Gamma\left(\frac{p+q+2}{2}\right)}$

g. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan \theta} d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^{1/2} \theta \cos^{-1/2} \theta d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2 \Gamma(1)}$

- h. திட சுழற்சியின் பரப்பளவு

$$S = \int_a^b 2\pi y ds = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (x\text{- அச்சைப் பற்றி சுழலும்போது})$$

$$S = \int_a^b 2\pi x ds = \int_a^b 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dy \quad (y\text{- அச்சைப் பற்றி சுழலும்போது})$$

- i. திட சுழற்சியின் கன அளவு

$$x\text{- அச்சைப் பற்றி சுழலும்போது } V = \int_a^b \pi y^2 dx$$

$$y\text{- அச்சைப் பற்றி சுழலும் போது } V = \int_c^d \pi x^2 dy$$

**குறிக்கோள் கேள்விகள்
(Objective Questions)**

1. $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^{5/2} x \, dx$ ன் மதிப்பு
 a. $\frac{1}{77}$ b. $\frac{2}{77}$ c. $\frac{4}{77}$ d. $\frac{8}{77}$
2. நீள்வட்டத்தின் அலர்வரையின் பெயர்
 a. நான்மடிமிகை வலையுரு b. மையக்கோட்டுச் சந்தி
 c. வட்டப்புள்ளியுரு d. மீவளைவுரு
3. உட்குருளின் மற்றொரு பெயர்
 a. அலர்வரை b. எவல்வென்ட் c. சூழ்வு d. தொடுகோடு
4. $x^2 + y^2 = 25$ என்ற வளைவரையின் வளைவு என்ன ?
 a. 5 b. 25 c. 0.5 d. 0.2
5. நேர்கோட்டின் வளைவு என்ன?
 a. முடிவிலா எண்ணுறு b. ஒன்று
 c. பூச்சியம் d. நேர்கோட்டில் நீளம்
6. $\int_0^{\pi/2} [\tan^{-1}(\cot x) + \cot^{-1}(\tan x)] \, dx$ என்ற தொகையீட்டின் மதிப்பு
 a. $\frac{\pi}{4}$ b. π c. $\frac{\pi^2}{4}$ d. $\frac{\pi^2}{2}$
7. $I = \int_{-1}^1 (x^7 + \cos^{-1} x) \, dx$ எனில் $\cos I$ -ன் மதிப்பு
 a. 1 b. 0 c. -1 d. $\frac{1}{2}$
8. $\int_0^{\pi/2} \sin \theta \sqrt{\sin 2\theta} \, d\theta$ ன் மதிப்பு
 a. 1 b. 0 c. $\pi/2$ d. $\pi/4$
9. பின்வருவனவற்றில் எது காமா சார்பின் வரையறை அல்ல?
 a. $\Gamma(n) = n!$ b. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$
 c. $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} \, dx$ d. $\Gamma(n) = \int_0^1 \log\left(\frac{1}{y}\right)^{n-1} \, dy$
10. $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}} \, dx$ ன் மதிப்பு

- a. $\frac{2\sqrt{\pi} \Gamma(5/4)}{\Gamma(1/4)}$ b. $\frac{2\pi \Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)}$ c. $\frac{2\sqrt{\pi} \Gamma(5/43)}{\Gamma(1/4)}$ d. $\frac{2\sqrt{\pi} \Gamma(3/4)}{\Gamma(5/4)}$
11. $\Gamma(5/4)$ ன் மதிப்பு
a. $\frac{5}{4} \times \frac{1}{4} \times \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$ b. $\frac{9}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{1}{4} \times \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$ c. $\frac{5}{4} \times \frac{1}{4} \times \Gamma\left(\frac{5}{4}\right)$ d. $\frac{1}{4} \times \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$
12. $\Gamma(n) \Gamma(1-n)$ ன் மதிப்பு
a. $\frac{\pi}{\sin n \pi}$ b. $-\frac{\pi}{\sin n \pi}$ c. 0 d. $n!$
13. நீள்வட்டம் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ அதன் சிறிய அச்சில் சுழலும்போது எவ்வளவு கன அளவு உருவாகிறது?
a. $4ab$ கன அலகுகள் b. $\frac{4}{3} a^2 b$ கன அலகுகள்
c. $\frac{4}{3} ab$ கன அலகுகள் d. 4 கன அலகுகள்
14. $y = \sqrt{x}$, $y = 2$ மற்றும் $y = 0$ ஆகியவற்றால் சூழப்பட்ட பகுதி y -அச்சில் சுழலும் போது எவ்வளவு தொகுதி உருவாக்கப்பட்டது?
a. 32π கன அலகுகள் b. $\frac{32\pi}{5}$ கன அலகுகள் c. $\frac{32}{5}$ கன அலகுகள் d. $\frac{5\pi}{32}$ கன அலகுகள்
15. $y = a(1 + \cos \theta)$ என்ற நெஞ்சவளையின் பரப்பளவு என்ன?
a. $\frac{3}{2} \pi a^2$ b. $3\pi a^2$ c. $\frac{3}{4} \pi a^2$ d. $\frac{3}{8} \pi a^2$

விடைகள்

1. d	2. b	3. b	4. d	5. c
6. c	7. c	8. d	9. a	10. c
11. a	12. a	13. b	14. b	15. a

**அகநிலை தீர்க்கப்படாத கேள்விகள்
(Subjective Unsolved Question)**

- ஒரு புள்ளியில் ஒட்டுத்தளத்தின் வளைவரையை வரையறுத்து, இந்த வரையறையிலிருந்து, அதன் சமன்பாட்டைக் கண்டறியவும்.
- வளைவரை தளமாக இருக்கும்போது மட்டும், வளைவு மையத்தின் நியமப்பாதை அந்த வளைவரையின் அலர்வரை ஆக இருக்கும் என நிரூபிக்க.

3. இரண்டு அலர்வரைகளுக்கு தொடர்புடைய புள்ளிகளுக்கு இடையேயான தூரம் நிலையானது என்பதை நிரூபிக்கவும்
4. மதிப்பீடு $\int_{-2}^3 |x^2-1| dx$
5. $\int_0^1 x^{n-1} \log x dx$ என்ற தொகையீட்டின் ஒருங்கலைப் பற்றி விவாதிக்கவும்
6. $x = 0, x = a, y = 0, y = a$ என்ற தளங்களுக்கு இடையில் உள்ள மேற்பரப்பின் பரப்பளவு $4\sqrt{ab} \left(\frac{a+b}{3\sqrt{2}} \right)$ என நிரூபிக்கவும்.
7. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy$ என்ற உருளையின் உள்ளே இருக்கும் $az = xy$ மேற்பரப்பின் பரப்பளவைக் கண்டறியவும்.
8. வட்டப்புள்ளியுருவை (Cycloid) அதன் அடிப்பகுதியைப் பற்றி சுழற்றுவதன் மூலம் உருவான திடத்தின் கனஅளவைக் கண்டறியவும்.
9. 'a' ஆரம் கொண்ட வட்டத்தின் நாற்கரம் அதன் நாண் பற்றி சுழலும் போது உருவாக்கப்பட்ட சுழலின் (Spindle) கன அளவைக் கண்டறியவும்.

விடைகள்

4. $28/3$ 6. $n > 0$ எனில் ஒருங்கும் $n \leq 0$ எனில் விலகும் 8. $\frac{1}{9} (20 - 3\pi)a^2$
9. $5\pi^2 a^3$ 10. $\frac{\pi a^3 (10 - 3\pi)}{6\sqrt{2}}$

உங்களுக்கு தெரியுமா?

நியூட்டன் தனது மாறுபட்ட கால்குலஸின் பதிப்பை 'ஃப்ளக்ஸியன்ஸ் முறை' என்று விவரித்தார். அவர் 1666 இல் ஃப்ளக்ஸியன்கள் குறித்து ஒரு கட்டுரை எழுதினார், ஆனால் அவரது பல படைப்புகளைப் போலவே, பல தசாப்தங்களுக்குப் பிறகு அது வெளியிடப்படவில்லை. அவரது மிகச்சிறந்த தத்துவமான நேச்சுரலிசிஸ் பிரின்சிபியா கணிதவியல் (இயற்கை தத்துவத்தின் கணிதக் கொள்கைகள்) 1687 இல் வெளியிடப்பட்டது. இந்த வேலை அவரது இயக்கம் மற்றும் ஈர்ப்பு கோட்பாடுகளை உள்ளடக்கியது, ஆனால் அதிக கால்குலஸ் வெளிப்படையாக இல்லை - தொடக்கத்தில் கால்குலஸ் பற்றிய சில விளக்கங்கள் இருந்தாலும், நியூட்டன் அவரது கோட்பாடுகளை உருவாக்க நிச்சயமாக கால்குலஸைப் பயன்படுத்தினார். ஆயினும் கூட, நியூட்டனின் 'ஃப்ளக்ஸியன்ஸ் முறை' 1693 வரை வெளிப்படையாக அச்சில் தோன்றவில்லை.

மறுபுறம், லைப்னிஸ் 1684 இல் கால்குலஸில் தனது முதல் படைப்பை வெளியிட்டார் - மேலும் 1670 களில் கால்குலஸைக் கண்டுபிடித்ததாகக் கூறினார். வெளியிடப்பட்ட பதிவிலிருந்து, குறைந்தபட்சம், லீப்னிஸ் முதலில் கால்குலஸைக் கண்டுபிடித்ததாகத் தோன்றியது.

நியூட்டனுக்கும் லீப்னிஸுக்கும் ஆரம்பத்தில் ஒரு நல்ல உறவு இருந்தபோதிலும், லீப்னிஸ் மற்றும் அவரைப் பின்பற்றுபவர்கள் ஆங்கிலக் கணிதவியலாளர் ஜான் வாலிஸின் அறிக்கையை தயவுசெய்து ஏற்றுக்கொள்ளவில்லை. ஒரு இனவெறி மற்றும் சண்டையிடும் தன்மையுடன், வாலிஸ் தனது வாழ்நாள் முழுவதும் ஆங்கில விஞ்ஞானிகளின் சார்பாக முன்னுரிமை தகராறுகளை எதிர்த்துப் போராடினார். 1695 ஆம் ஆண்டில், ஒருவேளை கவனக்குறைவாக, வாலிஸ், நியூட்டனிடம் இருந்து கால்குலஸைப் பற்றி லீப்னிஸ் கற்றுக்கொண்டார் என்று அறிவித்தார் - இது ஒரு பொய் என்று இப்போது அறியப்படுகிறது.

பின்னர், சில கணித சிக்கல்களை லீப்னிஸின் சொந்த கால்குலஸ் பதிப்பால் மட்டுமே தீர்க்க முடியும் என்று லீப்னிஸின் அறிக்கையால் புண்படுத்தப்பட்டார், 1699 இல் ஃபேஷியோ டி டியூலர் என்ற கணிதவியலாளர் லீப்னிஸை திருட்டுத்தனமாக குற்றம் சாட்டினார். அங்கிருந்து விஷயங்கள் கீழ்நோக்கி சென்றன. நியூட்டன் மற்றும் லீப்னிஸ் ஆகியோரும் தத்துவ கேள்விகளில் உடன்படாத விஷயங்களுக்கு அது உதவவில்லை.

1712 ஆம் ஆண்டில் இங்கிலாந்தில் உள்ள ராயல் சொசைட்டி இந்த விவகாரத்தைத் தீர்ப்பதற்காக ஒரு அறிக்கையை எழுதியது - தவிர, முழு விசாரணையும் நியூட்டனால் தானே திறம்பட இயக்கப்பட்டது. நியூட்டனின் வேலை பற்றிய தனது அறிவை லீப்னிஸ் மறைத்துவிட்டார் என்று அறிக்கை கண்டறிந்தது - இப்போது பொய் என்று அறியப்பட்ட உண்மைகளின் அடிப்படையில். பதிலுக்கு, லீப்னிஸ் நியூட்டன் மற்றும் அவரைப் பின்பற்றுபவர்கள் லீப்னிஸின் சொந்த கால்குலஸைத் திருடிவிட்டதாகவும், அதன் பயன்பாடுகளில் பிழைகள் செய்ததாகவும் குற்றம் சாட்டினார். 1716 இல் லீப்னிஸின் மரணத்திற்குப் பிறகு, சர்ச்சைகள் குற்றச்சாட்டுகள் மற்றும் எதிர் குற்றச்சாட்டுகள் நிறைந்தது.

சர்ச்சையிலிருந்து யாரும் வெளியே வரவில்லை. நியூட்டன் மற்றும் லீப்னிஸ் இருவரும் நம்பமுடியாத கணிதக் கண்டுபிடிப்புகளைக் கொண்டிருந்தனர், ஆனால் அவர்களுடைய சர்ச்சை அவர்கள் குறைவான ஈர்க்கக்கூடிய நடத்தைக்கு திறமையானவர்கள் என்பதை நிரூபித்தது.

செயல் திட்டம் / செயல்முறை / செயல்பாடு

செயல்திட்டம்

1. பின்வரும் வலைவவரைகளின் அலர்வரை சமன்பாட்டை கணக்கிட,விகிதமுறு நேர்கோட்டு குடுபம்பத்தின் சூழ்வை கணக்கிடுவதற்கான எழுத்து வடிவத்தை உருவாக்கு.

i. பரவளையம்: $y = x^2$ துணையலகு வடிவம்: $x(t) = t_1, y(t) = t_2$

ii. நீள்வட்டம்: $x^2 + 4y^2 = 4$ துணையலகு வடிவம் : $x(t) = \frac{8t}{1 + 4t^2}, y(t) = \frac{4t^2 - 1}{1 + 4t^2}$

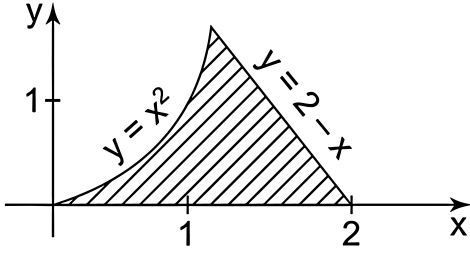
இந்த அலர்வரைகளை அதனுடன் தொடர்புடைய வளைவரைகளோடு குறிக்க.

2. பீட்டா சார்பு மற்றும் சரக்கோட்பாடு ஆகியவற்றை தொடர்புப்படுத்து.

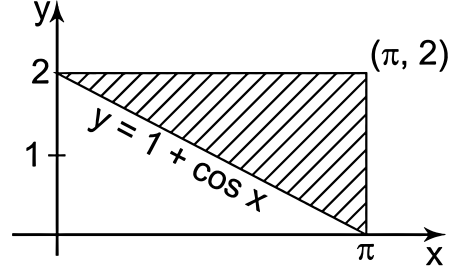
செயல்முறை

1. பீட்டா சார்பின் 3 D உருவத்தை வரைக.
2. $\int_1^4 (x + 6) dx$ என்ற தொகையீட்டின் வரைபடத்தை வரைக மற்றும் அதன் குறிப்பிட்ட இடைவெளியின் பரப்பளவை நிழலிடுக.

3. வரையறுத்த தொகையீட்டை பயன்படுத்தி கொடுக்கப்பட்டுள்ள வளைவரைகளின் நிழலிட்ட பரப்பை காண்க.



படம் 1.36



படம் 1.37

4. பரவளையத்தின் அலர்வரையின் வரைபடத்தை வரைய தேவையான MATLAB குறியீட்டை எழுதுக.

செயல்பாடு

1. காமா சார்பு எவ்வாறு காரணி சார்பை இடைமறிக்க முடியும்? (யோசித்து விளக்குக)
2. காமா சார்பின் வரைபடம் எப்படி இருக்கும்?

குறிப்பு : பைதான் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தலாம்.

மேலும் அறிய

1. f என்பது ஓர் இரட்டைச் சார்பு மற்றும் $\int_0^2 f(x) dx = k$ எனில் $\int_{-1}^1 \left(\frac{x^2 - 1}{x^3} \right) f\left(x + \frac{1}{x}\right) dx$ -ன் மதிப்பு
 - a. 0
 - b. $2k$
 - c. k
 - d. $4k$
2. $\int_{-5}^5 (x - [x]) dx$ என்ற தொகையீட்டின் மதிப்பு காண்க.
 - a. 0
 - b. 5
 - c. 10
 - d. 15
3. $\int_0^2 x^{[x]} dx$ மதிப்பு
 - a. $\frac{1}{2}$
 - b. $\frac{3}{2}$
 - c. $\frac{5}{2}$
 - d. $\frac{7}{2}$
4. $\Gamma(0.1), \Gamma(0.2), \Gamma(0.3) \dots \Gamma(0.9)$ மதிப்பு காண்க.
 - a. $\frac{(2\pi)^{9/2}}{\sqrt{10}}$
 - b. $\frac{\pi^2}{\sqrt{10}}$
 - c. $\frac{1}{2}$
 - d. $\frac{1}{\sqrt{2}}$
5. $A = \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}, B = \int_0^\pi \frac{dx}{1 + \cos x}$ என்ற தொகையீடுகளின் ஒருங்குதலை சோதிக்கவும்.

6. $\int_0^4 \frac{dx}{x(4-x)}$ என்ற தொகையீட்டின் ஒருங்குதலை சோதிக்கவும்.
7. $\alpha = \int_0^\alpha \frac{dt}{1+t^2}$ என எடுத்துக் கொள்வோம். பின்வருவனவற்றில் எது உண்மையானது?
- a. $\frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{1}{1+t^2}$
- b. α ஒரு விகிதமுறு
- c. $\log(a) = 1$
- d. $\sin(\alpha) = 1$

விடைகள்

1. b 2. b 3. c 4. A
5. A, 8/3-க்கு ஒருங்குகிறது B, ∞-க்கு விலகுகிறது 6. விலகும் 7. d

மேற்கோள் நூல்கள் / பரிந்துரைக்கப்பட்ட வாசிப்புகள்

1. Courant R. (1988) *Differential and Integral Calculus*, Wiley, NewYork.
2. Dass, H.K. *Advanced Engineering Mathematics*, S. Chand Publications.
3. Fleming, W.H. (1965) *Functions of Several Variables*, Addison Wesley Publishing Company, Reading, MA.
4. Garg Reena (2019) *Engineering Mathematics-I*, 2nd Edition, Khanna Book Publishing Co. (P)Ltd.
5. Grewal, B.S. *Higher Engineering Mathematics*, Khanna Publishers.
6. <https://en.m.wikipedia.org/wiki/Evolute>
7. Jain, R.K.; Iyengar, S.R.K. *Advanced Engineering Mathematics*, 2nd Edition, Narosa.
8. Knopp, K. (1947) *Theory of Functions*, Dover, NewYork.
9. Philip, Franklin (1940) *A Treatise on Advanced Calculus*, Wiley, Inc. NewYork.
10. Piskunov, N. (1969) *Differential and Integral Calculus*, MIR Publishers, Moscow.
11. Prasad, Chandrika (1967) *Mathematics for Engineers*, Pothishala Private Ltd.
12. Ram, Babu *Engineering Mathematics*, Pearson.
13. Thomas, G.B. and Finney, R.L. (2002) *Calculus and Analytic Geometry*, 9th edition, Pearson.
14. Tichmarsh, E.C. (1939) *Theory of Functions*, Oxford University Press, London.

2

நுண்கணிதம் II

அலகு விவரங்கள்

இந்த அலகு ரோலின் தேற்றம், அதன் வடிவியல் விளக்கம், சராசரி மதிப்பு கோட்பாடுகள் அவற்றின் வடிவியல் விளக்கம், டெய்லர் மற்றும் மேக்லாரின் கோட்பாடுகள் மீதமுள்ளவை, வரையறுக்கப்படாத வடிவங்கள் மற்றும் எல்ஹாஸ்பிடல் விதி (அனைத்து வகைகள்.), பெருமம் மற்றும் சிறுமம் பற்றி விரிவாக விவாதிக்கிறது. பல்வேறு தலைப்புகளின் பயன்பாடுகள் முழுமையாக விவாதிக்கப்படுகின்றன மற்றும் தலைப்பின் சரியான புரிதலுக்காக பல தீர்க்கப்பட்ட உதாரணங்கள் சேர்க்கப்பட்டுள்ளன. மாணவர்கள் தலைப்புகளைக் காட்சிப்படுத்த பல புள்ளிவிவரங்கள் சேர்க்கப்பட்டுள்ளன.

அடிப்படைக்கோட்பாடு

தேற்றங்கள் கணிதத்தின் மையத்தில் உள்ளன. கோட்பாடுகள் பெரும்பாலும் "அற்பமானவை" அல்லது "கடினமானவை" அல்லது "ஆழமானவை" அல்லது "அழகானவை" என்று விவரிக்கப்படுகின்றன. இந்த அகநிலை தீர்ப்புகள் நபருக்கு நபர் மட்டுமல்ல, நேரம் மற்றும் கலாச்சாரத்துடனும் வேறுபடுகின்றன: உதாரணமாக, ரோலின் தேற்றம் ஒரு நிறுவனத்தின் வருடாந்திர செயல்திறனின் வரைபடங்களை பகுப்பாய்வு செய்ய பயன்படுத்தப்படுகிறது. சராசரி மதிப்புக் கோட்பாடு பெரும்பாலும் ஒரு பந்தை காற்றில் எறிவது அல்லது பிற இயக்கப் பிரச்சனைகளுடன் பயன்படுத்தப்படுகிறது. கணக்கீடுகள் தொடர்பான பிற சிக்கல்களைத் தீர்ப்பதில் இவை ஒரு கணிதக் கருவியாகப் பயன்படுத்தப்படலாம்.

டெய்லர் தொடர் மிகவும் கடினமான சார்புகளின் தோராயங்களை உருவாக்க மிகவும் பயனுள்ளதாக இருக்கும். எல்லைகளை களைத் தீர்க்க நாம் லோபிதாலின் விதியைப் பயன்படுத்தலாம், இது அன்றாட உலகில் குறிப்பாக புள்ளியியல், இயற்பியல் மற்றும் பொறியியலில் பல பயன்பாடுகளைக் கொண்டுள்ளது. இந்த உலகில் உள்ள அனைத்தும் மெருமம் அல்லது சிறுமம் என்ற கருத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டது, ஒவ்வொருவரும் ஒவ்வொரு முறையும் ஒவ்வொரு தரவின் மெருமம் அல்லது சிறுமம் மதிப்பைக் கணக்கிடுகிறார்கள்.

முன் தேவைகள்

- ♦ தொகையீடு மற்றும் வகையீடு பற்றிய கருத்து.
- ♦ மட்டு, ஏறும் சார்பு, இறங்கும் சார்பு, திறந்த இடைவெளி, மூடிய இடைவெளி போன்ற சிறப்பு வகை சிறப்புகளை பற்றிய அறிவு.
- ♦ எல்லையின் மதிப்பீடு, மேலும் அதைப் பயன்படுத்துதல்.
- ♦ $\sin x$, $\cos x$, $\log(1+x)$, e^x போன்ற சில சார்புகளின் விரிவாக்கம் பற்றிய விழிப்புணர்வு

பாடப்பகுதியின் அடைவுகள்

இவ்வலகுப் பகுதி நிறைவுறும் போது மாணவர்கள் அறிந்திருக்க வேண்டியவை:

U2-01 : ஒரு சார்பு மற்றும் அதன் வகையீடுகளின் பண்புகளை நிரூபிக்க பல்வேறு சராசரி மதிப்பு தேற்றங்களை பயன்படுத்துதல்.

U2-02 : $x \rightarrow \infty$ எனில் $f(x)$ என்ற சார்பின் ஈற்றணுகு இயங்குமுறையை தீர்மானித்தல் மற்றும் லோபிதாலின் விதியை பயன்படுத்தி எல்லைகளை கண்டறிதல்.

U2-03 : மெருமம் - சிறுமம் ஆகியவற்றை பயன்படுத்தி சார்பின் இயங்குமுறையை பகுப்பாய்தல்.

U2-04 : டெய்லரின் மற்றும் மெக்லாரின் தேற்றத்துடன் இயற்கணித மற்றும் ஆழ்நிலை சார்பிற்கான தொடரின் விரிவாக்கம் பற்றி அறிதல்.

பாடக்கோப்பின் அடைவுகளுடன் பாடப்பகுதியின் அடைவுகளின் ஒப்புமை:

பாடப்பகுதி-2 முடிவுகள்	பாடக்கோப்பின் அடைவுகளுடன் எதிர்பார்க்கப்படும் ஒப்புமை (1-பலவீனமான தொடர்பு; 2-நடுத்தர தொடர்பு; 3-வலுவான தொடர்பு)				
	CO-1	CO-2	CO-3	CO-4	CO-5
U2-O1	1	2	-	-	-
U2-O2	1	3	-	-	-
U2-O3	-	3	-	-	1
U2-O4	-	3	-	-	-

வரலாறு

17 ஆம் நூற்றாண்டின் முற்பகுதியில், ஒரு வளைவரை பொதுவாக சில வடிவியல் நிலையை திருப்திப்படுத்தும் புள்ளிகளின் இருப்பிடமாக விவரிக்கப்பட்டது. மேலும் வடிவியல் கட்டுமானத்தின் மூலம் தொடு கோடுகள் பெறப்பட்டன. வளைவுகளுக்கும் தொடு கோடுகளுக்கும் நகரும் துகள்களின் வேகத்திற்கும் இடையிலான தொடர்பு 1660 களின் பிற்பகுதியில் ஐசக் நியூட்டனால் கண்டுபிடிக்கப்பட்டது. ரோலின் தேற்றம் என்பது சராசரி மதிப்பு தேற்றத்தின் ஒரு பகுதியாகும். பாஸ்கரா II (1114-1185), ஒரு இந்திய கணிதவியலாளர், ரோலின் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்திய முதல் நபர் என்ற பெருமைக்குரியவர், அதற்கு பக்சரா II (1114 - 1185) பிரெஞ்சு கணிதவியலாளர் மைக்கேல் ரோல் (1652-1719) பெயரிடப்பட்டது.



கோட்பாடு எல்லையற்ற நுண்கணிதத்தின் ஒரு பகுதியாகக் கருதப்பட்டது மற்றும் 18 ஆம் நூற்றாண்டு வரை வகை வகை நுண்கணிதத்தின் கீழ் வகைப்படுத்தப்படவில்லை. ரோலின் கோட்பாட்டின் முதல் இரண்டு நிபந்தனைகளைப் பயன்படுத்தி மட்டுமே லாக்ரேஞ்ச் ஒரு முடிவை வழங்கியது. எனவே இது லாக்ரேஞ்சின் சராசரி மதிப்பு தேற்றம் என்று அழைக்கப்படுகிறது. காச்சி மற்றொரு சராசரி மதிப்புக் கோட்பாட்டைக் கொடுத்தார், அதில் ரோலின் தேற்றம் மற்றும் லாக்ரேஞ்சின் சராசரி மதிப்பு தேற்றத்தில் உள்ளது போன்று ஒரு சார்பிற்குப் பதிலாக இரண்டு சார்புகளைப் பயன்படுத்தினார், லாக்ரேஞ்சின் தேற்றம், காச்சி சராசரி மதிப்பு கோட்பாட்டின் ஒரு குறிப்பிட்டதாகும். டெய்லரின் தேற்றம் சராசரி மதிப்பு தேற்றத்தின் "உயர் வரிசை" வகையீடுகளின் நீட்டிப்பாகக் கருதப்படுகிறது. லோபிதாலின் விதி உண்மையில் ஜோஹன் பெர்னொல்லியால் கண்டுபிடிக்கப்பட்டது. 1955 ஆம் ஆண்டில், எல் ஹாஸ்பிடல் -பெர்னாலி கடிதப் பரிமாற்றம் ஜெர்மனியில் வெளியிடப்பட்டது.

2.1 ரோலின் தேற்றம்

கூற்று : f , என்ற சார்பானது $[a, b]$, எனும் மூடிய இடைவெளியில் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது என்க. மேலும்

(i) f , என்பது $[a, b]$, எனும் மூடிய இடைவெளியில் தொடர்ச்சியானது.

(ii) f , என்பது (a, b) எனும் திறந்த இடைவெளியில் வகையிடத்தக்கது.

(iii) $f(a) = f(b)$ எனில்,

பின்னர் குறைந்தபட்சம் ஒரு புள்ளி $c \in (a, b)$ யாவது $f'(c) = 0$ என்றவாறு இருக்கும்.

நிரூபணம் : f , என்பது $[a, b]$ எனும் மூடிய இடைவெளியில் தொடர்ச்சியானது. எனவே அந்த மூடிய இடைவெளியின் மேல் வரம்புக்கு உட்பட்டதாக இருக்கும். மற்றும் அதன் வரம்புகளைப் பெரும்.

$$\sup_{x \in [a, b]} f(x) = M \text{ மற்றும் } \inf_{x \in [a, b]} f(x) = m \text{ என்க.}$$

தொடர்ச்சித் தன்மையின் பண்பிலிருந்து, $c, d \in [a, b]$, என்ற புள்ளிகளில்

$$f(c) = M \text{ மற்றும் } f(d) = m$$

[$\because f(x)$ என்பது எனும் $[a, b]$, மூடிய இடைவெளியில் தொடர்ச்சியானது எனில் பின்னர் ஒரு முறையாவது இது அதன் மேன்மம் மற்றும் தாழ்மத்தை $[a, b]$, எனும் மூடிய இடைவெளியில் அடையும்.]

இரண்டு வெவ்வேறு நிலைகள் எழுகின்றன:

நிலை I :

$$M = m \text{ எனில், அதாவது } \sup f = \inf f$$

இந்நிலையில், $f(x) = M (= m)$, அனைத்து புள்ளிகள் $x \in [a, b]$

$\Rightarrow f, [a, b]$ ன் மீது ஒரு மாறிலியாக இருக்கும்.

$$\therefore f'(x) = 0 \text{ அனைத்து புள்ளிகள் } x \in [a, b]$$

எனவே, $f'(c) = 0$ இங்கு $c \in (a, b)$

நிலை II:

$$M \neq m \text{ எனில்,}$$

$f(a) = f(b)$, எனக்கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

$\therefore M$ அல்லது m , ஆனது $f(a) = f(b)$ க்கு வேறுபட்டு இருக்கும்.

$$M \neq f(a) \text{ மற்றும் } M \neq f(b), \text{ எனில்,}$$

$$f(c) = M, \text{ எனில் } c \neq a, c \neq b \text{ மற்றும் ஆகையால் } a < c < b$$

$$\therefore f(c) = M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$$

ஆகையால், $f(x) \leq f(c)$ அனைத்து புள்ளிகள் $x \in [a, b]$... (1)

$$(1), \text{ லிருந்து } f(c-h) \leq f(c)$$

$$\therefore f(c-h) - f(c) \leq 0$$

$-h < 0$ ஆல் வகுக்க நாம் பெறுவது

$$\frac{f(c-h) - f(c)}{h} \geq 0$$

எல்லை $h \rightarrow 0$ எனக் எடுக்க,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c-h) - f(c)}{-h} \geq 0$$

$$\Rightarrow L.f'(c) \geq 0 \quad \dots(2)$$

மேலும் (1), லிருந்து $f(c+h) \leq f(c)$

$$\therefore f(c-h) + f(c) \leq 0$$

$h > 0$ ஆல் வகுக்க நாம் பெறுவது, $\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$

எல்லை $h \rightarrow 0$ எனக் எடுக்க,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

$$\Rightarrow R.f'(c) \leq 0 \quad \dots(3)$$

$f'(c)$ உள்ளது எனில்

$$\therefore L.f'(c) = R.f'(c) = f'(c)$$

$f'(c) = 0$ எனும்போது மட்டுமே இது சாத்தியம்.

அதே வழியில் தொடர, $f'(d) = 0$, என நிரூபிக்கமுடியும், இங்கு $d \in (a, b)$

எனவே குறைந்தபட்சம் ஒரு புள்ளி $c \in (a, b)$ யாவது $f'(c) = 0$ என்றவாறு இருக்கும்.

இது தேற்றத்தின் நிரூபணத்தை நிறைவு செய்கிறது.

குறிப்புரை : ரோலின் தேற்றத்தில் நாம் மேன்மம் மற்றும் தாழ்மம் போன்ற சொற்களைப் பயன்படுத்தினோம். இங்கு அவைகள் பற்றிய சுருக்கமான விளக்கங்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

1. மீச்சிறு மேல் வரம்பு (மேன்மம்) : வரையறை : S , என்பது $\mathbb{R}$ ல் உள்ள வெற்றற்ற உட்கணம் என்க.

ஒரு மெய்யெண் u , பின்வரும் நிபத்தனைகளுடன் S ன் மீச்சிறு மேல் வரம்பு அல்லது ($l.u.b$) அல்லது மேன்மம் என அழைக்கப்படும்.

i. $x \leq u \forall x \in S$ அதாவது u , என்பது S ன் மேல் வரம்பு

ii. $if v$, என்பது S ன் ஓர் மேல் வரம்பு எனில், பின்னர் $u \leq v$

2. மீப்பெரு கீழ் வரம்பு (தாழ்மம்) : வரையறை : S , என்பது $\mathbb{R}$ ல் உள்ள வெற்றற்ற உட்கணம் என்க. ஒரு மெய்யெண் l , பின்வரும் நிபத்தனைகளுடன் S ன் மீப்பெரு கீழ் வரம்பு அல்லது ($g.l.b$) அல்லது தாழ்மம் என அழைக்கப்படும்.

i. $l \leq x \forall x \in S$ அதாவது l , என்பது S ன் மேல் வரம்பு

ii. l , என்பது S ன் ஓர் கீழ் வரம்பு எனில், பின்னர், $l' \leq l$. வேறு வார்த்தைகளில், l -யை விட பெரிய எண் S ன் கீழ் வரம்பாக இருக்க முடியாது.

எடுத்துக்காட்டாக :

1. $S = (0, 1)$, எனில் தெளிவாக $0 < x < 1 \forall x \in S$ மேலும், $x < 2 \forall x \in S$.
 $\therefore 2, 3, 4 \dots$ மற்றும் பல, S ன் மேல் வரம்புகள் ஆனால் அவற்றில் 1 மீச்சிறு மேல் வரம்பு.
 $\therefore S$ ன் மீச்சிறு மேல் வரம்பு 1 மற்றும் $1 \notin S$.
 அதேபோல், $-1 < x \forall x \in S$
 $\therefore -1, -2, -3, \dots$ மற்றும் பல, S ன் கீழ் வரம்புகள் ஆனால் அவற்றில் 0, மீப்பெரு கீழ் வரம்பு.
 $\therefore S$ மீப்பெரு கீழ் வரம்பு 0 மற்றும் $0 \notin S$.
2. இங்கு $S = [0, 1]$, எனில் $0 \leq x \leq 1 \forall x \in S$.
 $1, S$ ன் மீச்சிறு மேல் வரம்பு மற்றும் $1 \in S$. மேலும், $0, S$ ன் மீப்பெரு கீழ் வரம்பு மற்றும் $0 \in S$

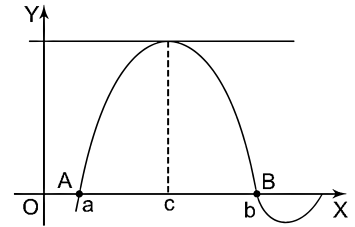
முக்கியமான கருத்துகள் :

- i. ஒரு கணத்திற்கு மீச்சிறு மேல் வரம்பு அல்லது மீப்பெரு கீழ் வரம்பு இருக்குமேயானால் அவை தனித்துவமானது
- ii. ஒரு கணத்தின் மீச்சிறு மேல் வரம்பு அல்லது மீப்பெரு கீழ் வரம்பு அந்த கணத்தில் இருக்கலாம் அல்லது இல்லாமலும் இருக்கலாம்.
- iii. ஒரு கணத்திற்கு மீச்சிறு மேல் வரம்பு இருக்கலாம் அல்லது இல்லாமலும் இருக்கலாம். இயல்எண் (N) கணத்திற்கு இல்லை.
- iv. ஒரு கணத்திற்கு மீப்பெரு கீழ்வரம்பு இருக்கலாம் அல்லது இல்லாமலும் இருக்கலாம். முழு எண்களின் (Z) கணத்திற்கு இல்லை.

2.1.1 ரோலின் தேற்றத்தின் வடிவக்கணித விளக்கம்

1. வளைவரை $y = f(x)$ என்க.
 - i. $[a, b]$ என்ற இடைவெளியில் தொடரிச்சியானது.
 - ii. (a, b) என்ற இடைவெளியில் வகையிடத்தக்கது
 - iii. $f(a) = f(b)$

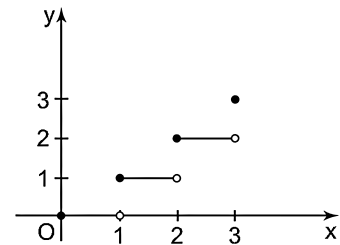
பின்னர் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி $c \in (a, b)$ ல் தொடுகோடு அச்சுக்கு இணையாக இருக்கும்.



படம் 2.1

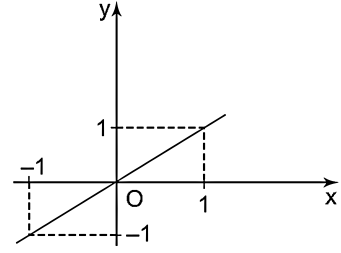
எடுத்துக்காட்டாக,

$f(x) = [x]$, என்பது $[0, 3]$ என்ற இடைவெளியில்
 மீப்பெரு முழுக்கள் சார்பு, $x = 1, 2, 3$ ஆகிய புள்ளிகளில்
 தொடரிச்சியற்றது.
 $\therefore$ ரோலின் தேற்றம் இதற்கு பொருந்தாது.



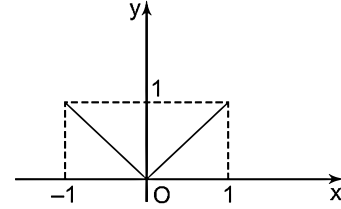
படம் 2.2

2. $[-1, 1]$ ல் $f(x) = x$ உள்ளது
 $f, [-1, 1]$ ல் தொடர்ச்சியானதாகவும், $(-1, 1)$ ல்
 வகையிடத்தக்கதாகவும் உள்ளது. ஆனால், $f(-1) \neq f(1)$
 $\therefore$ ரோலின் தேற்றம் இதற்கு பொருந்தாது.



படம் 2.3

3. $[-1, 1]$ ல் $f(x) = |x|$ உள்ளது
 $f, [-1, 1]$ ல் தொடர்ச்சியானதாகவும்,
 ஆனால், $f, x = 0$ ல் வகையிடத்தக்கதாக இல்லை.
 $\therefore$ ரோலின் தேற்றம் இதற்கு பொருந்தாது.



படம் 2.4

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 2.1 : $[2, 4]$ ல் $f(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 24$ க்கு ரோலின் தேற்றத்தை சரிபார்.

தீர்வு : இங்கு $f(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 24$

கொடுக்கப்பட்ட சார்பு $f(x)$, x -ன் பல்லுறுப்பு கோவையாகும் மற்றும் ஆதலால் அனைத்து x -லும் தொடர்ச்சியானதாகவும் வகையிடத்தக்கதாகவும் இருக்கும்.

$\Rightarrow$ a. $f(x)$, $[2, 4]$ ல் தொடர்ச்சியானது.

b. $f(x)$, $(2, 4)$ ல் வகையிடத்தக்கது.

$$c. f(2) = (2)^3 - 9(2)^2 + 26(2) - 24 = 0$$

$$f(4) = (4)^3 - 9(4)^2 + 26(4) - 24 = 0$$

ரோலின் தேற்றத்தின் மூன்று நிபந்தனைகளும் பூர்த்தியாகிறது.

எனவே ஏதேனும் ஓர் புள்ளி $c \in (2, 4)$ ல், $f'(c) = 0$

நாம் பெறுவது, $f'(x) = 3x^2 - 18x + 26$

$$\Rightarrow f'(c) = 3c^2 - 18c + 26$$

$$\text{எனவே } f'(c) = 0$$

$$\Rightarrow c = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 312}}{6}$$

$$= 3 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$c = 3 \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \in (2, 4)$$

∴ ரோலின் தேற்றம் சரிபார்க்கப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு 2.2 : $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ ல் $f(x) = \cos 2x$ க்கு ரோலின் தேற்றத்தை சரிபார்.

தீர்வு : இங்கு, $f(x) = \cos 2x$

a. கொசைன் சார்பு x -ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் தொடர்ச்சியானது என்பது நமக்குத் தெரியும், எனவே

$f(x)$, $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ ல் தொடர்ச்சியானது

b. $f'(x) = -2 \sin 2x =$ முடிவுறு. வரையறுக்கப்பட்டது

∴ $f(x)$, $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ ல் வகையிடத்தக்கது.

a.
$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

மற்றும்
$$f'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos 2\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

∴
$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = f'\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

∴ ரோலின் தேற்றத்தின் மூன்று நிபந்தனைகளும் பூர்த்தியாகிறது.

எனவே ஏதேனும் ஓர் புள்ளி $c \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ ல் $f'(c) = 0$

இப்போது
$$f'(c) = -2 \sin 2c = 0 \Rightarrow \sin 2c = 0$$

$$\sin 2c = \sin 0 \Rightarrow 2c = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$c = 0 \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$$

∴ ரோலின் தேற்றம் சரிபார்க்கப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு 2.3 : $[-3, 0]$ ல் $f(x) = x(x+3)e^{-x/2}$ க்கு ரோலின் தேற்றத்தை சரிபார்.

தீர்வு : இங்கு, $f(x) = x(x+3)e^{-x/2}$

a. பல்லுறுப்பு கோவை $x(x+3)$ மற்றும் அடுக்கை சார்பு $e^{-x/2}$ ஆகிய இரண்டும் ஒவ்வொரு இடத்திலும் தொடர்ச்சியானவை.

எனவே அதன் பெருக்கற்பலனும் $[-3, 0]$ ல் தொடர்ச்சியானது.

b.
$$f'(x) = xe^{-\frac{x}{2}} + (x+3)e^{-\frac{x}{2}} - \frac{x(x+3)}{2}e^{-\frac{x}{2}}$$

$$= \left(2x+3 - \frac{x(x+3)}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}$$

$$= \left(\frac{x+6-x^2}{2} \right) e^{-\frac{x}{2}}$$

$f'(x)$, $(-3,0)$ ல் தனித்துவமாக உள்ளது மற்றும் $f(x)$, $(-3,0)$ ல் வகையிடத்தக்கது.

$$c. \quad f(-3) = -3(-3+3)e^{\frac{3}{2}} = 0$$

$$\text{மற்றும் } f(0) = 0(0+3)e^{\frac{3}{2}} = 0$$

$$\text{எனவே } f(-3) = f(0) = 0$$

∴ ரோலின் தேற்றத்தின் மூன்று நிபந்தனைகளும் பூர்த்தியாகிறது.

எனவே ஏதேனும் ஓர் புள்ளி $c \in (-3,0)$ ல் $f'(c) = 0$

$$f'(c) = \left(\frac{c+6-c^2}{2} \right) e^{-\frac{c}{2}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{c+6-c^2}{2} = 0, \quad e^{-\frac{c}{2}} \neq 0$$

$$\Rightarrow c^2 - c - 6 = 0$$

$$\Rightarrow c = 3, -2$$

$$\text{இப்போது } c = -2 \in (-3,0)$$

∴ ரோலின் தேற்றம் சரிபார்க்கப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு 2.4 : $f(x) = \begin{cases} -4x+5, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x-3, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ என்ற சார்பிற்கான ரோலின் தேற்றத்தின் பொருந்தக்கூடிய தன்மையை ஆராய்க.

தீர்வு : இங்கு, $f(x) = \begin{cases} -4x+5, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x-3, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

$$f(1) = 1$$

$x = 1$, ல் தொடர்ச்சி

$$Rf(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x-3) = \lim_{h \rightarrow 0} 2(1+h)-3 = 2-3 = -1$$

$$Lf(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-4x+5) = \lim_{h \rightarrow 0} -4(1-h)+5 = -4+5 = 1$$

$$\text{எனவே, } Rf(1) \neq Lf(1)$$

∴ $f(x)$, $x=1 \in [0,2]$ தொடர்ச்சியற்றது.

∴ ரோலின் தேற்றம் இதற்கு பொருந்தாது.

எடுத்துக்காட்டு 2.5 : $[-2,2]$ ல் $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ க்கு ரோலின் தேற்றத்தை சரிபார்.

தீர்வு : இங்கு, $[-2,2]$ ல் $f(x) = \sqrt{4-x^2}$.

$f(x)$, x ன் பல்லுறுப்பு கோவையின் இருபடி மூலம். எனவே x ன் அனைத்து மதிப்புகளிலும் தொடர்ச்சியானது.

i. $[-2,2]$ ல் $f(x)$ தொடர்ச்சியானது.

ii. $4-x^2 = 0$ அதாவது $x = \pm 2$ ஆகிய புள்ளிகள் தவிர அனைத்து இடங்களிலும் $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$ வரையறுக்கப்பட்டது.

எனவே $f'(x)$, $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ ல் வகையிடத்தக்கது.

$\therefore f'(x)$, $(-2, 2)$ ல் வகையிடத்தக்கது.

iii. இப்போது $f(-2) = \sqrt{4 - (-2)^2} = \sqrt{4 - 4} = 0$

$$f(2) = \sqrt{4 - (2)^2} = \sqrt{4 - 4} = 0 \Rightarrow f(-2) = f(2)$$

$\therefore$ ரோலின் தேற்றத்தின் மூன்று நிபந்தனைகளும் பூர்த்தியாகிறது.

எனவே ஏதேனும் ஓர் புள்ளி $c \in (-2, 2)$ ல் $f'(c) = 0$

$$\Rightarrow f'(c) = \frac{-c}{\sqrt{4 - c^2}} = 0, c = 0 \in (-2, 2)$$

$\therefore$ ரோலின் தேற்றம் சரிபார்க்கப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு 2.6 : $[-1, 1]$ ல் $f(x) = \log(x^2 + 2) - \log 3$ என்க. ரோலின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி, $c \in (-1, 1)$ புள்ளியைக் கண்டறிக.

தீர்வு : இங்கு, $f(x) = \log(x^2 + 2) - \log 3$

a. மடக்கைச் சார்பு x -ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் தொடர்ச்சியானது என்பது நமக்குத் தெரியும் மற்றும் $\log 3$ ஒரு மாறிலி, ஆதலால் $f(x)$, x -ன் அனைத்து மதிப்புகளிலும் தொடர்ச்சியானது, எனவே $[-1, 1]$ லிலும் தொடர்ச்சியானது

b. $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 2}$ ($x \in \mathbb{R}$ அனைத்து மதிப்புகளுக்கும்)

$\therefore f'(x)$, $(-1, 1)$ ல் வகையிடத்தக்கது.

c. இங்கு $f(-1) = \log((-1)^2 + 2) - \log 3 = \log 3 - \log 3 = 0$

$$\text{மற்றும் } f(1) = \log((1)^2 + 2) - \log 3 = \log 3 - \log 3 = 0$$

$$\Rightarrow f(-1) = f(1)$$

$\therefore$ ரோலின் தேற்றத்தின் மூன்று நிபந்தனைகளும் பூர்த்தியாகிறது.

எனவே ஏதேனும் ஓர் புள்ளி $c \in (-1, 1)$ ல் $f'(c) = 0$

$$f'(c) = \frac{2c}{c^2 + 2} = 0$$

$$\Rightarrow c = 0 \in (-1, 1)$$

பயிற்சி 2.1

1. கொடுக்கப்பட்ட இடைவெளியில் பின்வரும் சார்புகளுக்கு, ரோலின் தேற்றத்தை சரிபார்.

a. $[1, 3]$ ல், $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

b. $[-4, 5]$ ல், $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x - 80$

c. $[-1, 4]$ ல், $f(x) = \frac{x^3 - 3x - 4}{x - 5}$

d. $\left[0, -\frac{\pi}{2}\right]$ ல், $f(x) = \cos 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

e. $[0, \pi]$ ல், $f(x) = \sin x - \sin 2x$

f. $[-1, 1]$ ல், $f(x) = e^{1-x^2}$

g. $[0, \pi]$ ல், $f(x) = \frac{\sin x}{e^x}$

h. $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ல், $f(x) = e^x \cos x$

i. $[0, \pi]$ ல், $f(x) = \tan x$

j. $[1, 3]$ ல், $f(x) = (x^2 - 4x + 3)e^{2x}$

2. பின்வரும் சார்புகளுக்கு ரோலின் தேற்றத்தின் பொருந்தக்கூடிய தன்மையை ஆராய்க.

a. $[0, 3]$ ல் $f(x) = (x-1)^{\frac{2}{5}}$ b. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 3 - x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ c. $[-1, 1]$ ல், $f(x) = |x|$

விடைகள்

1. a. $c = 2 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ b. $c = 2$ c. $c = 5 - \sqrt{6}$ d. $c = \frac{\pi}{4}$
e. $c = \cos^{-1}\left(\frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}\right)$ f. $c = 0$ g. $c = \frac{\pi}{4}$ h. $c = \frac{\pi}{4}$
i. பொருந்தாது j. $c = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$
2. a. பொருந்தாது b. பொருந்தாது c. பொருந்தாது

2.1.2 லெக்ராஞ்சியின் சராசரி மதிப்புத் தேற்றம்

கூற்று : $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ என்ற சார்பானது

- i. $[a, b]$ என்ற மூடிய இடைவெளியில், f , தொடர்ச்சியானது
- ii. (a, b) என்ற திறந்த இடைவெளியில், f , வகையிடத்தக்கது.

ஏதேனும் ஒரு புள்ளி $c \in (a, b)$ யில்,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

நிருபணம் : $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi(x) = f(x) + Ax$, $x \in (a, b)$ என வரையறுக்கவும்.

இங்கு A என்பது கண்டுபிடிக்கப் படவேண்டிய மாறிலி.

$$\phi(a) = \phi(b) \quad \dots(1)$$

இப்போது

$$\phi(a) = f(a) + Aa$$

$$\phi(b) = f(b) + Ab$$

லிருந்து நாம் பெறுவது

$$f(a) + Aa = f(b) + Ab$$

$$A(a - b) = f(b) - f(a)$$

$$A = \frac{f(b) - f(a)}{a - b}$$

இப்போது,

- x -ன் பல்லுறுப்புக்கோவை Ax மற்றும் f ஆகியவை $[a, b]$ ல் தொடர்ச்சியானது, எனவே ϕ யும் $[a, b]$ ல் தொடர்ச்சியானது.
- x -ன் பல்லுறுப்புக்கோவை Ax மற்றும் f ஆகியவை (a, b) ன் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் வகையிடத்தக்கது. எனவே ϕ யும் வகையிடத்தக்கது
- $\phi(a) = \phi(b)$

$\phi(x)$ -க்கு ரோலின் தேற்றத்தின் மூன்று நிபந்தனைகளும் பூர்த்தியாகிறது. எனவே ஏதேனும் ஓர் புள்ளி $c \in (a, b)$ ல் $\phi'(c) = 0$

$$\Rightarrow \phi(x) = f(x) + Ax$$

$$\Rightarrow \phi'(x) = f'(x) + A$$

$$\Rightarrow \phi'(c) = f'(c) + A$$

$$\text{இப்போது, } \phi'(c) = 0$$

$$\Rightarrow f'(c) + A = 0 \Rightarrow f'(c) = -A$$

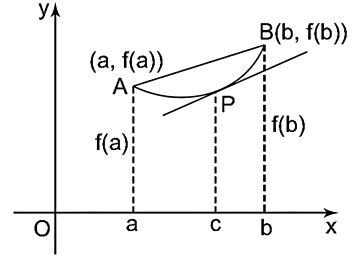
(2) யை பயன்படுத்த நாம் பெறுவது,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, c \in (a, b)$$

இது தேற்றத்தை நிறைவு செய்கிறது.

2.1.3 லெக்ராஞ்சியின் சராசரி மதிப்புத் தேற்றத்தின் வடிவக்கணித விளக்கம்

f என்ற சார்பின் வரைபடமானது, $[a, b]$ ல் தொடர்ச்சியானது மற்றும் (a, b) ல் வகையிடத்தக்கது என்க. AB என்ற வளைவரை ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் தொடுகோட்டை பெற்று இருந்தால், பின்னர் A மற்றும் B -யை தவிர வேறு ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் உள்ள தொடுகோடானது $(a, f(a))$ மற்றும் $(b, f(b))$ என்ற புள்ளிகளுக்கு இடையேயான கோட்டுத்துண்டிற்கு இணையாக இருக்கும்.



படம் 2.5

குறிப்புரை : ரோலின் தேற்றம் ஆனது லெக்ராஞ்சியின் சராசரி மதிப்புத் தேற்றத்தின் ஒரு சிறப்பு வகை ஆகும்.

சராசரி மதிப்புத் தேற்றத்தின் இரண்டு நிபந்தனைகளோடு,

$$f(a) = f(b) \text{ எனில்,}$$

பின்னர், $f(b) - f(a) = 0$. எனவே, $f'(c) = 0$ வடிவக்கணித விளக்கத்தில் வளைவரையின் ஒரு புள்ளியில் உள்ள தொடுகோடானது x - அச்சுக்கு இணையாக இருக்கும்.

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 2.7 : $[1, 3]$ -ல் $f(x) = x + \frac{1}{x}$ க்கு லெக்ராஞ்சியின் சராசரி மதிப்புத் தேற்றத்தை சரிபார்.

தீர்வு : இங்கு, $f(x) = x + \frac{1}{x}$

i. $f(x)$, x -ன் ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவை மற்றும் $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ ல் தொடர்ச்சியானது.

$\therefore [1, 3]$ ல் $f(x)$, தொடர்ச்சியானது.

ii. $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ அனைத்து $x \in (1, 3)$,

$\therefore (1, 3)$ ல் $f(x)$, வகையிடத்தக்கது.

$\therefore$ லெக்ராஞ்சின் சராசரி மதிப்பு தேற்றத்தின் அனைத்து நிபந்தனைகளும் பூர்த்தியாகிறது.

எனவே ஏதேனும் ஓர் புள்ளி $c \in (1, 3)$ ல்

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad \dots(1) \text{ [இங்கு, } b = 3, a = 1]$$

$f(b), f(a), f'(c)$ மதிப்புகளை (1) ல் பிரதியிட,

$$\frac{\frac{10}{3} - 2}{3 - 1} = 1 - \frac{1}{c^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow c = \pm\sqrt{3}$$

$$c = \sqrt{3} \in (1, 3)$$

$\therefore$ லெக்ராஞ்சின் சராசரி மதிப்பு தேற்றம் சரிபார்க்கப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு 2.8 : $x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < x - \frac{x^2}{2(1+x)}$, $x > 0$, எனக் காட்டுக.

தீர்வு : $f(x) = \log(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$ என எண்ணுக.

x ஐ பொறுத்து வகையிட,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x} - (1-x) \\ &= \frac{x^2}{1+x} > 0 \end{aligned}$$

$$\{\because x > 0\}$$

எனவே $f(x)$ அனைத்து $x > 0$ விலும் ஏறும் சார்பு.

மேலும் $f(0) = 0$

எனவே, $x > 0$ க்கு $f(x) > 0$

ஆகவே $\log(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$ $\dots(1)$

$$g(x) = x - \frac{x^2}{2(1+x)} - \log(1+x) \text{ என்க.}$$

x ஐ பொறுத்து வகையிட,

$$g'(x) = 1 - \frac{2x + x^2}{2(1+x)^2} - \frac{1}{1+x}$$

$$= \frac{x^2}{2(1+x)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{1+x} \right)^2 > 0$$

∴ $g(x)$ அனைத்து $x > 0$ விலும் இறங்கும் சார்பு.

மேலும் $g(0) = 0$

எனவே, $x > 0$ க்கு $g(x) > 0$

ஆகவே $x - \frac{x^2}{2(1+x)} > \log(1+x) \quad \dots(2)$

மற்றும் (2) லிருந்து

$$x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < x - \frac{x^2}{2(1+x)}, x > 0$$

எடுத்துக்காட்டு 2.9 : $[0, 3]$ -ல் $f(x) = \begin{cases} 1+3x, & x \leq 1 \\ 2x^2 + 2, & x > 1 \end{cases}$ என்ற சார்புக்கு லெக்ராஞ்சின் சராசரி மதிப்பு

தேற்றத்தின் செல்லுபடித்தன்மையை பரிசோதி.

தீர்வு : இங்கு, $[0, 3]$ -ல், $f(x) = \begin{cases} 1+3x, & x \leq 1 \\ 2x^2 + 2, & x > 1 \end{cases}$

$f(x)$, x -ன் ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவை மற்றும் $[0, 3] - \{1\}$ -ல் தொடர்ச்சியானது.

i. $x = 1$ -ல் தொடர்ச்சி

$$Rf(1) = \lim_{x \rightarrow 1} 2x^2 + 2 = \lim_{h \rightarrow 0} 2(1+h)^2 + 2 = 4$$

$$Lf(1) = \lim_{x \rightarrow 1} 1 + 3x = \lim_{h \rightarrow 0} 1 + 3(1-h) = 4$$

மேலும் $f(1) = 4$

நாம் பெறுவது $Rf(1) = Lf(1) = f(1)$

⇒ $f(x)$, $[0, 3]$ -ல் தொடர்ச்சியானது.

∴ $f(x)$, $[0, 3]$ -ல் தொடர்ச்சியானது.

ii. $[0, 3]$ -ல், $f'(x) = \begin{cases} 3, & x \leq 1 \\ 4x, & x > 1 \end{cases}$

$x = 1$ -ல் வகைமை,

$$Rf'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4(1+h) - 4}{h} = 4$$

$$Lf'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{h}$$

$$Lf'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3-4}{h} = \text{இல்லை}$$

⇒ $x = 1 \in (0, 3)$, ல் $f'(x)$ இல்லை

$f(x)$, $(0, 3)$ -ல் வகையிடத்தக்கது அல்ல. எனவே லெக்ராஞ்சின் சராசரி மதிப்பு தேற்றத்தின் செல்லுபடியாகாது

எடுத்துக்காட்டு 2.10 : $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ல் $f(x) = \cos x$ -க்கு லெக்ராஞ்சின் சராசரி மதிப்பு தேற்றத்தை சரிபார்.

தீர்வு : இங்கு, $f(x) = \cos x$

i. கொசைன் சார்பு x -ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் தொடர்ச்சியானது என்பது நமக்குத் தெரியும், எனவே $f(x)$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ல் தொடர்ச்சியானது

ii. $f'(x) = \sin x =$ முடிவுறு. வரையறுக்கப்பட்டது

$\therefore f(x)$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ல் வகையிடத்தக்கது.

$\therefore$ லெக்ராஞ்சின் சராசரி மதிப்பு தேற்றத்தின் அனைத்து நிபந்தனைகளும் பூர்த்தியாகிறது.

எனவே ஏதேனும் ஓர் புள்ளி $c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ல்

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad \text{[இங்கு, } b = \frac{\pi}{2}, a = 0 \text{]}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0, f(0) = \cos 0 = 1$$

மதிப்புகளை பிரதியிட

$$\Rightarrow \frac{0 - 1}{\frac{\pi}{2} - 0} = -\sin c$$

$$\Rightarrow c = \sin^{-1}\left(\frac{2}{\pi}\right)$$

$$\Rightarrow c = \sin^{-1}(0.636) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$\therefore$ லெக்ராஞ்சின் சராசரி மதிப்பு தேற்றம் சரிபார்க்கப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு 2.11 : $\frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1} x < x$, $x > 0$, எனக் காட்டுக.

தீர்வு : எண்ணுக. $f(x) = \tan^{-1} x - \frac{x}{1+x^2}$

x ஐ பொறுத்து வகையிட,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} > 0 \quad \forall x > 0 \end{aligned}$$

எனவே $f(x)$ அனைத்து $x > 0$ விலும் ஏறும் சார்பு.

மேலும் $f(0) = 0$

எனவே, $x > 0$ க்கு $f(x) > 0$

$$[\tan^{-1} 0 - 0 = 0]$$

ஆகவே $\tan^{-1} x > \frac{x}{1+x^2}$

$$\dots(1)$$

$$g(x) = x - \tan^{-1} x \text{ என்க}$$

x ஐ பொறுத்து வகையிட,

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} > 0 \forall x > 0$$

$\therefore g(x)$ அனைத்து $x > 0$ விலும் இறங்கும் சார்பு.

மேலும் $g(0) = 0 - \tan^{-1} 0 = 0$

எனவே, $g(x) > 0 \forall x > 0$

ஆகவே $x > \tan^{-1} x \forall x > 0$

...(2)

(1) மற்றும் (2) லிருந்து,

$$\frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1} x < x, \quad x > 0$$

பயிற்சி 2.2

1. கொடுக்கப்பட்ட இடைவெளியில் பின்வரும் சார்புகளுக்கு, லெக்ராஞ்சின் சராசரி மதிப்பு தேற்றத்தை சரிபார்.

a. $[1, 3]$ -ல், $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

b. $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ ல், $f(x) = x(x-1)(x-2)$

c. $[1, 4]$ -ல், $f(x) = \frac{1}{4x-1}$

d. $[-3, 4]$ -ல், $f(x) = \sqrt{25-x^2}$

e. $[1, e]$ -ல், $f(x) = \log x$

f. $[-\pi, \pi]$ -ல், $f(x) = x - 2 \sin x$

2. பின்வரும் சார்புகளுக்கு லெக்ராஞ்சின் சராசரி மதிப்பு தேற்றத்தின் பொருந்தக்கூடிய தன்மையை ஆராய்க.

a. $[-1, 1]$ -ல் $f(x) = |x|$

b. $[a, b]$ ல், $f(x) = \beta$ (மாறிலிச் சார்பு)

c. $[-1, 1]$ -ல், $f(x) = x^{1/3}$

d. $[-3, 4]$ ல், $f(x) = |x+2|$

3. லெக்ராஞ்சின் சராசரி மதிப்பு தேற்றத்தை, தீர்க்க

a. $[-1, 0]$ -ல், $\frac{x^2}{2} < x - \log(1+x) < \frac{x^2}{2(1+x)}$

b. $\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x, \quad x > 0$

c. $1+x < e^x < 1+xe^x$ அனைத்து $x > 0$ விலும்

4. $0 < x < y$ வி ல் $\frac{y-x}{1+y^2} < \tan^{-1} y - \tan^{-1} x < \frac{y-x}{1+x^2}$, எனக் காட்டுக மற்றும் $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < \tan^{-1} \frac{4}{3} < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}$

என வருவிக்க

விடைகள்

1. a. $c = 2$ b. $c = \frac{6-\sqrt{21}}{6}$ c. $c = \frac{1+3\sqrt{5}}{4}$ d. $c = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ e. $c = e-1$ f. $c = \pm \frac{\pi}{3}$

2. a. பொருந்தாது b. பொருந்தும் c. பொருந்தாது d. பொருந்தாது

2.1.4 கோஷியின் சராசரி மதிப்புத் தேற்றம்

கூற்று : $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ மற்றும் $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ஆகிய சார்புகளை கருதுக

- i. f மற்றும் g இரண்டும் $[a, b]$ -ல் தொடர்ச்சியானது
- ii. f மற்றும் g இரண்டும் (a, b) -ல் வகையிடத்தக்கது
- iii. $g'(x) \neq 0$ அனைத்து $x \in (a, b)$ எனில், பின்னர் ஏதேனும்

$$\text{ஒரு புள்ளி } c \in (a, b) \text{-ல் } \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

நிரூபணம் : $g(a) = g(b)$, எனில் g , ரோலின் தேற்றத்தின் அனைத்து நிபந்தனைகளையும் பூர்த்திப்படுத்தும்.

ஆதலால் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி $c \in (a, b)$ -ல் $g'(c) = 0$.

இது கொடுக்கப்பட்ட $g'(c) \neq 0 \forall x \in (a, b)$ க்கு முரண்பாடானது. எனவே நம் அனுமானம் தவறு, ஆகவே $g(a) \neq g(b)$.

இங்கு $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, வை $\phi(x) = f(x) + Ag(x)$, $x \in (a, b)$ என வரையறுக்கவும்.

இங்கு A என்பது $\phi(a) = \phi(b)$ ன் மூலம் கண்டுபிடிக்கப் படவேண்டிய மாறிலி ... (1)

இப்போது, $\phi(a) = f(a) + Ag(a)$

$$\phi(b) = f(b) + Ag(b)$$

(1)-ஐ பயன்படுத்த நமக்கு கிடைப்பது

$$f(a) + Ag(a) = f(b) + Ag(b)$$

$$\Rightarrow A[g(a) - g(b)] = f(b) - f(a)$$

$$A = \frac{f(b) - f(a)}{g(a) - g(b)} \quad \dots (2)$$

இப்போது,

i. இரண்டுசார்புகள் f, g மற்றும் மாறிலி A , ஆகியவை $[a, b]$ -ல் தொடர்ச்சியானது, எனவே $\phi(x)$ -ம் $[a, b]$ -ல் தொடர்ச்சியானது,

ii. இரண்டுசார்புகள் f, g மற்றும் மாறிலி A , ஆகியவை $[a, b]$ -ல் வகையிடத்தக்கது, எனவே $\phi(x)$ -ம் $[a, b]$ -ல் வகையிடத்தக்கது,

iii. மேலும், $f(a) = f(b)$

எனவே $\phi(x)$ -க்கு ரோலின் தேற்றத்தின் மூன்று நிபந்தனைகளும் பூர்த்தியாகிறது.

பின்னர் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி $c \in (a, b)$ -ல் $\phi'(c) = 0$

$$\phi(x) = f(x) + Ag(x)$$

$$\Rightarrow \phi'(x) = f'(x) + Ag'(x) \quad \Rightarrow \phi'(c) = f'(c) + Ag'(c)$$

$$\text{இப்போது, } \phi'(c) = 0 \quad \Rightarrow f'(c) + Ag'(c) = 0$$

$$\Rightarrow f'(c) = -Ag'(c) \quad \Rightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = -A$$

(2) யை பயன்படுத்த நமக்கு கிடைப்பது

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

ஆகவே தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

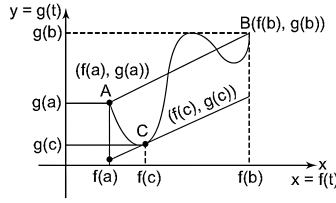
குறிப்புரை : $g(x) = x$, $x \in (a, b)$ எனும்போது கோஷியின் சராசரி மதிப்புத் தேற்றத்தின் தனிப்பட்ட வகை லெக்ராஞ்சின் சராசரி மதிப்புத் தேற்றம் ஆகும்.

2.1.5 கோஷியின் சராசரி மதிப்புத் தேற்றத்தின் வடிவக்கணித விளக்கம்

$t \in (a, b)$ -ல் $x = f(t)$ மற்றும் $x = g(t)$ ஆகியவை துணைஅலகு வளைவரை எனில்.

- i. f மற்றும் g இரண்டும் $[a, b]$ -ல் தொடர்ச்சியானது.
- ii. f மற்றும் g இரண்டும் (a, b) -ல் வகையிடத்தக்கது.
- iii. $g'(x) \neq 0$ அனைத்து $x \in (a, b)$ -யிலும்,

பின்னர் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி $c \in (a, b)$ -ல் தொடுகோடு AB க்கு இணையாக இருக்கும்.



படம் 2.6

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 2.12 : $[0, 1]$ ல், $f(x) = e^x$ மற்றும் $g(x) = e^{-x}$ ஆகிய சார்புகளுக்கு, கோஷியின் சராசரி மதிப்புத் தேற்றத்தை சரிபார்.

தீர்வு : இங்கு $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$

- i. f மற்றும் g , ஆகியவை $[0, 1]$ -ல் தொடர்ச்சியானது.
- ii. $f'(x) = e^x$, $g'(x) = -e^{-x}$, ஆகியவை $(0, 1)$ -ல் வகையிடத்தக்கது.
- iii. $g'(x) = e^{-x} \neq 0 \forall x \in (0, 1)$,

பின்னர் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி $c \in (0, 1)$ -ல்

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

[இங்கு $b = 1$, $a = 0$] ... (1)

ஆதலால் $f(1) = e^1 = e$, $f(0) = e^0 = 1$ மற்றும் $g(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$, $g(0) = e^{-0} = 1$

(1) ல் பிரதியிட நாம் பெறுவது,

$$\frac{e-1}{\frac{1}{e}-1} = \frac{e^c}{-e^{-c}} \Rightarrow 1 = e^{2c-1}$$

$$\Rightarrow e^0 = e^{2c-1} \Rightarrow 0 = 2c-1 \Rightarrow c = \frac{1}{2} \in (0,1)$$

∴ கோவியின் சராசரி மதிப்பு தேற்றம் சரிபார்க்கப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு 2.13 : f , எனும் சார்பு $[a, b]$ -ல் தொடர்ச்சியானது மற்றும் (a, b) -ல் வகையிடத்தக்கது என்க. பின்னர் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி $c \in (1, b)$ ல் $2c[f(a)-f(b)] = f'(c)[a^2-b^2]$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

i. f , எனும் சார்பு $[a, b]$ -ல் தொடர்ச்சியானது.

ii. f , எனும் சார்பு (a, b) -ல் வகையிடத்தக்கது.

∴ லெக்ராஞ்சின் சராசரி மதிப்பு தேற்றத்தின் அனைத்து நிபந்தனைகளும் பூர்த்தியாகிறது. எனவே ஏதேனும் ஒரு புள்ளி $c \in (1, b)$ -ல்

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

$$\Rightarrow \frac{f(a)-f(b)}{a-b} = f'(c)$$

$$\Rightarrow f(a)-f(b) = f'(c)(a-b) \quad \dots(1)$$

கொடுக்கப்பட்டது $2c[f(a)-f(b)] = f'(c)[a^2-b^2]$

(1)-ஐ பயன்படுத்த நமக்கு கிடைப்பது

$$2c[(a-b)f'(c)] = f'(c)[(a-b)(a+b)]$$

$$\Rightarrow 2c = a+b$$

$$\Rightarrow c = \frac{a+b}{2}$$

$$\Rightarrow c = \frac{a+b}{2} \in (a, b)$$

நிரூபிக்கப்பட்டது

எடுத்துக்காட்டு 2.14 : $\sqrt[3]{3} = 1.44$ யை பயன்படுத்தி $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x^2 - 4$ என்ற சார்புக்கு

$[1, 2]$ -ல் ' c '-ன் மதிப்பை காண்க.

தீர்வு : இங்கு $[1, 2]$ -ல், $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x^2 - 4$

i. f எனும் சார்பு அனைத்து $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ விலும் தொடர்ச்சியானது மற்றும் பல்லுறுப்புக்கோவை g அனைத்து புள்ளிகளிலும் தொடர்ச்சியானது.

∴ $f(x)$ மற்றும் $g(x)$, ஆகியவை $[1, 2]$ -ல் தொடர்ச்சியானது

ii. $f'(x) = \frac{1}{x^2}, g'(x) = 2x$ ஆகியவை $[1, 2]$ -ல் வகையிடத்தக்கது.

iii. $g'(x) = 2x \neq 0 \forall x \in (1, 2)$

எனவே ஏதேனும் ஓர் புள்ளி $c \in (1, 2)$ ல்,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \dots(1)$$

இங்கு $a = 1, b = 2$

ஆதலால் $f(2) = \frac{1}{2}, f(1) = 1, g(2) = 0, g(1) = -3$

(1) ல் பிரதியிட நாம் பெறுவது,

$$\frac{\frac{1}{2} - 1}{0 - (-3)} = \frac{-\frac{1}{c^2}}{2c}$$

$$\Rightarrow c^3 = 3$$

$$\Rightarrow c^3 = 3 = \sqrt[3]{3} = 1.44 \in (1, 2)$$

எடுத்துக்காட்டு 2.15 : $[a, b]$ ல், $f(x) = x^2, g(x) = x^4 \neq 0$ ஆகிய சார்புகளுக்கு, கோஷியின் சராசரி மதிப்பு தேற்றத்தை சரிபார். இங்கு $a > 0, b > 0$.

தீர்வு : இங்கு $f(x) = x^2, g(x) = x^4 \neq 0$

i. f மற்றும் g , ஆகியவை x -ன் பல்லுறுப்புக்கோவைகள், எனவே அனைத்து புள்ளிகளிலும் தொடர்ச்சியானது.

$\therefore f(x)$ மற்றும் $g(x)$, ஆகியவை $[a, b]$ -ல் தொடர்ச்சியானது

ii. $f'(x) = 2x, g'(x) = 4x^3$

$f'(x)$ மற்றும் $g'(x)$ ஆகியவை x -ன் பல்லுறுப்புக்கோவைகள், எனவே அனைத்து புள்ளிகளிலும் வகையிடத்தக்கது.

$\therefore f'(x)$ மற்றும் $g'(x)$ ஆகியவை $[a, b]$ -ல், வகையிடத்தக்கது.

iii. $g'(x) = 4x^3 \neq 0 \forall x \in (a, b), \{a > 0, b > 0\}$

$\therefore$ லெக்ராஞ்சின் சராசரி மதிப்பு தேற்றத்தின் அனைத்து நிபந்தனைகளும் பூர்த்தியாகிறது. எனவே ஏதேனும் ஓர் புள்ளி $c \in (a, b)$ -ல்,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \{\text{இங்கு } a = a, b = b\}$$

ஆதலால், $f(b) = b^2, f(a) = a^2, g(a) = a^4, g(b) = b^4$

$$\Rightarrow \frac{b^2 - a^2}{b^4 - a^4} = \frac{2c}{4c^3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b^2 + a^2} = \frac{1}{2c^2}$$

$$\Rightarrow c^2 = \frac{b^2 + a^2}{2}$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{\frac{b^2 + a^2}{2}} \in (a, b)$$

∴ கோஷியின் சராசரி மதிப்பு தேற்றம் சரிபார்க்கப்பட்டது.

பயிற்சி 2.3

1. பின்வரும் சார்புகளுக்கு, கோஷியின் சராசரி மதிப்பு தேற்றத்தை சரிபார்.

a. $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ ல், $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ b. $[1, 2]$ -ல், $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$

c. $[1, 3]$ -ல், $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ d. $[1, e]$ -ல், $f(x) = \log x$, $g(x) = \frac{1}{x}$

e. $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ ல், $f(x) = (1+x)^{3/2}$, $g(x) = \sqrt{1+x}$

2. $f'(x)$ மற்றும் $g'(x)$ ஆகியவை $[a, b]$ -ல், வகையிடத்தக்கது, எனில்

$$\frac{f(b) - f(a) - (b-a)f'(a)}{g(b) - g(a) - (b-a)g'(a)} = \frac{f''(c)}{g''(c)}, \quad a < c < b \text{ எனக் காட்டுக.}$$

3. $\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \beta - \cos \alpha} = \cot \theta, 0 < \alpha < \theta < \beta < \frac{\pi}{2}$ எனக் காட்டுக.

விடைகள்

1. a. $c = -\frac{\pi}{4}$ b. $c = \frac{14}{9}$ c. $c = \sqrt{3}$ d. $c = \frac{e}{e-1}$ e. $c = \frac{\sqrt{6}-1}{\sqrt{6}}$

சுவாரஸ்யமான உண்மை

- ◆ ரோலின் தேற்றம், தொடர்ச்சி மற்றும் வகையிடலின் உறவை நிறுவுகிறது.
- ◆ வேகமானியின் துல்லியத்தை சரிபார்க்க சராசரி மதிப்பு தேற்றம் பயன்படுத்தப்படுகிறது.
- ◆ வகையிடல் மறைந்து போகும் புள்ளியின் உருவாக்கத்தை இது குறிக்கிறது.



Rolle's Theorem



Rolle's Theorem
& Lagrange
Mean Value
Theorem (MVT)



Mean Value
Theorems

அன்றாட வாழ்வில் பயன்பாடுகள்:

- ♦ A முதல் B வரையிலான பயணத்தின் சராசரி வேகம் 50 கிமீ/மணி என்று சொன்னால், உடனடி வேகம் 50 கிமீ/மணி நேரமாக இருக்க வேண்டும் (அதுதான் அதிகபட்சம்).
- ♦ சூரிய அஸ்தமன நேரங்களில், பருவங்களுக்கு ஏற்ப மாற்றத்தின் விகிதம்.
- ♦ காற்றில் ஒரு பந்து மேல்நோக்கி வீசப்படும் போது, அதன் வேகம் சில சமயங்களில் பூஜ்ஜியமாக மாறும். ரோலின் தேற்றம் சில காலங்களில் பந்தின் வேகம் பூஜ்ஜியமாகிறது என்பதை விளக்குகிறது.
- ♦ LMVT வேகத்திற்கு “செலுத்துச்சீட்டு” வழங்கப் பயன்படுகிறது.

2.2 டெய்லரின் தேற்றம்

டெய்லரின் தேற்றம் சராசரி மதிப்பு தேற்றத்தின் நீட்டிப்பாகும், ஏனெனில் சராசரி மதிப்பு தேற்றம் வகையீட்டின் மதிப்பு மற்றும் அதன் முதல் வகை வகைக்கெழு ஆகியவற்றை தொடர்புப் படுத்துகிறது, ஆனால் டெய்லரின் தேற்றம் சார்பின் மதிப்பு மற்றும் அதன் முதல் வகை வகைக்கெழு ஆகியவற்றை தொடர்புப் படுத்துகிறது.

2.2.1 லாக்ரேஞ்சின் எஞ்சிய வடிவத்துடன் டெய்லரின் தேற்றம்

கூற்று : $f : [a, a+h] \rightarrow \mathbb{R}$ என்க

- $f, f', f'' \dots f^{n-1}$ ஆகியவை $[a, a+h]$ ல், x -ன் தொடர்ச்சியான சார்புகளாகும்.
- $(a, a+h)$ -ல், $f'(x)$ உருவாகிறது எனில் பின்னர் ஏதேனுமொரு மெய்யெண் θ , $0 < \theta < 1$ -ல்,

$$f(a+h) = f(a) + h.f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(a) + \frac{h^n}{(n)!} f^n(\theta h + a)$$

நிரூபணம் : $f : [a, a+h] \rightarrow \mathbb{R}$ சார்பை பின்வருமாறு கருத்தில் கொள்க.

$$\phi(x) = f(x) + (a+h-x).f'(a) + \frac{(a+h-x)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(a+h-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(a) + \frac{(a+h-x)^n}{(n)!} A \quad \dots(1)$$

இங்கு A என்பது ஒரு மாறிலியாகத் தேர்ந்தெடுக்கப்பட வேண்டும்.

$$\phi(a) = \phi(a+h) \quad \dots(2)$$

$$x = a \text{ மற்றும் } x = a + h \text{ என (1) ல் பிரதியிட } \phi(a) = f(a) + h.f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(a) + \frac{h^n}{(n)!} A$$

$$\text{மற்றும் } \phi(a) = f(a+h)$$

இந்த மதிப்புகளை (2) ல், பிரதியிட

$$f(a+h) = f(a) + h.f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(a) + \frac{h^n}{(n)!} A \quad \dots(3)$$

இப்போது

- $f(x), f'(x), f''(x) \dots f^{n-1}(x)$ ஆகியவை $[a, a+h]$ -ல் தொடர்ச்சியானவை மற்றும் $[a, a+h]$, $(a+h-x)^2, \dots (a+h-x)^n$ ஆகிய பல்லுறுப்புக் கோவைகளும் $[a, a+h]$ -ல் தொடர்ச்சியானவை,

எனவே $\phi(x)$ -ம் $[a, a+h]$ -ல் தொடர்ச்சியானது. மேலும் தொடர்ச்சியான சார்புகளின் இயற்கணிதத் தொகையும் தொடர்ச்சியானது.

- ii. $f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{n-1}(x)$ ஆகியவை $[a, a+h]$ -ல் வகையிடத்தக்கவை மற்றும் $[a, a-h]$, $(a+h-x)^2, \dots, (a+h-x)^n$ ஆகிய பல்லுறுப்புக் கோவைகளும் $[a, a+h]$ -ல் வகையிடத்தக்கவை, எனவே $\phi(x)$ -ம் $[a, a+h]$ -ல் வகையிடத்தக்கது.

- iii. மேலும், $\phi(a) = \phi(a+h)$

$\therefore \phi(x)$, $[a, a+h]$ -ல் ரோலின் தேற்றத்தின் மூன்று நிபந்தனைகளையும் பூர்த்தி செய்கிறது.

எனவே ஏதேனும் ஓர் புள்ளி θ , $0 < \theta < 1$ -ல்

$$\phi'(a + \theta h) = 0 \quad \dots(4)$$

(1) யை, x ஐ பொறுத்து வகையிட, நாம் பெறுவது

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= f'(x) + (a+h-x) \cdot f''(x) - f'(x) + \frac{(a+h-x)^2}{2!} f'''(x) + \frac{2(a+h-x)}{2!} (-1) f'''(x) + \dots \\ &+ \dots + \frac{(a+h-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(x) - \frac{(n-1)(a+h-x)^{n-2}}{(n-1)!} f^{n-1}(x) + \frac{n(a+h-x)^{n-1}(-1)}{(n)!} A \end{aligned}$$

அல்லது

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= \frac{(a+h-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(x) - \frac{(a+h-x)^{n-1}}{(n-1)!} A \\ &= \frac{(a+h-x)^{n-1}}{(n-1)!} [f^n(x) - A] \end{aligned}$$

$x = a + \theta h$ எனப் பிரதியிட,

$$\phi'(a + \theta h) = \frac{[h(1-\theta)]^{n-1}}{(n-1)!} [f^n(a + \theta h) - A]$$

ஆனால், $\phi'(a + \theta h) = 0$

$$\Rightarrow f^n(a + \theta h) - A = 0$$

$$\Rightarrow A = f^n(a + \theta h)$$

(3) லிருந்து, $f(a+h) = f(a) + h \cdot f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(a) + \frac{h^n}{(n)!} f^n(a + \theta h)$

இது தேற்றத்தின் தேவையான முடிவு.

இங்கு $(n+1)^{th}$ உறுப்பு, அதாவது $\frac{h^n}{n!} f^n(a + \theta h)$ என்பது, n^{th} உறுப்பிற்கு பிறகு லாக்ரேஞ்சின் எஞ்சிய வடிவம் என அழைக்கப்படும்.

2.2.2 லாக்ரேஞ்சின் எஞ்சிய வடிவத்துடன் மெக்லாரின் தேற்றம்

கூற்று : $f(x)$ எனும் சார்பு $[0, x]$ எனும் மூடிய இடைவெளியில் வரையறுப்பட்டுள்ளது என்க.

- i. $f, f', f'', \dots, f^{n-1}$ ஆகியவை $[0, x]$ -ல், தொடர்ச்சியான சார்புகளாகும்.

- ii. $f''(x)$, $[0, x]$ -ல் உருவாகிறது எனில் பின்னர் ஏதேனுமொரு மெய்யெண் θ , $0 < \theta < 1$ -ல்

$$f(x) = f(0) + x \cdot f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(0) + \frac{x^n}{(n)!} f^n(\theta x)$$

நிரூபணம் : டெய்லரின் தேற்றத்திலிருந்து, நாம் பெறுவது

$$f(a+h) = f(a) + h.f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{(n)!}f^{(n)}(a+\theta h)$$

இந்த கோவையில் $a=0, h=x$ எனப் பிரதியிட, நாம் பெறுவது

$$f(x) = f(0) + x.f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{(n)!}f^{(n)}(\theta x), 0 < \theta < 1$$

மேற்கண்ட கோவையானது தேவையான, லாக்ரேஞ்சின் எஞ்சிய வடிவத்துடன் கூடிய மேக்லாரின் தேற்றமாகும்.

2.2.3 கோஷியின் எஞ்சிய வடிவத்துடன் டெய்லரின் தேற்றம்

கூற்று : $f : [a, a+h] \rightarrow \mathbb{R}$ என்க

- $f, f', f'' \dots \dots \dots f^{(n-1)}$ ஆகியவை $[a, a+h]$ -ல், x -ன் தொடர்ச்சியான சார்புகளாகும்.
- $[a, a+h]$ -ல், $f^{(n)}(x)$ உருவாகிறது எனில் பின்னர் ஏதேனுமொரு மெய்யெண் $\theta, 0 < \theta < 1$ -ல்,

$$f(a+h) = f(a) + h.f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{(n)!}f^{(n)}(\theta h+a)$$

நிரூபணம் : $f : [a, a+h] \rightarrow \mathbb{R}$ சார்பை பின்வருமாறு கருத்தில் கொள்க.

$$\phi(x) = f(x) + (a+h-x).f'(a) + \frac{(a+h-x)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(a+h-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{(a+h-x)^n}{(n)!}A \quad \dots(1)$$

இங்கு A என்பது ஒரு மாறிலியாகத் தேர்ந்தெடுக்கப்பட வேண்டும்.

$$\phi(a) = \phi(a+h) \quad \dots(2)$$

$x=a$ மற்றும் $x=a+h$ என (1) ல் பிரதியிட

$x=a$ என (1) ல் பிரதியிட

$$\phi(a) = f(a) + h.f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{(n)!}A \quad \dots(2)$$

மற்றும் $\phi(a) = f(a+h)$

$x=a+h$ என (1) ல் பிரதியிட, நாம் பெறுவது

$$\phi(a+h) = f(a+h) + 0 + 0 + \dots = f(a+h) \quad \dots(3)$$

மற்றும், $\phi(a+h) = \phi(a)$

பின்னர், (2) மற்றும் (3), லிருந்து, நாம் பெறுவது

$$f(a+h) = f(a) + h.f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + hA \quad \dots(4)$$

இப்போது

- $f(x), f'(x), f''(x) \dots \dots \dots f^{(n-1)}(x)$ ஆகியவை $[a, a+h]$ ல் தொடர்ச்சியானவை மற்றும் $(a+h-x), (a+h-x)^2, \dots, (a+h-x)^n$ ஆகிய பல்லுறுப்புக் கோவைகளும் $[a, a+h]$ ல் தொடர்ச்சியானவை, எனவே $\phi(x)$ ம் $[a, a+h]$ ல் தொடர்ச்சியானது.

ii. $f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{n-1}(x)$ ஆகியவை $(a, a+h)$ ல் வகையிடத்தக்கவை மற்றும் $(a+h-x), (a+h-x)^2, \dots, (a+h-x)^n$ ஆகிய பல்லுறுப்புக் கோவைகளும் $(a, a+h)$ ல் வகையிடத்தக்கவை, எனவே $\phi(x)$ ம் $(a, a+h)$ ல் வகையிடத்தக்கது.

iii. மேலும், $\phi(a) = \phi(a+h)$

$\therefore \phi(x), [a, a+h]$ ல் ரோலின் தேற்றத்தின் மூன்று நிபந்தனைகளையும் பூர்த்தி செய்கிறது. எனவே ஏதேனும் ஓர் புள்ளி $\theta, 0 < \theta < 1$ -ல் $\phi'(a+\theta h) = 0$

(1) யை, x ஐ பொறுத்து வகையிட, நாம் பெறுவது

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= f'(x) + [(a+h-x).f''(x) - f'(x)] + \frac{1}{2!} \left[2(a+h-x) - f''(x)(-1) \frac{(a+h-x)^2}{2!} f'''(x) \right] + \dots \\ &+ \dots + \frac{1}{(n-1)!} \left[(a+h-x)^{n-1} f^n(x) - (n-1)(a+h-x)^{n-2} f^{n-1}(x) \right] - A \end{aligned}$$

அல்லது
$$\phi'(x) = \frac{(a+h-x)^{n-1} f^n(x)}{(n-1)!} - A$$

$x = a + \theta h$ எனப் பிரதியிட, நாம் பெறுவது

$$\begin{aligned} \phi'(a+\theta h) &= \frac{(a+h-a-\theta h)^{n-1} f^n(a+\theta h)}{(n-1)!} - A \\ &= \frac{\{h(1-\theta)\}^{n-1} \{f^n(a+\theta h)\}}{(n-1)!} - A \\ &= \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} (1-\theta)^{n-1} f^n(a+\theta h) - A \end{aligned}$$

ஆனால், $\phi'(a+\theta h) = 0$

$\Rightarrow \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} (1-\theta)^{n-1} f^n(a+\theta h) - A = 0$

அல்லது
$$A = \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} (1-\theta)^{n-1} f^n(a+\theta h)$$

'A'-இன் இந்த மதிப்பை (4), ல் பிரதியிட

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + h.f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(a) + h \left[\frac{h^{n-1}}{(n-1)!} (1-\theta)^{n-1} f^n(a+\theta h) \right] \\ f(a+h) &= f(a) + h.f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(a) + \frac{h^n}{(n-1)!} (1-\theta)^{n-1} f^n(a+\theta h) \end{aligned}$$

மேற்கண்ட கோவையானது தேவையான, கோவையின் எஞ்சிய வடிவத்துடன் கூடிய டெய்லரின் தேற்றமாகும்.

இங்கு, $\frac{h^{n-1}}{(n-1)!} (1-\theta)^{n-1} f^n(a+\theta h)$ என்பது, n^{th} உறுப்பிற்கு பிறகு கோவையின் எஞ்சிய வடிவம் என அழைக்கப்படும்.

2.2.4 கோஷியின் எஞ்சிய வடிவத்துடன் மெக்லாரின் தேற்றம்

கூற்று : $f(x)$ எனும் சார்பு $[0, x]$ எனும் மூடிய இடைவெளியில் வரையறுப்பட்டுள்ளது என்க.

i. $f, f', f'' \dots f^{n-1}$ ஆகியவை $[0, x]$ -ல், தொடர்ச்சியான சார்புகளாகும்.

ii. $f^n(x)$, $(0, x)$ -ல் உருவாகிறது எனில் பின்னர் ஏதேனுமொரு மெய்யெண் θ , $0 < \theta < 1$ -ல்

$$f(x) = f(0) + x.f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(0) + \frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{(n)!}f^n(\theta x), 0 < \theta < 1$$

நிரூபணம் : கோஷியின் எஞ்சிய வடிவத்துடன் கூடிய டெய்லரின் தேற்றத்திலிருந்து, நாம் பெறுவது

$$f(a+h) = f(a) + h.f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a) + \frac{h^n}{(n)!}(1-\theta)^{n-1}f^n(a+\theta h)$$

இந்த கோவையில் $a = 0$, $h = x$ எனப் பிரதியிட, நாம் பெறுவது

$$f(x) = f(0) + x.f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(0) + \frac{x^n}{(n)!}(1-\theta)^{n-1}f^n(\theta x), 0 < \theta < 1$$

இது கோஷியின் எஞ்சிய வடிவத்துடன் கூடிய மெக்லாரின் தேற்றமாகும்.

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 2.16 : $f(x) = (1-x)^{7/2}$ என்ற சார்பின் விரிவு, $f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \dots$ எனக்

கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. $x \rightarrow 1$ எனில் θ -வின் மதிப்பை காண்க.

தீர்வு : இங்கே,

$$f(x) = (1-x)^{7/2}$$

$$f'(x) = -\frac{7}{2}(1-x)^{5/2}$$

$$f''(x) = \frac{35}{4}(1-x)^{3/2}$$

$$f'''(x) = -\frac{105}{8}(1-x)^{1/2}$$

மேலுள்ள அனைத்து வகையீடுகளையும் $x = 0$ -ல் காண, நாம் பெறுவது,

$$f(0) = 1, f'(0) = -\frac{7}{2}, f''(0) = \frac{35}{4}, f'''(\theta x) = -\frac{105}{8}(1-\theta x)^{1/2}$$

இப்போது

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(\theta x)$$

$\Rightarrow$

$$(1-x)^{7/2} = 1 - \frac{7}{2}x + \frac{35}{8}x^2 - \frac{105}{48}(1-\theta x)^{1/2}x^3$$

$x \rightarrow 1$, எனில் நாம் பெறுவது, $0 = 1 - \frac{7}{2}x + \frac{35}{8}x^2 - \frac{105}{48}(1-\theta)^{1/2}$

$\Rightarrow$

$$\frac{105}{48}(1-\theta)^{1/2} = \frac{15}{8}$$

$$\Rightarrow (1-\theta)^{1/2} = \frac{15}{8} \times \frac{48}{105}$$

$$\Rightarrow (1-\theta)^{1/2} = \frac{6}{7}$$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த

$$1-\theta = \frac{36}{49}$$

$$\Rightarrow \theta = 1 - \frac{36}{49}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{13}{49} \text{ (விடை)}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.17 : x -இன் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும்

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin(\theta x) \text{ எனக் காட்டுக.}$$

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டது, $f(x) = \cos x$

$$f'(x) = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x) = -\cos x = \cos(x + \pi)$$

$$f'''(x) = \sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$$

$$f^{(4)}(x) = \cos x = \cos(2\pi + x)$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$f^n(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$f^{2n-1}(x) = \cos\left(x + (2n-1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{2n}(x) = \cos\left(x + 2n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{2n}(x) = \cos(x + n\pi)$$

$$f^{2n+1}(x) = \cos\left(x + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{2n+1}(\theta x) = \cos\left(\theta x + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

ஆதலால்,

$$f(0) = \cos 0 = 1, \quad f'(0) = -\sin 0 = 0$$

$$f''(0) = -\cos 0 = -1, \quad f'''(0) = \sin 0 = 0$$

$$f^{(4)}(0) = \cos 0 = 1$$

$$\begin{aligned}
 & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
 & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
 & f^{2n-1}(0) = \cos \left[(2n-1) \frac{\pi}{2} \right] \\
 & = \cos \left(n\pi - \frac{\pi}{2} \right) = 0 \\
 & f^{2n}(0) = \cos n\pi = \begin{cases} 1, & n = \text{even} \\ -1, & n = \text{odd} \end{cases} = (-1)^n \\
 & f^{2n+1}(\theta x) = \cos \left[\theta x + n\pi + \frac{\pi}{2} \right] \\
 & = \begin{cases} -\sin \theta x, & n = \text{even} \\ \sin \theta x, & n = \text{odd} \end{cases} = (-1)^{n+1} \sin \theta x
 \end{aligned}$$

மெக்லாரின் தேற்றத்தின் படி, நாம் பெறுவது.

$$f(x) = f(0) + x.f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}f^{2n}(0) + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}f^{2n+1}(\theta x)$$

மதிப்புகளை பதிலிட, நாம் பெறுவது

$$\cos x = 1 + x.0 + \frac{x^2}{2!}(-1) + \frac{x^3}{3!}(0) + \frac{x^4}{4!}(1) + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}(-1)^n + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^{n+1} \sin(\theta x)$$

$$\text{அதாவது } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin(\theta x)$$

எடுத்துக்காட்டு 2.18: f மற்றும் f' , ஆகிய சார்புகள் $[a, b]$ -ல் தொடர்ச்சியானது, (a, b) -ல் வகையிடத்தக்கது எனில் ஏதேனும் ஓர் மெய்யெண் θ , $0 < \theta < 1$ -ல்,

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''[a + \theta(b-a)] \text{ எனக் காட்டுக.}$$

தீர்வு :

$$\phi(x) = f(x) + (b-x)f'(x) + (b-x)^2 A \text{ எனக் கருதுக.} \quad \dots(1)$$

இங்கு A என்பது ஒரு மாறிலியாகத் தேர்ந்தெடுக்கப்பட வேண்டும்.

$$\phi(a) = \phi(b)$$

$$\text{இப்போது,} \quad \phi(a) = f(a) + (b-a)f'(a) + (b-a)^2 A \quad \dots(2)$$

$$\text{மற்றும்} \quad \phi(a) = \phi(b) \quad [(1)\text{ல் } x = a \text{ மற்றும் } x = b \text{ எனப் பிரதியிட}] \quad \dots(3)$$

(3)-ஐ (2)-ல் பயன்படுத்த, நாம் பெறுவது

$$f(x) = f(a) + (b-a)f'(a) + (b-a)^2 A \quad \dots(4)$$

i. $f(x), f'(x)$ மற்றும் பல்லுறுப்புக் கோவைகள் $(b-a)$. $(b-a)^2$ ஆகியவை $[a, b]$ -ல் தொடர்ச்சியானவை, எனவே $\phi(x)$, $[a, b]$ -ல் தொடர்ச்சியானது.

ii. $f(x), f'(x)$ மற்றும் பல்லுறுப்புக் கோவைகள் $(b-a)$. $(b-a)^2$ ஆகியவை (a, b) -ல் வகையிடத்தக்கவை, எனவே $\phi(x)$, (a, b) -ல் வகையிடத்தக்கது.

iii. மேலும், $\phi(a) = \phi(b)$

∴ $\phi(x)$, $[a, a+h]$ ல் ரோலின் தேற்றத்தின் மூன்று நிபந்தனைகளையும் பூர்த்தி செய்கிறது.

$$\text{எனவே ஏதேனும் ஓர் புள்ளி } \theta, 0 < \theta < 1 \text{-ல் } \phi'[a+\theta(b-a)] = 0 \quad \dots(5)$$

(1) யை, x ஐ பொறுத்து வகையிட, நாம் பெறுவது

$$\phi'(x) = f'(x) + (b-x)f''(x) + (-1)f'(x) + 2(b-x)(-1)A$$

$$\text{அல்லது } \phi'(x) = (b-x)f''(x) - 2(b-x)A$$

$$\text{அல்லது } \phi'(x) = (b-x)[f''(x) - 2A]$$

$x = a + \theta(b-a)$ எனப் பிரதியிட, நாம் பெறுவது

$$\Rightarrow \phi'[a+\theta(b-a)] = (b-a-\theta(b-a))[f''(a+\theta(b-a)) - 2A] \quad [(5) \text{ லிருந்து மற்றும் } b-a \neq 0, 1-\theta \neq 0]$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2}f''(a+\theta(b-a))$$

'A'-ன் மதிப்பை (4) ல் பிரதியிட, நாம் பெறுவது

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a+\theta(b-a))$$

எடுத்துக்காட்டு 2.19 : $\log(x+h) = \log x + \frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{h^n}{n(x+\theta h)^n}$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு : $f(x+h) = \log(x+h)$ என்க.

$$f(x) = \log x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f'''(x) = -\frac{2}{x^3}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4} = (-1)^3 \frac{3!}{x^4}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

இப்படியே தொடர,

$$f^{(n-1)}(x) = (-1)^{n-2} \frac{(n-2)!}{x^{n-1}}$$

$$f^n(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$$

$$f^n(x+\theta h) = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(x+\theta h)^n}$$

லாக்ரேஞ்சின் எஞ்சிய வடிவத்துடன் டெய்லரின் தேற்றத்தின் படி, நாம் பெறுவது

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{(n)!}f^n(x+\theta h)$$

அனைத்து மதிப்புகளையும் பிரதியிட் ட பிறகு, நாம் பெறுவது

$$\log(x+h) = \log x + \frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3!} \times \frac{2!}{x^3} + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} \frac{(-1)^{n-2} (n-2)!}{x^{n-1}} + \frac{h^n}{n!} \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(x+\theta h)^n}$$

அல்லது $\log(x+h) = \log x + \frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} \frac{(-1)^{n-2}}{x^{n-1}} + \frac{(-1)^{n-1} h^n}{n(x+\theta h)^n}$

எடுத்துக்காட்டு 2.20 : $e^{ax} \cdot \sin bx$ என்ற சார்பின் விரிவை லாக்ரேஞ்சின் எஞ்சிய வடிவத்துடன் கூடிய மெக்லாரின் தேற்றத்தின் n^{th} உறுப்பிற்கு பிறகு காண்க.

தீர்வு : $f(x) = e^{ax} \cdot \sin bx$ என்க

$$= e^{ax} (b \cos bx \cdot b + a \sin bx)$$

$$f''(x) = e^{ax} (-b^2 \sin bx + ab \cos bx) + ae^{ax} (b \cos bx + a \sin bx)$$

$$= e^{ax} [(a^2 - b^2) \sin bx + 2ab \cos bx]$$

$$f'''(x) = e^{ax} [(a^2 - b^2) \cos bx \cdot b - 2ab \sin bx \cdot b] + ae^{ax} [(a^2 - b^2) \sin bx + 2ab \cos bx]$$

$$= e^{ax} [b(3a^2 - b^2) \cos bx + (a^3 - 3ab^2) \sin bx]$$

இப்படியே தொடர்,

$$f^n(x) = (a^2 + b^2)^{n/2} e^{ax} \sin \left(bx + n \cdot \tan^{-1} \frac{b}{a} \right)$$

$x = 0$ -வில், நாம் பெறுவது

$$f(0) = 0, f'(0) = b, f''(0) = 2ab,$$

$$f'''(0) = b(3a^2 - b^2),$$

$$f^n(\theta x) = (a^2 + b^2)^{n/2} e^{a\theta x} \sin \left(b\theta x + n \cdot \tan^{-1} \frac{b}{a} \right)$$

லாக்ரேஞ்சின் எஞ்சிய வடிவத்துடன் மெக்லாரின் தேற்றத்தின் படி, நாம் பெறுவது

$$f(x) = f(0) + x \cdot f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(0) + \frac{x^n}{n!} f^n(\theta x)$$

அனைத்து மதிப்புகளையும் பிரதியிட்ட பிறகு, நாம் பெறுவது

$$e^{ax} \cdot \sin bx = 0 + x \cdot b + \frac{x^2}{2!} (2ab) + \dots + \frac{x^n}{n!} (a^2 + b^2)^{n/2} e^{a\theta x} \sin \left(b\theta x + n \tan^{-1} \frac{b}{a} \right)$$

அல்லது

$$e^{ax} \cdot \sin bx = bx + \frac{x^2}{2!} (2ab) + \frac{x^3}{3!} b(3a^2 - b^2) + \dots + \frac{x^n}{n!} (a^2 + b^2)^{n/2} e^{a\theta x} \sin \left(b\theta x + n \tan^{-1} \frac{b}{a} \right)$$

பயிற்சி 2.4

1. x -ன் அனைத்து மதிப்புகளிலும்,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \sin \theta x, 0 < \theta < 1. \text{ எனக் காட்டுக.}$$

2. மெக்லாரின் விரிவின் உதவியோடு,

$$a. \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-2} \frac{x^{n-1}}{n-1} + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n(1+\theta x)^n}.$$

$$b. \log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^{n-1}}{n-1} - \frac{x^n}{n(1-\theta x)^n}. \text{ எனக் காட்டுக.}$$

3. f' என்பது $[a, a+h]$ -ல் தொடர்ச்சியானது மற்றும் $(a, a+h)$ -ல் வகையிடத்தக்கது எனில், ஏதேனும் ஓர் மெய்யெண் c , a மற்றும் $(a+h)$ க்கு இடையில் $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(c)$ என நிறுவுக.

4. $f(x) = (1-x)^{5/2}$ என்ற சார்பின் விரிவு, $f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(\theta x)$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. $x \rightarrow 1$ எனில் θ -வின் மதிப்பை காண்க.

5. முடிந்தால், $\sqrt{x}$ ன் மெக்லாரின் தேற்றத்தின் விரிவை x -ன் ஏறுமுக அடுக்குகளாக காண்க.

6. $f(x) = a^x$ என்ற சார்பின் விரிவை லாக்ரேஞ்சின் எஞ்சிய வடிவத்துடன் கூடிய மெக்லாரின் தேற்றத்தின் n^{th} உறுப்பிற்கு பிறகு காண்க.

7. $e^{ax} \cdot \sin bx$ என்ற சார்பின் விரிவை கோஷியின் எஞ்சிய வடிவத்துடன் கூடிய மெக்லாரின் தேற்றத்தின் n^{th} உறுப்பிற்கு பிறகு காண்க.

பயிற்சி 2.4

$$4. \theta = \frac{9}{25} \quad 6. 1 + x \log a + \frac{x^2}{2!} (\log a)^2 + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} a^{\theta x} (\log a)^n$$

$$7. bx + \frac{x^2}{2!} (2ab) + \frac{x^3}{3!} b(3a^2 - b^2) + \dots + \frac{x^n}{n!} (a^2 + b^2)^{n/2} e^{a\theta x} \sin \left(b\theta x + n \tan^{-1} \frac{b}{a} \right)$$

சுவாரஸ்யமான உண்மை

- ◆ குழிப்பை அடைப்பு சார்பை தோராயமாக்க வேண்டிய குறிகை செயல்முறை தொழிலகத்திலும் இது பயன்படுத்தப்படுகிறது
- ◆ இது சைகைகளின் விளைவை சோதிக்க, டிரான்சிஸ்டர் மற்றும் ஒலிபெருக்கி தொழிலில் பயன்படுத்தப்படுகிறது



அன்றாட வாழ்வில் பயன்பாடுகள் :

- ♦ கணினிகள் மற்றும் கணிப்பான்களில் பல செயல்பாடுகளின் தோராயமான மதிப்புகளைக் கணக்கிட இவை உதவுகின்றன.
- ♦ எல்லைகளைத் தீர்க்கவும் மற்றும் எண்ணற்ற எல்லையற்ற தொகைகளைத் தீர்மானிக்கவும் அவை மிகவும் பயனுள்ளதாக இருக்கும்.
- ♦ சார்புகளின் அணுகலான நடத்தையைப் புரிந்துகொள்ள இவை மிகவும் உதவியாக இருக்கும்.

2.3 தேரப்பெறா வடிவங்கள் மற்றும் லோபிதாலின் விதி

$f(x)$ மற்றும் $g(x)$ என்பவை கொடுக்கப்பட்ட இரு சார்புகள் என்க. பின்னர் $x \rightarrow c$ எனில் $\frac{f(x)}{g(x)}$ இன்

எல்லை, பொதுவாக தொகுதி எல்லையை பகுதி எல்லையுடன் வகுக்க கிடைக்கும் பதிலுக்கு சமம். ஆனால் அந்த இரண்டு எல்லைகளும் பூஜ்ஜியமாக இருக்கும்போது, விகிதம் $0/0$ வடிவமாக இருக்கும். இந்த $\frac{0}{0}$ வடிவம் தேரப்பெறா வடிவம் எனப்படும்.

கணித ரீதியாக, இதை இவ்வாறு வெளிப்படுத்தலாம்,

$$\text{எல்லையை மதிப்பிட, } \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$$

$$l = 0, m \neq 0 \text{ எனில், பின் } \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$l \neq 0, m = 0 \text{ எனில், பின் } \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

$$l = 0, m = 0 \text{ எனில், பின் } \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$$

மதிப்பீடு செய்ய முடியாது மற்றும் இது தேரப்பெறா வடிவம் என்று அழைக்கப்படுகிறது. பல்வேறு தேரப்பெறா வடிவங்கள் குறியீடுகளால் பின்வருமாறு குறிப்பிடப்படுகின்றன.

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times 0, \infty - \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$$

இங்கே, இந்த தேரப்பெறா வடிவங்கள் அனைத்தையும் எடுத்துக்காட்டுகளுடன் விளக்குவோம்.

2.3.1 தேரப்பெறா வடிவம் $\frac{0}{0}$ -வை மதிப்பிட, லோபிதாலின் விதி (வகை-I)

தேற்றம் : $x = a$ மற்றும் $f(a) = 0 = g(a)$ -வில் f மற்றும் g ஆகிய சார்புகள் வகையிடத்தக்கது எனில்,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

நிரூபணம் : $f(a) = 0 = g(a)$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \text{ என நாம் எழுத முடியும்,}$$

$x = a$ -வால் வகுக்க, நாம் பெறுவது

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}}$$

இருபுறமும் எல்லை எடுக்க, நாம் பெறுவது

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}} \quad \left[\because \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\lim_{x \rightarrow b} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \right] \\ &= \frac{f'(a)}{g'(a)} \quad [\text{வகையிடுதலின் வரையறையின் படி}] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \end{aligned}$$

பொதுவாக, $f(a) = f'(a) = f''(a) \dots = f^{n-1}(a) = 0$, என்றால்

$$g(a) = g'(a) = g''(a) \dots = g^{n-1}(a) = 0$$

மற்றும் $g^n(a) \neq 0$

பின் $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f^n(x)}{g^n(x)}$ எனில்,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^n(x)}{g^n(x)}$$

இது லோபிதாலின் விதி என்று அழைக்கப்படுகிறது.

வழிமுறைகள் :

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ என்பது வரையறுக்கப்படாதது மற்றும் $\frac{0}{0}$ வடிவம் பெற்றது எனில், பின்வரும் செயல்முறைகளை

பயன்படுத்தி எல்லையை மதிப்பிடலாம்.

தொகுதி மற்றும் விசுவதியை தனித்தனியாக வகையிட, அதாவது லோபிதாலின் விதியை பயன்படுத்த

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

இரண்டு நிலைகள் எழுகின்றன:

நிலை I : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, என்பது $\frac{0}{0}$ வடிவத்தில் இல்லை என்றால், பின்

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

நிலை II : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, என்பது $\frac{0}{0}$ வடிவத்தில் இருந்தால், பின் மறுபடியும் தொகுதி மற்றும் விசுவதியை தனித்தனியாக வகையிட, அதாவது லோபிதாலின் விதியை பயன்படுத்த

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$, என்பது தேர்ந்த வடிவத்தை அடையும் வரை, மேலே உள்ள செயல்முறையை (நிலை II)

திரும்பச்செய். அதாவது

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள் (வகை-I)

எடுத்துக்காட்டு 2.21 : மதிப்பிடுக : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}$

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டது $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}$

லோபிதாலின் விதியை பயன்படுத்த,

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} && \left[\frac{0}{0} \text{ வடிவம்} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.22 : மதிப்பிடுக : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{x - 1 - \log x}$

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டது $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{x - 1 - \log x}$

$\left[\frac{0}{0} \text{ வடிவம்} \right]$

லோபிதாலின் விதியை பயன்படுத்த,

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x (1 + \log x) - 1}{1 - \frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x + x^x \log x - 1}{1 - \frac{1}{x}} && \left[\frac{0}{0} \text{ வடிவம்} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x (1 + \log x) + x^x \cdot \frac{1}{x} + x^x (1 + \log x) \log x}{\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x + x^x \log x + x^{x-1} + (x^x + x^x \log x) \log x}{\frac{1}{x^2}} = \frac{1+0+1+0}{1} = 2 \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.23 : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1+a \cos x) - b \sin x}{x^3} = 1$. எனில் 'a' மற்றும் 'b' யின் மதிப்புகளை காண்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டது $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1+a \cos x) - b \sin x}{x^3} = 1$ [$\frac{0}{0}$ வடிவம்]

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(-a \sin x) + (1+a \cos x) - b \cos x}{3x^2} = 1 \quad \dots(1)$$

$x \rightarrow 0$ எனில், (1) ன் R.H.S ஓர் முடிவுற்ற எண். எனவே L.H.S ம் ஓர் முடிவுற்ற எண்.

ஆனால் $x \rightarrow 0$ எனில், தொகுதி $\rightarrow 0$ மற்றும் பகுதி $\rightarrow 0$.

$$\Rightarrow 1 + a - b = 0$$

$$\Rightarrow a - b = -1 \quad \dots(2)$$

(1) ன் L.H.S, ல் மீண்டும் லோபிதாலின் விதியை பயன்படுத்த,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-a \sin x - a x \cos x - a \sin x + b \sin x}{6x} = 1 \quad \left[\frac{0}{0} \text{ வடிவம்} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-a \cos x - a \cos x + a x \sin x - a \cos x + b \cos x}{6} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{-3a + b}{6} = 1$$

$$\Rightarrow -3a + b = 6 \quad \dots(3)$$

(2) மற்றும் (3) யை பயன்படுத்த நாம் பெறுவது, $a = -\frac{5}{2}$, $b = -\frac{3}{2}$

எடுத்துக்காட்டு 2.24 : மதிப்பிடுக: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x - x^2}{x^3}$

தீர்வு : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x - x^2}{x^3}$ [$\frac{0}{0}$ வடிவம்]

லோபிதாலின் விதியை பயன்படுத்த,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cos x + e^x \sin x - 1 - 2x}{3x^2}$$

அல்லது $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x (\cos x + \sin x) - 1 - 2x}{3x^2}$ [$\frac{0}{0}$ வடிவம்]

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x (\cos x + \sin x) + e^x (-\sin x + \cos x) - 2}{6x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x \cos x - 2}{6x} \quad \left[\frac{0}{0} \text{ வடிவம்} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x \cos x - 2e^x \sin x}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.25 : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin x - \sin 2x}{\tan^3 x}$ ஓர் முடிவுற்ற எண் எனில், 'a' யின் மதிப்பை காண்க.

தீர்வு : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin x - \sin 2x}{\tan^3 x}$ [$\frac{0}{0}$ வடிவம்]

லோபிதாலின் விதியை பயன்படுத்த, நாம் பெறுவது,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cos x - 2 \cos 2x}{3 \tan^2 x \cdot \sec^2 x} = \frac{a-2}{0}$$

ஆனால், $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin x - \sin 2x}{\tan^3 x}$ ஓர் முடிவுற்ற எண் எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\therefore a - 2 = 0$$

$$\Rightarrow a = 2$$

2.3.1.1 தொடர் விரிவாக்க முறையால் எல்லையின் மதிப்பீடு

$$i. \quad e^x = 1 + x \log a + \frac{x^2}{2!} (\log a)^2 + \frac{x^3}{3!} (\log a)^3 + \dots$$

$$ii. \quad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$iii. \quad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, |x| < 1$$

$$iv. \quad \log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, |x| < 1$$

$$v. \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, |x| < 1$$

$$vi. \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots, |x| < 1$$

$$vii. \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots, \forall x$$

$$viii. \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots, \forall x$$

$$ix. \quad \sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots, \forall x$$

$$x. \quad \cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots, \forall x$$

$$xi. \quad \tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \dots, \forall x$$

$$xii. \quad (1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)x^3}{3!} + \dots$$

எடுத்துக்காட்டு 2.26 : மதிப்பிடுக: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \log(1+x)}$

தீர்வு : இங்கு, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \log(1+x)}$

$\left[\frac{0}{0} \text{ வடிவம்} \right]$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right)}{x \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots\right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \dots}{\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots\right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \left(\frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \dots\right)}{x^2 \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \dots\right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \dots}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \dots} \\
 &= \frac{1}{2} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

மாற்று முறை : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \log(1+x)}$

$\left[\frac{0}{0} \text{ வடிவம்}\right]$

லோபிதாலின் விதியை பயன்படுத்த,

$$\begin{aligned}
 &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\frac{x}{1+x} + \log(1+x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{1+x}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$\left[\frac{0}{0} \text{ வடிவம்}\right]$

எடுத்துக்காட்டு 2.27 : மதிப்பிடுக : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \log(1+x)}{x^2}$.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டது, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \log(1+x)}{x^2}$

$\left[\frac{0}{0} \text{ வடிவம்}\right]$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right] - \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots\right]}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!} - \dots\right] - \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots\right]}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[\frac{x^2}{2} - \frac{5x^3}{6} + \dots\right]}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} - \frac{5x}{6} + \dots\right] = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

பயிற்சி 2.5

1. பின்வருவனவற்றை மதிப்பிடுக :

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2 \log(1+x)}{x \sin x}$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2}$

c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x + \log(1-x)}{x \tan^2 x}$

d. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan^{-1} x)^2}{\log(1+x^2)}$

e. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^2 \sin x}$

f. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$

g. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{b^x - 1}$

h. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^x}{\sqrt{x}}$

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x - x}{\sin x - x \cos x}$

j. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{e^{\sin x} - e^x}$

2. பின்வரும் எல்லைகளை மதிப்பிடுக:

a. $\lim_{a \rightarrow b} \frac{a^b - b^a}{a^a - b^b}$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos bx - \cos x}{x \sin x}$

c. $\lim_{x \rightarrow b} \frac{x^b - b^x}{x^a - b^b}$

d. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^2 \tan x}$

e. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - \log(1+x)}{x^2}$

f. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2 \sin x}{\cos^2 x}$

g. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x - x^2}{x^2 + x \log(1-x)}$

h. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 2 \cos x + e^{-x}}{x \sin x}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{re^x - q \cos x + pe^{-x}}{x \tan x} = 3$ எனில் p, q மற்றும் r -ன் மதிப்புகளை காண்க.

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^x - b \cos x + ce^{-x}}{x \sin x} = 2$ எனில் a, b மற்றும் c -ன் மதிப்புகளை காண்க.

5. மதிப்பிடுக:

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

விடைகள்

1. a. 1 b. $\frac{1}{2}$ c. $-\frac{1}{2}$ d. 1 e. $\frac{1}{3}$
f. 1 g. $\frac{\log a}{\log b}$ h. 0 i. $\frac{1}{2}$ j. -1
2. a. $\frac{1 - \log b}{1 + \log b}$ b. $\frac{1}{2}$ c. $\frac{1 - \log b}{1 + \log b}$ d. $\frac{1}{3}$
e. $\frac{3}{2}$ f. 1 g. $-\frac{2}{3}$ h. 2
3. $p = \frac{3}{2}, q = 3, r = \frac{3}{2}$ 4. $a = 1, b = 2, c = 1$ 5. (i) 1 (ii) 1

2.3.2 தேரப்பெறா வடிவம் $\frac{\infty}{\infty}$ -வை மதிப்பிட, லோபிதாலின் விதி (வகை-II)

தேற்றம் : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ மற்றும் $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, எனில் பின்னர் $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

(R.H.S முடிவுற்ற அல்லது முடிவிலா எண்ணாக இருக்கும்)

வழிமுறைகள் :

1. தேரப்பெறா வடிவம் $\frac{\infty}{\infty}$ வை மதிப்பிட, அதை $\frac{0}{0}$ வடிவத்திற்கு மாற்றியபின் தீர்க்க.

2. $x \rightarrow \infty$, பின்னர் $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

$x \rightarrow \infty$, எனில் $x \rightarrow \frac{1}{y}$ என மாற்றுக, எனவே $y \rightarrow 0$.

$x \rightarrow \frac{1}{y}$ என்க, பின் $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)}$, மற்றும் மேலும் தொடரவும்

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள் வகை - II

எடுத்துக்காட்டு 2.28 : மதிப்பிடுக: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \tan 2x}{\log \tan x}$

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டது $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \tan 2x}{\log \tan x}$ [$\frac{\infty}{\infty}$ வடிவம்]

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\tan 2x} \cdot \sec^2 2x \cdot 2}{\frac{1}{\tan x} \cdot \sec^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \tan x \cdot \sec^2 2x}{\tan 2x \cdot \sec^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{2 \cdot \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin x}{\sin 2x} \cdot \frac{\cos x}{\cos 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 2x} = 1 \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.29 : மதிப்பிடுக: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 3x^3 - 100}{4x^4 + x^2 + 2x + 100}$

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டது $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 3x^3 - 100}{4x^4 + x^2 + 2x + 100}$

$x \rightarrow 0$ எனில் $x = \frac{1}{y}$ எனப் பிரதியிட $\Rightarrow y \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} & \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \frac{1}{y^4} + 3 \cdot \frac{1}{y^3} - 100}{4 \cdot \frac{1}{y^4} + \frac{1}{y^2} + 2 \cdot \frac{1}{y} + 100} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2 + 3y - 100y^4}{4 + y^2 + 2y^3 + 100y^4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.30 : மதிப்பிடுக: $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\tan x}{\tan 3x}$

தீர்வு : இங்கு $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\tan x}{\tan 3x}$ [$\frac{\infty}{\infty}$ வடிவம்]

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sec^2 x}{3 \sec^2 3x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 \cos^2 3x}{3 \cos^2 x} \quad \left[\frac{0}{0} \text{ வடிவம்} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1}{3} \left[\frac{-2 \cos 3x \cdot \sin 3x \cdot 3}{-2 \cos x \cdot \sin x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1}{3} \left[\frac{\sin 6x}{\sin 2x} \right] \quad \because \{ \sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x \} \quad \left[\frac{0}{0} \text{ வடிவம்} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1}{3} \left[\frac{6 \cos 6x}{2 \cos 2x} \right] = \frac{3 \cos 3\pi}{\cos \pi} = \frac{3(-1)}{(-1)} = 3 \end{aligned}$$

2.3.3 தேரப்பெறா வடிவம் $0 \times \infty$ வை மதிப்பிட, லோபிதாலின் விதி (வகை-III)

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ மற்றும் $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, எனில் $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x)$ ன் வடிவம் $0 \times \infty$ பின்னர் முன்பு இருந்த முறையில் தீர்க்கலாம்.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \text{அல்லது} \quad = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \quad \text{என மாற்ற நாம் பெறும் வடிவங்கள் முறையே,}$$

$\frac{0}{0}$ அல்லது $\frac{\infty}{\infty}$. பின்னர் முன்பு இருந்த முறையில் தீர்க்கலாம்.

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள் (வகை-III)

எடுத்துக்காட்டு 2.31 : மதிப்பிடுக: $\lim_{x \rightarrow 0} x \log x$

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டது $\lim_{x \rightarrow 0} x \log x$ [$0 \times \infty$ வடிவம்]

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} \quad \left[\frac{\infty}{\infty} \text{ வடிவம்} \right]$$

லோபிதாலின் விதியை பயன்படுத்த,

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 2.32 : மதிப்பிடுக: $\lim_{x \rightarrow 0} x \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டது, $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot x$

[$0 \times \infty$ வடிவம்]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\frac{1}{\cot x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x}$$

[$\frac{0}{0}$ வடிவம்]

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sec^2 x} = 1$$

எடுத்துக்காட்டு 2.33 : மதிப்பிடுக: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \tan x$

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டது, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \tan x$

[$0 \times \infty$ வடிவம்]

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\frac{1}{\tan x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\cot x}$$

[$\frac{0}{0}$ வடிவம்]

லோபிதாலின் விதியை பயன்படுத்த,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{-\cos^2 x} = -1$$

எடுத்துக்காட்டு 2.34 : மதிப்பிடுக: $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^x \cdot \sin \frac{a}{2^x}$

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டது, $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^x \cdot \sin \frac{a}{2^x}$

[$0 \times \infty$ வடிவம்]

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{a}{2^x}}{\frac{1}{2^x}}$$

[$\frac{0}{0}$ வடிவம்]

லோபிதாலின் விதியை பயன்படுத்த,

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{a}{2^x} \left(\frac{-a \cdot 2^x \cdot \log 2}{(2^x)^2} \right) \frac{a}{2^x}}{\frac{-2^x \cdot \log 2}{(2^x)^2}} \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} a \cdot \cos \frac{a}{2^x} = a \end{aligned}$$

2.3.4 தேரப்பெறா வடிவம் $\infty - \infty$ வை மதிப்பிட, லோபிதாலின் விதி (வகை-IV)

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ மற்றும் $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, எனில் பின்னர் $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - g(x)$ ன் வடிவம் $\infty - \infty$.

$$\text{இதில் } \lim_{x \rightarrow a} f(x) - g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}} \text{ என மாற்றவும்.}$$

இதை முன்பு இருந்த முறையில் மதிப்பிடலாம்.

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள் (வகை-IV)

எடுத்துக்காட்டு 2.35 : மதிப்பிடுக: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\operatorname{cosec} x}{x} \right)$

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டது, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\operatorname{cosec} x}{x} \right)$ [$\infty - \infty$ வடிவம்]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x - x}{x^2 \sin x} \right) \quad \left[\frac{0}{0} \text{ வடிவம்} \right]$$

லோபிதாலின் விதியை பயன்படுத்த,

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x - 1}{x^2 \cos x + 2x \sin x} \right) \quad \left[\frac{0}{0} \text{ வடிவம்} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-\sin x}{-x^2 \sin x + 2x \cos x + 2x \cos x + 2 \sin x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-\sin x}{-x^2 \sin x + 4x \cos x} \right) \quad \left[\frac{0}{0} \text{ வடிவம்} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-\cos x}{-x^2 \cos x - 6x \sin x + 6 \cos x} \right) = -\frac{1}{6}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.36 : மதிப்பிடுக : $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x)$

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டது, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x)$ [$\infty - \infty$ வடிவம்]

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \sin x}{\cos x} \right) \quad \left[\frac{0}{0} \text{ வடிவம்} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{-\cos x}{-\sin x} \right)$$

$$\frac{\cos \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{0}{1} = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 2.37 : மதிப்பிடுக : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos ec^2 x - \frac{1}{x^2} \right)$

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டது, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos ec^2 x - \frac{1}{x^2} \right)$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) \quad [\infty - \infty \text{ வடிவம்}]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} \right) \quad \left[\frac{0}{0} \text{ வடிவம்} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4} \right) \left(\frac{x^2}{\sin^2 x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4} \right) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{\sin^2 x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4} \right) \quad \left[\because \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = 1 \right] \left[\frac{0}{0} \text{ வடிவம்} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right)^2}{x^4} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - x^2 + \frac{x^4}{3} - \frac{x^6}{60} - \dots}{x^4} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4}{3} - \frac{x^6}{60}}{x^4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} - \frac{x^2}{60} + x - \dots \text{ உயர் அடுக்குகளை கொண்ட உறுப்புகள்.} = \frac{1}{3}$$

பயிற்சி 2.6

1. பின்வரும் எல்லைகளை மதிப்பிடுக:

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \sin x}{\cot x}$

b. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\log(x-a)}{\log(e^x - e^a)}$

c. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 8x^2 + 2x + 1}{x^4 - x^2 + 2x - 3}$

d. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x}$

e. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos ec x}{\log x}$

f. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log x}{\cot x}$

g. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x}, n \in N$

h. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\log(1-x)}{\cot \pi x}$

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \log_x \sin x$

2. பின்வரும் தேரப்பெறா வடிவங்களை மதிப்பிடுக:

a. $\lim_{x \rightarrow 0} x \log x \tan x$

b. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \tan \frac{1}{x}$

c. $\lim_{x \rightarrow a} (a-x) \tan \frac{\pi x}{2a}$

d. $\lim_{x \rightarrow 1} \sec \frac{\pi}{2x} \log x$

e. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 - \sin x) \tan x$

f. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(a^{\frac{1}{x}} - 1 \right) x$

3. பின்வருவனவற்றை மதிப்பிடுக:

$$\begin{aligned} a. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \cos ecx \right) & \quad b. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\cot x - \frac{1}{x} \right)}{x} & c. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \cot^2 x \right) & d. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log x} \right) \\ e. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} \right) & f. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \log(1+x) \right) & g. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (2x \tan x - \pi \sec x) & h. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos ecx - \cot x) \end{aligned}$$

விடைகள்

$$\begin{aligned} 1. \quad a. 0 & \quad b. 1 & c. 0 & d. 0 & e. -\infty \\ f. 0 & g. 0 & h. 0 & i. 1 & \\ 2. \quad a. 0 & b. 1 & c. \frac{2a}{\pi} & d. \frac{2}{\pi} \\ e. 0 & f. \log a & & & \\ 3. \quad a. 0 & b. \frac{1}{3} & c. \frac{2}{3} & d. \frac{1}{2} \\ e. \frac{1}{3} & f. \frac{1}{2} & g. -2 & h. 0 \end{aligned}$$

2.3.5 தேரப்பெறா வடிவம் 0° வை மதிப்பிட, லோபிதாலின் விதி (வகை-V)

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ மற்றும் $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, எனில் பின்னர் $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}$ ன் வடிவம் 0^0 . இந்த மாதிரி வடிவத்தை தீர்க்க,

$$y = \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} \text{ என்க.}$$

$$\log y = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \cdot \log f(x)$$

நாம் பெறும் வடிவம், $0 \times \infty$. பின்னர் முன்பு இருந்த முறையில் தீர்க்கலாம்.

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) \cdot \log f(x) = l \text{ எனப் பிரதியிட}$$

பின்னர் (1) லிருந்து, $\log y = l \Rightarrow y = e^l$

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள் (வகை - V)

எடுத்துக்காட்டு 2.38 : மதிப்பிடுக : $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$

தீர்வு : $y = \lim_{x \rightarrow 0} x^x$, என்க.

[0° வடிவம்]

இருபுறமும் மடைக்கை எடுக்க, $\log y = \lim_{x \rightarrow 0} x \log x$

[$0 \times \infty$ வடிவம்]

$$\log y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}}$$

[$\frac{\infty}{\infty}$ வடிவம்]

$$\begin{aligned} \text{லோபிதாலின் விதியை பயன்படுத்த, } &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} -x = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{எனவே} & \log y = 0 \\ \Rightarrow & y = e^0 = 1 \end{aligned}$$

$$\text{ஆகவே} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1$$

எடுத்துக்காட்டு 2.39 : மதிப்பிடுக : $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x^2)^{\frac{1}{\log(1-x)}}$.

$$\text{தீர்வு :} \quad y = \lim_{x \rightarrow 1} (1-x^2)^{\frac{1}{\log(1-x)}} \text{ என்க} \quad [0^\circ \text{ வடிவம்}]$$

$$\begin{aligned} \text{பின்னர்} \quad \log y &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\log(1-x)} \log(1-x^2) \quad \left[\frac{\infty}{\infty} \text{ வடிவம்} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(1-x) + \log(1+x)}{\log(1-x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(1 + \frac{\log(1+x)}{\log(1-x)} \right) \\ &= 1 + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(1+x)}{\log(1-x)} \\ &= 1 + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{1-x}} = 1 + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1+x} \\ &= 1 + \frac{0}{2} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{எனவே} & \log y = 1 \\ \Rightarrow & y = e^1 = e \end{aligned}$$

$$\text{ஆகவே} \quad \lim_{x \rightarrow 1} (1-x^2)^{\frac{1}{\log(1-x)}} = e$$

2.3.6 தேரப்பெறா வடிவம் 1^∞ வை மதிப்பிட, லோபிதாலின் விதி (வகை-VI)

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ மற்றும் $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, எனில் பின்னர் $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}$ ன் வடிவம் 1^∞ . இந்த மாதிரி வடிவத்தை தீர்க்க, பிறகு,

$$y = \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} \text{ என்க.}$$

$$\therefore \log y = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \cdot \log f(x)$$

இதை முன்பு இருந்த முறையில் மதிப்பிடலாம்.

பிறகு, $\lim_{x \rightarrow a} y = l$ எனில்

பின்னர் $y = e^l$

அதாவது $\lim_{x \rightarrow d} [f(x)]^{g(x)} = e^l$

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள் (வகை-VI)

எடுத்துக்காட்டு 2.40 : மதிப்பிடுக : $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

தீர்வு : $y = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ என்க.

[1^∞ வடிவம்]

$\therefore \log y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \log \cos x$

[$0 \times \infty$ வடிவம்]

லோபிதாலின் விதியை பயன்படுத்த,

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x)}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\tan x}{2x}$$

[$\frac{0}{0}$ வடிவம்]

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sec^2 x}{2} = -\frac{1}{2}$$

எனவே $\log y = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow y = e^{-\frac{1}{2}}$

ஆகவே $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$

எடுத்துக்காட்டு 2.41 : கொடுக்கப்பட்ட எல்லை $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\cot^2 x}$ யை மதிப்பிடுக:

தீர்வு : $y = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\cot^2 x}$ என்க.

[1^∞ வடிவம்]

$\therefore \log y = \lim_{x \rightarrow 0} \cot^2 x \log \cos x$

[$0 \times \infty$ வடிவம்]

$$\log y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \cos x}{\tan^2 x}$$

[$\frac{0}{0}$ வடிவம்]

லோபிதாலின் விதியை பயன்படுத்த,

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x)}{2 \tan x \cdot \sec^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\tan x}{2 \tan x \cdot \sec^2 x}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

எனவே $\log y = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow y = e^{-\frac{1}{2}}$

ஆகவே $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\cot^2 x} = e^{-\frac{1}{2}}$

2.3.7 தேரப்பெறா வடிவம் ∞^0 வை மதிப்பிட, லோபிதாலின் விதி (வகை-VII)

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ மற்றும் $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, எனில் பின்னர் $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}$ ன் வடிவம் ∞^0 . இந்த மாதிரி வடிவத்தை தீர்க்க, இதை முன்பு இருந்த முறையில் மதிப்பிடலாம்.

$$y = \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} \text{ என்க.} \quad [0 \times \infty \text{ வடிவம்}]$$

$\therefore \log y = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \cdot \log f(x)$

இதை முன்பு இருந்த முறையில் மதிப்பிடலாம்.

பிறகு, $\log y = l$ எனில்

பின்னர் $y = e^l$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = e^l$

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள் (வகை-VII)

எடுத்துக்காட்டு 2.42 : மதிப்பிடுக : $\lim_{x \rightarrow 0} (\cot x)^{\frac{1}{\log x}}$

தீர்வு : $y = \lim_{x \rightarrow 0} (\cot x)^{\frac{1}{\log x}}$ என்க. ∞^0 வடிவம்]

$\therefore \log y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\log x} \log \cot x$ $[\frac{\infty}{\infty} \text{ வடிவம்}]$

லோபிதாலின் விதியை பயன்படுத்த,

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cot x} \cdot (-\operatorname{cosec}^2 x)}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \operatorname{cosec}^2 x}{\cot x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{\cos x \cdot \sin x} \quad \left[\frac{0}{0} \text{ வடிவம்} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\cos^2 x - \sin^2 x} = -1 \end{aligned}$$

எனவே $\log y = -1 \Rightarrow y = e^{-1} = \frac{1}{e}$

ஆகவே $\lim_{x \rightarrow 0} (\cot x)^{\frac{1}{\log x}} = \frac{1}{e}$

எடுத்துக்காட்டு 2.43 : மதிப்பிடுக : $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{x+1}$

தீர்வு : $f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{x+1}$, $x > 1$ என்க.

$$\therefore \log f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x+1) \log \left(1 - \frac{1}{2x}\right), x > 1$$

$$\log f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log \left(1 - \frac{1}{2x}\right)}{\frac{1}{x+1}} \quad \left[\frac{0}{0} \text{ வடிவம்}\right]$$

லோபிதாலின் விதியை பயன்படுத்த,

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2x}\right)} \cdot \frac{1}{2x^2}}{-\frac{1}{(x+1)^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{(2x-1)} \cdot \frac{1}{2x^2}}{-\frac{1}{(x+1)^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^2}{-x(2x-1)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1 + 2x}{-2x^2 + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}}{-2 + \frac{1}{x}} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

எனவே $\log f(x) = -\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow f(x) = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{x+1} = e^{-\frac{1}{2}}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.44 : மதிப்பிடுக : $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sec x)^{\cot x}$

தீர்வு : $y = \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sec x)^{\cot x}$ என்க. [∞^0 வடிவம்]

$$\therefore \log y = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \cot x \cdot \log \sec x \quad [0 \times \infty \text{ வடிவம்}]$$

$$\log y = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\log \sec x}{\tan x} \quad \left[\frac{\infty}{\infty} \text{ வடிவம்}\right]$$

லோபிதாலின் விதியை பயன்படுத்த,

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\frac{1}{\sec x} \cdot \sec x \cdot \tan x}{\sec^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\frac{1}{\sec x} \cdot \sec x \cdot \tan x}{\sec^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\tan x}{\sec^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \sin x \cdot \cos x = 0 \end{aligned}$$

எனவே $\log y = 0$

$$\Rightarrow y = e^0 = 1$$

ஆகவே

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sec x)^{\cot x} = 1$$

எடுத்துக்காட்டு 2.45 : $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{3x+2} = e^3$ என நிறுவுக.

தீர்வு : $y = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{3x+2}$ என்க.

[1^∞ வடிவம்]

$$\begin{aligned} \therefore \log y &= \lim_{x \rightarrow \infty} (3x+2) \log \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} (3x+2) \log \left(1 + \frac{2}{2x+1} \right) \end{aligned}$$

[$0 \times \infty$ வடிவம்]

லோபிதாலின் விதியை பயன்படுத்த,

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \infty} (3x+2) \left[\frac{2}{2x+1} - \left(\frac{2}{2x+1} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \dots \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{2(3x+2)}{2x+1} - \left(\frac{2}{2x+1} \right)^2 \cdot \frac{(3x+2)}{2} + \dots \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{2}{2x} \cdot \frac{\left(1 + \frac{2}{3x} \right) \cdot 3x}{\left(1 + \frac{2}{3x} \right)} - \frac{2 \cdot 3x \left(1 + \frac{2}{3x} \right)}{(2x)^2 \left(1 + \frac{2}{3x} \right)^2} + \dots \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{3 \cdot \left(1 + \frac{2}{3x} \right)}{\left(1 + \frac{2}{3x} \right)} - \frac{3 \cdot \left(1 + \frac{2}{3x} \right)}{2x \left(1 + \frac{2}{3x} \right)^2} + \dots \right] = 3 \end{aligned}$$

எனவே $\log y = 3$

$$\Rightarrow y = e^3$$

ஆகவே $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{3x+2} = e^3$

எடுத்துக்காட்டு 2.46 : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x} = -\frac{e}{2}$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு : $y = (1+x)^{1/x}$ என்க.

$$\therefore \log y = \frac{1}{x} \log(1+x)$$

$$= \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \right)$$

$$= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \dots$$

$$\Rightarrow y = e^{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \dots}$$

$$= e \cdot e^t \text{ இங்கு } t = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \dots$$

$$= e \cdot \left[1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \dots \right) + \frac{1}{2!} \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \dots \right)^2 + \dots \right]$$

$$= e \cdot \left[1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{24}ex^2 + \dots \right]$$

$$= e - \frac{ex}{2} + \frac{11}{24}ex^2 + \dots$$

இப்போது,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(e - \frac{ex}{2} + \frac{11}{24}ex^2 + \dots \right) - e}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e}{2} + \frac{11}{24}ex + \dots$$

$$= -\frac{e}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 2.47 : மதிப்பிடுக : $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[n + n^2 \cdot \log \frac{n}{n+1} \right]$

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டது, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[n + n^2 \cdot \log \frac{n}{n+1} \right]$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[n + n^2 \cdot \log \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[n + n^2 \cdot \left(-\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{3(n+1)^3} - \dots \right) \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[n - \frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2}{2(n+1)^2} - \frac{n^2}{3(n+1)^3} - \dots \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{n+1} - \frac{1}{2} \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 - \frac{1}{3} \frac{n^2}{(n+1)^3} - \dots \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^2 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n \left(1 + \frac{1}{n} \right)^3} - \dots \right] \\
 &= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

ஆகவே, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[n + n^2 \cdot \log \frac{n}{n+1} \right] = \frac{1}{2}$

பயிற்சி 2.7

1. பின்வரும் எல்லைகளை மதிப்பிடுக:

a. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\cos x)^{\cos x}$ b. $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^{x-1}$ c. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x \right)^{1/x}$

2. பின்வரும் எல்லைகளை தீர்மானிக்க.

a. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^x$ b. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\tan x}$ c. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{\tan x}$ d. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sinh x}{x} \right)^{1/x}$
e. $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{cosec} x)^{1/\log x}$ f. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{1/x^2}$ g. $\lim_{x \rightarrow a} \left(2 - \frac{x}{a} \right)^{\tan \frac{\pi x}{2a}}$ h. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{1/x}$
i. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\cot x}$ j. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^x$ k. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan^2 x}$

3. a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e + \frac{ex}{2}}{x^2} = \frac{11e}{24}$ எனக் காட்டுக. b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e + \frac{ex}{2} - \frac{11}{24}ex^2}{x^3} = -\frac{7}{16}e$ எனக் காட்டுக.

4. a. $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+x)^{1/x} = 1$ என நிறுவுக. b. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x} \right)^x = e^k$ என நிறுவுக.
c. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + e^x)^{2/x} = e^2$ என நிறுவுக. d. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x+4} \right)^{3x+2} = e^{-3}$ என நிறுவுக.

5. மதிப்பிடுக:

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{1/x}$ மற்றும் பின்னர் $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^x + 3^x}{2} \right)^{1/x} = \sqrt{6}$ என வருவிக்க.
b. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\log x}{x} \right)^{1/x}$ c. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1+n^2)}{n}$

விடைகள்

1. a. 1	b. 1	c. 1	
2. a. e^a	b. 1	c. 1	d. 1
e. $\frac{1}{e}$	f. $e^{\frac{1}{3}}$	g. $e^{\frac{2}{\pi}}$	h. $e^{-\frac{1}{6}}$
i. e	j. e^2	k. $e^{-\frac{1}{2}}$	
5. b. 1	c. 0		

சுவாரஸ்யமான உண்மை

- ◆ தேரப்பெறா வடிவங்கள் இயற்பியலிலும் காணப்படுகின்றன. குவாண்டம் இயற்பியல், துகள் சிதைவு, குவாண்டம் இயக்கவியல், வெப்ப இயக்கவியல் போன்றவற்றில் அதன் பயன்பாட்டை நாம் காணலாம்.
- ◆ இந்த தனித்துவமான விதியை உருவாக்குவதில் ஜோஹன் பெர்னொலியும் ஈடுபட்டிருந்தார்.
- ◆ லோபித்தாலின் விதி எப்போதாவது முடிவில்லாத சுழற்சியில் விழுந்து தோல்வியடைகிறது.
- ◆ "ஹோபித்தால்" என்று எழுதப்பட்டாலும், இந்த வார்த்தை "லோபிதால்" என்று உச்சரிக்கப்படுகிறது.

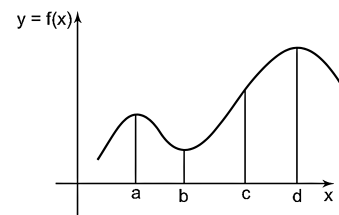


அன்றாட வாழ்வில் பயன்பாடுகள்

- ◆ இது வர்த்தக களத்தில் குறிப்பிடத்தக்க பயன்பாட்டைக் கொண்டுள்ளது, அங்கு ஒவ்வொரு நாளும் தொடர்ச்சியான கூட்டு வட்டி விகிதங்கள், குறிப்பாக முதலீடுகள், பல்வேறு வகையான வங்கிக் கணக்குகள், கடன் அட்டைகள் பில்கள், அடமானங்கள் போன்றவை எதிர்கொள்கின்றன.
- ◆ இது காமா சார்புகளில் பயன்படுத்தப்படுகிறது, இது பொறியியல், குவாண்டம் இயற்பியல், புள்ளியியல், வானியற்பியல், திரவ இயக்கவியல், ஒருங்கிணைப்பு, நிகழ்தகவு கோட்பாடு போன்றவற்றில் மேலும் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

2.4 பெருமம் மற்றும் சிறுமம்

$f(a) > f(x)$ எனில், $x = a$ ல் சார்பு f க்கு பெருமம் இருக்கும் எனலாம். அதாவது, $f(x) - f(a) < 0$ என்பது a ன் சிறிய அண்மைப்புள்ளியில் உள்ள எல்லா x களுக்கும் பொருந்தும். $f(a) < f(x)$. எனில், $x = a$ ல் சார்பு f க்கு சிறுமம் இருக்கும் எனலாம். அதாவது, $f(x) - f(a) > 0$ என்பது a ன் சிறிய அண்மைப்புள்ளியில் உள்ள எல்லா x களுக்கும் பொருந்தும். அருகிலுள்ள படத்தில், $f(x)$ ன் அண்மைப்புள்ளியை விட $f(a)$ பெரியதாக இருப்பதால் $x = a$ ல் $f(x)$ க்கு பெரும மதிப்பு இருக்கிறது எனவும், $x = b$ ல் $f(x)$ சிறுமமாகவும், d ல் பெருமமாகவும் இருக்கிறது எனவும் அறியலாம்.



படம் 2.7

2.4.1 பெருமம் மற்றும் சிறுமத்திற்கான நிபந்தனைகள்

'a' என்ற புள்ளியைப் பொருத்து டெய்லரின் தேற்றத்தை விரிவாக்கும் போது நமக்கு கிடைப்பது,

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{1}{2!}(x-a)^2 f''(a) + \dots$$

அதாவது,
$$f(x) - f(a) = (x-a)f'(a) + \frac{1}{2!}(x-a)^2 f''(a) + \dots$$

அல்லது
$$= (x-a) \left\{ f'(a) + \frac{1}{2!}(x-a)f''(a) + \dots \right\} \quad \dots(1)$$

$x - a$ சிறியதாக இருக்கும்போது, $f'(a)$ ஆனது அடுத்தடுத்த சொற்களை விட எண்கணிதத்தில் அதிகம். எனவே $f(x) - f(a)$ குறியீடு $(x-a)f'(a)$ ஐச் சார்ந்தது. ஆனால் இது $x > a$ போது ஒரு குறியீட்டையும், $x < a$ போது மற்றொரு குறியீட்டையும் கொண்டிருக்கும். எனவே $x = a$ இல் $f'(a) = 0$ தவிர பெருமம் அல்லது சிறுமம் சாத்தியமில்லை.

$f(a) = 0$ எனில், (1) ஆனது

$$= (x-a)^2 \left\{ \frac{1}{2}f''(a) + \frac{1}{6}(x-a)f'''(a) + \dots \right\}$$

$x - a, \frac{1}{2}f''(a)$ இன் சிறிய மதிப்புகளுக்கு, அடுத்தடுத்த உறுப்புகளை விட அதிக எண் மதிப்பு உள்ளது.

எனவே $f(x) - f(a)$ இன் குறியீடு $\frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a)$ அல்லது $f''(a), \frac{1}{2}(x-a)^2$ எப்போதும் நேர்மறையாக இருக்கும்.

எனவே

i. $f'(a) = 0$ மற்றும் $f''(a) =$ குறை, 'a' ல் $f(x)$ க்கு பெருமம் இருக்கும்.

ii. $f'(a) = 0$ மற்றும் $f''(a) =$ மிகை, 'a' ல் $f(x)$ க்கு சிறுமம் இருக்கும்.

iii. $f'(a) = 0$ மற்றும் $f''(a) = 0$, 'a' ல் $f(x)$ க்கு பெருமமும் இல்லை சிறுமமும் இல்லை அல்லது $f'''(a) = 0, f^{iv}(a) = 0$ ன் குறியீடு $f(x)$ ன் இயல்பை தீர்மானிக்கும் எனில் $x = a$ ல் $f(x)$ க்கு பெருமம் மற்றும் சிறுமமும் இருக்கும்.

2.4.2 அறுதிக்கான முதல் வகைக்கெழு சோதனை (பெருமம் அல்லது சிறுமம்)

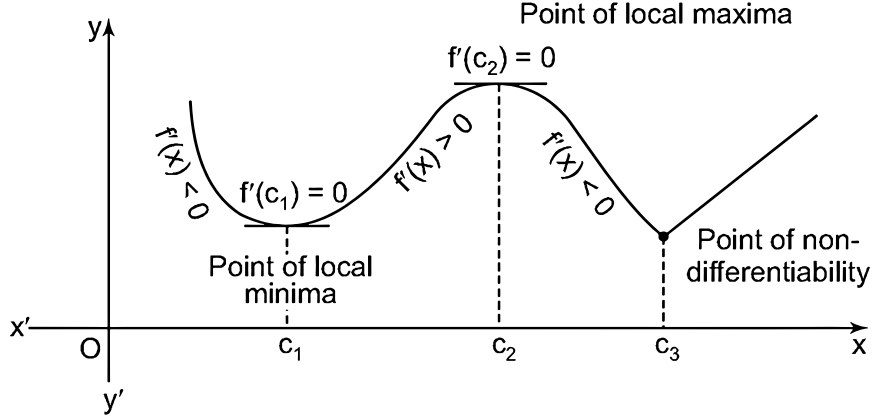
இடைவெளி $I = (a, b)$ ல் வரையறுக்கப்பட்ட f ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பாக இருக்கட்டும் மற்றும் c என்பது I ல் நிலைப்புள்ளியாக இருக்கட்டும், அதாவது $c \in I$

பிறகு,

i. x ஐ c மூலம் அதிகரிக்கும்போது $f'(x)$ குறியீடு மிகையிலிருந்து குறைக்கு மாற்றுகிறது, அதாவது $f'(x) \geq 0, x \in (c-d, c)$ மற்றும் $f'(x) \leq 0, x \in (c, c+d)$. பின்னர் c என்பது இடம் சார்ந்த பெருமம் ஆகும்.

ii. x ஐ c மூலம் அதிகரிக்கும்போது $f'(x)$ குறியீடு குறையிலிருந்து மிகைக்கு மாற்றுகிறது, அதாவது $f'(x) \leq 0, x \in (c-d, c)$ மற்றும் $f'(x) \geq 0, x \in (c, c+d)$. பின்னர் c என்பது இடம் சார்ந்த சிறுமம் ஆகும்.

- iii. $f'(x)$ ன் குறியானது c -ன் இருபுறமும் மிகையாகவோ அல்லது c -ன் இருபுறமும் குறையாகவோ இருந்தால், $f(c)$ என்பது இடம் சார்ந்த சிறுமமும் இல்லை இடம் சார்ந்த பெருமமும் இல்லை எனலாம்.



படம் 2.8

வரையறை :

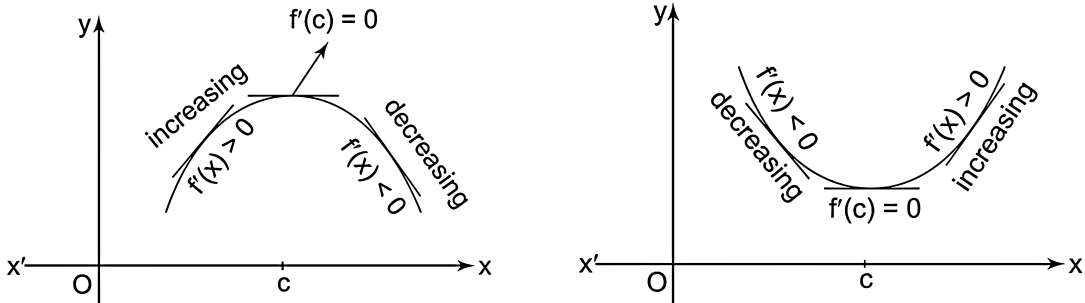
f ன் நிலைப்புள்ளி (critical point): f என்பது, இடைவெளி I மற்றும் $c \in I$ ல் வரையறுக்கப்பட்ட ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பாக இருக்கட்டும், பிறகு $f'(c) = 0$ அல்லது f என்பது I ல் உள்ள புள்ளிகளில் வேறுபடவில்லை என்றால் c என்பது நிலைப்புள்ளி எனப்படும்.

வரையறை :

f என்பது மெய்சார்பினது வகைக்கெழுக்கான சார்பாக இருக்கட்டும், மேலும் c என்பது f ன் சார்பகத்தின் (domain) களத்தின் உட்புற புள்ளியாக (interior point) இருக்கட்டும். பிறகு:

- $h > 0$ ல் $f(c) > f(x)$, $\forall x \in (c - h, c + h)$ என இருப்பின் பின்னர் c என்பது இடம் சார்ந்த பெரும புள்ளி ஆகும். $f(c)$ என்பது இடம் சார்ந்த பெரும மதிப்பு என்று அழைக்கப்படுகிறது.
- $h > 0$ ல் $f(c) < f(x)$, $\forall x \in (c - h, c + h)$ என இருப்பின் பின்னர் c என்பது இடம் சார்ந்த சிறும புள்ளி ஆகும். $f(c)$ என்பது இடம் சார்ந்த சிறும மதிப்பு என்று அழைக்கப்படுகிறது.

வடிவியல் ரீதியாக, $x = c$ என்பது f இன் இடம் சார்ந்த பெரும புள்ளியாக இருந்தால், c ஐச் சுற்றியுள்ள f' இன் வரைபடம் கொடுக்கப்பட்ட படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளபடி இருக்கும்.



படம் 2.9

$(c - h, c)$ என்ற இடைவெளியில் சார்பு f ஆனது அதிகரிக்கிறது (அதாவது, $f'(x) > 0$) மற்றும் $(c, c + h)$ என்ற இடைவெளியில் குறைகிறது (அதாவது, $f'(x) < 0$). $f'(c)$ பூஜ்ஜியமாக இருக்க வேண்டும் என்று அது அறிவுறுத்துகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 2.48 : $f(x) = x^3 - 3x + 3$ என்ற கொடுக்கப்பட்ட f க்கு இடஞ்சார்ந்த பெறும் மற்றும் சிறும் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டது $f(x) = x^3 - 3x + 3$

x -ஐப் பொறுத்து வகையிட, நமக்கு கிடைப்பது

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$= 3(x^2 - 1)$$

$$= 3(x - 1)(x + 1)$$

ஆகவே $f'(x) = 0 \Rightarrow 3(x - 1)(x + 1) = 0$

$$\Rightarrow x = 1, -1$$

எனவே, $x = 1, -1$ ல், $x = \pm 1$ என்பது நிலைப்புள்ளிகள் மட்டுமே மற்றும் சார்பு $x = 1, -1$ இல் பெரும் அல்லது சிறும் மதிப்புகளைக் கொண்டிருக்கலாம்.

முதல் வகைக்கெழுச் சோதனையைப் பயன்படுத்த

x ன் மதிப்பு			$f'(x) = 3(x - 1)(x + 1)$ ன் குறியீடு
$x = 1$		to left (say 0.98)	$f'(x) < 0$
		to right (say 1.01)	$f'(x) > 0$
$x = -1$		to left (say -1.01)	$f'(x) > 0$
		to right (say -0.9)	$f'(x) < 0$

$x = 1$ ல், $f'(x)$ குறியீடு குறையிலிருந்து மிகைக்கு மாறுகிறது.

$\therefore x = 1$ என்பது, இடம் சார்ந்த சிறும் புள்ளி ஆகும். மேலும் $f(1) = (1)^3 - 3(1) + 3 = 1$ என்பது சிறும் மதிப்பு ஆகும்.

$x = -1$ ல், $f'(x)$ குறியீடு மிகையிலிருந்து குறைக்கு மாறுகிறது.

$\therefore x = -1$ என்பது, இடம் சார்ந்த பெரும் புள்ளி ஆகும். மேலும் $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 3 = 5$ என்பது பெரும் மதிப்பு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.49 : $f(x) = x^3 + 1$ என்ற கொடுக்கப்பட்ட f க்கு இடஞ்சார்ந்த பெரும் மற்றும் சிறும் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டது $f(x) = x^3 + 1$

x -ஐப் பொறுத்து வகையிட, நமக்கு கிடைப்பது

$$f'(x) = 3x^2$$

ஆகவே, $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

எனவே, $x = 0$ ல், $x = 0$ என்பது நிலைப்புள்ளி மட்டுமே மற்றும் சார்பு $x = 1, -1$ இல் பெரும் அல்லது சிறும் மதிப்புகளைக் கொண்டிருக்கலாம்.

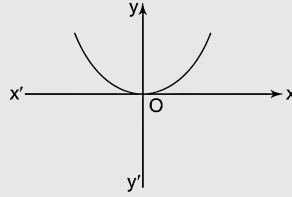
முதல் வகைக்கெழுச் சோதனையைப் பயன்படுத்த

x -ன் மதிப்பு			$f'(x) = 3x^2$ ன் குறியீடு
$x = 0$	→	to left (say -0.1)	> 0
	→	to right (say 0.1)	> 0

எனவே, $x = 0$ ல், $f'(x)$ அதன் குறியீட்டை மாற்றாது. எனவே $x = 0$ என்பது இடஞ்சார்ந்த பெரும் அல்லது சிறும் புள்ளி அல்ல. எனவே, $x = 0$ என்பது ஒரு வளைவு மாற்றப்புள்ளியாகும்.

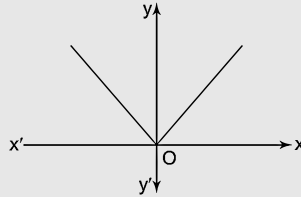
குறிப்புரை :

- i. $f(x) = x^2$, $x \in R$ என எடுத்துக்கொள்வோம். $x = 0$ ல் மற்றும் $f(0) = 0$ ல் f க்கு சிறும் மதிப்பு இருக்கும். ஆனால் R ல் f க்கு பெரும் மதிப்பு இல்லை என அறியலாம்.



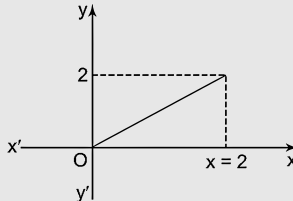
படம். 2.10

- ii. $f(x) = |x|$, $x \in R$ என எடுத்துக்கொள்வோம். $x = 0$ ல் மற்றும் $f(0) = |0| = 0$ ல் f க்கு சிறும் மதிப்பு இருக்கும். ஆனால் R ல் f க்கு பெரும் மதிப்பு இல்லை.



படம். 2.11

- iii. $f(x) = x$, $x \in (0, 2)$ என எடுத்துக்கொள்வோம். $(0, 2)$ ல் f க்கு பெரும்மும் இல்லை சிறுமமும் இல்லை.



படம். 2.12

$f(x) = x$, $x \in (0, 2)$ $f'(x) = 1$. $(0, 2)$ ல் அனைத்து புள்ளிகளிலும் $f'(x) > 0$. அதாவது குறியீடு மாறவில்லை. f க்கு பெரும்மும் அல்லது சிறுமம் இருக்காது

2.4.3 இரண்டாம் வகைக்கெழு சோதனையை பயன்படுத்தி அறுதிகள் (பெருமம் அல்லது சிறுமம்)

இடைவெளி I மற்றும் $c \in I$ இல் வரையறுக்கப்பட்ட இருமுறை வகைக்கெழு படுத்தக்கூடிய சார்பாக f இருக்கட்டும்.

- $f'(c) = 0$ மற்றும் $f''(c) < 0$ எனில், $x = c$ என்பது இடஞ்சார்ந்த பெரும புள்ளி மற்றும் $f(c)$ என்பது f இன் இடஞ்சார்ந்த பெரும மதிப்பு.
- $f'(c) = 0$ மற்றும் $f''(c) > 0$ என்றால், $x = c$ என்பது இடஞ்சார்ந்த சிறும புள்ளி மற்றும் $f(c)$ என்பது f இன் இடஞ்சார்ந்த சிறும மதிப்பு.
- $f'(c) = 0$ மற்றும் $f''(c) = 0$ எனில், சோதனை தோல்வியடைகிறது. அறுதி மதிப்புகளைச் சரிபார்க்க மேலும் செயல்முறை செய்யப்பட வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.49 : $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 10$, $x \in \mathbb{R}$ என்ற கொடுக்கப்பட்ட f க்கு இடஞ்சார்ந்த பெரும மற்றும் சிறும மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டது $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 10$, $x \in \mathbb{R}$

x ஐப் பொறுத்து வகையிட, நமக்கு கிடைப்பது

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 \\ &= 5x^2(x-3)(x-1) \end{aligned}$$

$$\therefore f'(x) = 0 \Rightarrow 5x^2(x-3)(x-1) = 0$$

$$f''(x) = 20x^3 - 60x^2 + 30x$$

$$= \begin{cases} f''(0) = 0 \\ f''(1) = -10 \\ f''(3) = 90 > 0 \end{cases}$$

இரண்டாம் வகைக்கெழு சோதனையின் படி, $x = 1$ என்பது இடஞ்சார்ந்த பெரும புள்ளி மற்றும் $f(1) = 11$ என்பது இடஞ்சார்ந்த பெரும மதிப்பு ஆகும்.

$x = 3$ என்பது இடஞ்சார்ந்த சிறும புள்ளி மற்றும் $f(3) = -17$ என்பது இடஞ்சார்ந்த சிறும மதிப்பு ஆகும்.

$x = 0$ ல், இரண்டாம் வகைக்கெழு சோதனை தோல்வியடைகிறது.

முதல் வகைக்கெழு சோதனையின் படி,

x -ன் மதிப்பு		$f'(x) = 5x^2(x-3)(x-1)$ ன் குறியீடு
$x = 0$	left (say -0.1)	> 0
	right (say 0.1)	> 0

அதாவது $x = 0$ ல், f பெரும மதிப்பும் இல்லை சிறும மதிப்பும் இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு 2.51 : $f(x) = |x+2| - 1$ என்ற கொடுக்கப்பட்ட f க்கு இடஞ்சார்ந்த பெரும மற்றும் சிறும மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டது $f(x) = |x+2| - 1$

அல்லது
$$f(x) = \begin{cases} x+2-1, & x \geq -2 \\ -(x+2)-1, & x \leq -2 \end{cases}$$

அல்லது
$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq -2 \\ -x-3, & x \leq -2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > -2 \\ -1, & x < -2 \end{cases}$$

முதல் வகைக்கெழு சோதனையின் படி,

x ன் மதிப்பு			f'(x) ன் குறியீடு
$x = -2$		left (say -2.1)	< 0
		right (say -1.9)	> 0

$f'(x)$, ன் குறியீடு குறையிலிருந்து மிகைக்கு மாறுகிறது

∴ எனவே $x = -2$ ல் $f(x)$ க்கு இடஞ்சார்ந்த சிறும புள்ளி உள்ளது. இடஞ்சார்ந்த சிறும மதிப்பு $f(-2) = |-2+2|-1 = -1$ $f(x)$ க்கு இடஞ்சார்ந்த பெரும புள்ளி இல்லை. எனவே இடஞ்சார்ந்த பெரும மதிப்பும் இல்லை.

நாம் பின்வரும் வழியிலும் சரிபார்க்கலாம்.

இங்கு $f(x) = |x+2|-1$.

$|x+2| \geq 0$ என அறிவோம்

$$x+2 = 0$$

$$\Rightarrow x = -2$$

எனவே $x = -2$ ல் $f(x)$ க்கு இடஞ்சார்ந்த சிறும புள்ளி உள்ளது. இடஞ்சார்ந்த சிறும மதிப்பு

$$f(-2) = |-2+2|-1 = -1$$

எடுத்துக்காட்டு 2.52 : $f(x) = \sin 2x + 5$ என்ற கொடுக்கப்பட்ட f க்கு பெரும மற்றும் சிறும மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டது $f(x) = \sin 2x + 5$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \text{ என அறிவோம்}$$

$$-1 \leq \sin 2x \leq 1$$

(5) ன் இருபுறமும் கூட்ட,

$$-1 + 5 < \sin 2x + 5 \leq 1 + 5$$

$$4 \leq \sin 2x + 5 \leq 6$$

எனவே $f(x)$ க்கு பெரும மதிப்பு 6 மற்றும் சிறும மதிப்பு 4 உள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 2.53 : $f(x) = x\sqrt{1-x}$, $x > 0$ என்ற கொடுக்கப்பட்ட f க்கு பெரும மற்றும் சிறும மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டது $f(x) = x\sqrt{1-x}$, $x > 0$

$$f'(x) = \sqrt{1-x} + \frac{x(-1)}{2\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{2(1-x)-x}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}=0 \Rightarrow 2-3x=0 \Rightarrow x=2/3$$

$$f''(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{1-x}(-3)-(2-3x)\cdot\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}}{(1-x)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{-6(1-x)+(2-3x)}{2(1-x)^{3/2}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{-6(1-x)+(2-3x)}{2(1-x)^{3/2}}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{-4+3x}{2(1-x)^{3/2}}\right]$$

$$x=2/3, \quad f''(2/3)=\frac{1}{2}\left[\frac{-2}{2\left(\frac{1}{3}\right)^{3/2}}\right]$$

இரண்டாம் வகைக்கெழு சோதனையின் படி, $x=2/3$ என்பது இடஞ்சார்ந்த பெரும புள்ளி மற்றும் என்பது இடஞ்சார்ந்த பெரும மதிப்பு

$$\begin{aligned} f(2/3) &= \frac{2}{3}\sqrt{1-2/3} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{2}{3\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{9} \end{aligned}$$

பயிற்சி 2.9

1. $(x-1)(x-2)(x-3)$ ன் பெரும மதிப்பைக் காண்க.
2. $x=1$ ல் $x^3 - 3x^2 + 3x + 7$ க்கு பெருமமும் இல்லை சிறுமமும் இல்லை எனக் காட்டுக.
3. $x=\frac{1}{3}\pi$ ல் $x(1+\cos x)$ -க்கு பெருமம் உள்ளது எனக் காட்டுக
4. பின்வரும் சார்புகளுக்கு பெரும மற்றும் சிறும மதிப்பு காண்க:
 i. $f(x)=(2x-1)^2+3$ ii. $f(x)=9x^2+12x+2$ iii. $f(x)=\frac{x^2-2x+4}{x^2+2x+4}$
5. இடஞ்சார்ந்த பெரும மற்றும் சிறுமத்தின் அனைத்து புள்ளிகளையும் கண்டறிந்து, பின்வரும் சார்புகளின் பெரும மற்றும் சிறும மதிப்புகளையும் கண்டறியவும்:
 i. $f(x)=x^3-3x$ ii. $f(x)=\sin x - \cos x, x \in (0, 2\pi)$ iii. $f(x)=\frac{x}{2} + \frac{2}{x}, x > 0$

$$iv. f(x) = \frac{1}{x^2 + 2} \quad v. f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2} \quad vi. f(x) = (x-1)^4 (x-2)^2$$

$$vii. f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 5$$

6. f க்கு 0-ல் இடஞ்சார்ந்த பெருமம் மற்றும் சிறுமம் உள்ளதா என்பதை ஆராயுங்கள்.

$$i. f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x > 0 \\ -3x+1, & x \leq 0 \end{cases} \quad ii. f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x \leq 0 \\ -3x+1, & x > 0 \end{cases}$$

$$iii. f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x \geq 0 \\ -3x+1, & x < 0 \end{cases} \quad iv. f(x) = |x| + |x-1|$$

7. பின்வரும் சார்புகளின் பெரும /சிறும மதிப்புகளைக் கண்டறியவும்:

$$i. f(x) = -|x+1| + 3 \quad ii. f(x) = |\sin 4x + 3| \quad iii. f(x) = x+1, \quad x \in (-1, 1)$$

விடைகள்

1. $\frac{2}{3\sqrt{3}}$

4. $i.$ சிறும மதிப்பு = -2 $ii.$ சிறும மதிப்பு = -2 $iii.$ சிறும மதிப்பு = 1/3, பெரும மதிப்பு = 3

5. $i.$ 1 ல், சிறுமம் $f(1) = -2$, -1 ல், பெருமம் $f(-1) = 2$

$ii.$ $\frac{7}{4}\pi$ ல், சிறுமம், $f\left(\frac{7}{4}\pi\right) = -\sqrt{2}$, $\frac{3}{4}\pi$ ல், பெருமம், $f\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \sqrt{2}$

$iii.$ $x = 2$ ல், பெருமம், $f(2) = 1$ $iv.$ 0 ல், பெருமம், $f(0) = 2$ $f(0) = \frac{1}{2}$

$v.$ 1-ல், பெருமம், $f(1) = \frac{1}{4}$, -1ல், சிறுமம், $f(-1) = -\frac{1}{4}$

$vi.$ 1, $\frac{5}{3}$ ல், பெருமம், $f(1) = 0$, $f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{16}{729}$, $x = 2$ ல், சிறுமம் $f(2) = 0$

$vii.$ பெருமமும் இல்லை சிறுமமும் இல்லை

6. $i.$ சிறுமம் $ii.$ பெருமம்

$iii.$ பெருமமும் இல்லை சிறுமமும் இல்லை $iv.$ சிறுமம்

7. $i.$ பெருமம் = 3 சிறுமம் இல்லை $ii.$ சிறுமம் = 3, பெருமம் = 4

$iii.$ பெருமமும் இல்லை சிறுமமும் இல்லை

சில இதர எடுத்துக்காட்டுகள்

பெரும சிறுமத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டது

எடுத்துக்காட்டு 2.54 : கொடுக்கப்பட்ட சுற்றளவு கொண்ட அனைத்து செவ்வகங்களிலும், சதுரம் மிகப்பெரிய பரப்பளவைக் கொண்டுள்ளது என்பதைக் காட்டுங்கள்.

தீர்வு : நீங்களே முயற்சி செய்யுங்கள்.

எடுத்துக்காட்டு 2.55 : கொடுக்கப்பட்ட பகுதியின் அனைத்து செவ்வகங்களிலும், சதுரம் மிகச் சிறிய சுற்றளவைக் கொண்டுள்ளது என்பதைக் காட்டுங்கள்.

தீர்வு : நீங்களே முயற்சி செய்யுங்கள்.

எடுத்துக்காட்டு 2.56 : கர்ணத்தின் நீளங்களின் கூட்டுத்தொகை மற்றும் வலது கோண முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்தைக் கொடுத்தால், அவற்றுக்கிடையே உள்ள கோணம் $\frac{\pi}{3}$ ஆக இருக்கும்போது முக்கோணத்தின் பரப்பளவு பெருமம் என்பதைக் காட்டவும்.

தீர்வு : நீங்களே முயற்சி செய்யுங்கள்.

எடுத்துக்காட்டு 2.57 : கொடுக்கப்பட்ட நிலையான வட்டத்தில் பொறிக்கப்பட்ட அனைத்து செவ்வகங்களிலும், சதுரம் அதிகபட்ச பரப்பளவைக் கொண்டுள்ளது என்பதைக் காட்டுங்கள்.

தீர்வு : $ABCD$ ஆனது கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்தில் மையம் O மற்றும் ஆரம் r உடன் பொறிக்கப்பட்ட ஒரு செவ்வகமாக இருக்கட்டும்.

$\angle CAB = \theta$ என எடுத்துக் கொள்வோம்.

பிறகு, $AC = 2r$, $AB = 2r \cos \theta$ மற்றும் $BC = 2r \sin \theta$.

A என்பது, செவ்வகம் $ABCD$ ன் பகுதியாக இருக்கட்டும்.

பிறகு, $A = AB \times BC = 4r^2 \sin \theta \cos \theta = 2r^2 \sin 2\theta$

ஆகவே $A = 2r^2 \sin 2\theta$ r இங்கு r என்பது ஒரு மாறிலி

$$\therefore \frac{dA}{d\theta} = 4r^2 \cos 2\theta, \quad \frac{d^2 A}{d\theta^2} = -8r^2 \sin 2\theta$$

$$\frac{dA}{d\theta} = 0 \Rightarrow 4r^2 \cos 2\theta = 0$$

$$\Rightarrow \cos 2\theta = 0 \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} \text{ அதாவது } \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\left[\frac{d^2 A}{d\theta^2} \right]_{\theta=\pi/4} = -8r^2 \sin \frac{\pi}{2} = -8r^2 < 0$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{4} \text{ பெரும புள்ளியாகும்.}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{ ல் பெருமமாக இருக்கும்.}$$

$$\text{இந்த நிகழ்வில், } AB = 2r \cos \frac{\pi}{4} = r\sqrt{2}$$

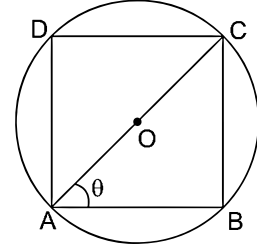
$$\text{மற்றும் } BC = 2r \sin \frac{\pi}{4} = r\sqrt{2}$$

இதன்படி, $AB = BC$ இவ்வாறு, $AB = BC$ மற்றும் எனவே, $ABCD$ ஒரு சதுரம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.58 : கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்தில் பொறிக்கப்படக்கூடிய அதிகபட்சப் பகுதியின் முக்கோணம் ஒரு சமபக்க முக்கோணம் என்பதைக் காட்டுங்கள்

தீர்வு : ABC என்பது மையம் O மற்றும் ஆரம் r உடன் கொடுக்கப்பட்ட வட்டத்தில் பொறிக்கப்பட்ட ஒரு முக்கோணமாக இருக்கட்டும்.

அதிகபட்ச பரப்பிற்கு, உச்சம் A அடிப்படை BC -யிலிருந்து அதிகபட்ச தூரத்தில் இருக்க வேண்டும்.



படம் 2.13

எனவே, விட்டம் A ஆனது, BC க்கு செங்குத்தாக இருக்க வேண்டும். இதனால், $AD \perp BC$.

எனவே, முக்கோணம் ABC இரு சமபக்க முக்கோணமாக இருக்க வேண்டும்.

$\angle CAB = \theta$ என எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$\begin{aligned} BC &= 2CD \\ &= 2OC \sin 2\theta = 2r \sin 2\theta \\ AD &= (OA + OD) = (r + r \cos 2\theta) \end{aligned}$$

A என்பது முக்கோணத்தின் பரப்பாக இருக்கட்டும்.

பின்னர், $A = \frac{1}{2} BC \times AD = r^2 \sin 2\theta (1 + \cos 2\theta)$.

$$\begin{aligned} \frac{dA}{d\theta} &= r^2 \{ \sin 2\theta (-2 \sin 2\theta) + (1 + \cos 2\theta) \cdot 2 \cos 2\theta \} \\ &= r^2 \{ 2(\cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta) + 2 \cos 2\theta \} = 2r^2 [\cos 4\theta + \cos 2\theta] \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 A}{d\theta^2} = 2r^2 \{-4 \sin 4\theta - 2 \sin 2\theta\} = -4r^2 [2 \sin 4\theta + \sin 2\theta]$$

$$\frac{dA}{d\theta} = 0 \Rightarrow \cos 4\theta + \cos 2\theta = 0$$

$$\Rightarrow \cos 4\theta = -\cos 2\theta = \cos(\pi - 2\theta)$$

$$\Rightarrow 4\theta = \pi - 2\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\left[\frac{d^2 A}{d\theta^2} \right]_{\theta=\pi/6} = -4r^2 \left(2 \sin \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \right) = -6r^2 \sqrt{3} < 0$$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$ பெரும் புள்ளியாகும்.

இந்த நிகழ்வில், முக்கோணத்தின் ஒவ்வொரு கோணமும் $\left(\frac{\pi}{3} \right)$

எனவே, ABC ஒரு சமபக்க முக்கோணம்.

திடப்பொருட்களின் கனஅளவு மற்றும் பரப்பளவு அடிப்படையில்

எடுத்துக்காட்டு 2.59 : மேலே திறந்திருக்கும் ஒரு குறிப்பிட்ட சிலிண்டரின் மொத்த பரப்பளவு குறைந்தபட்சம், அதன் உயரம் அதன் அடிவாரத்தின் ஆரத்திற்கு சமமாக இருப்பதை காட்டவும்.

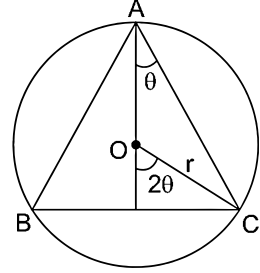
தீர்வு : நீங்களே முயற்சி செய்யுங்கள்.

எடுத்துக்காட்டு 2.60 : மேலே திறந்திருக்கும் உருளையின் உயரம், கொடுக்கப்பட்ட மேற்பரப்பு மற்றும் மிகப்பெரிய அளவைக் கொண்டு, அதன் அடிவாரத்தின் ஆரத்திற்கு சமமாக இருப்பதைக் காட்டுங்கள்.

தீர்வு : நீங்களே முயற்சி செய்யுங்கள்.

எடுத்துக்காட்டு 2.61 : மேலே திறந்திருக்கும் உருளையின் உயரம், கொடுக்கப்பட்ட பரப்பளவு மற்றும் அதிகபட்ச கனஅளவு $\sin^{-1}(1/3)$ என்பதைக் காட்டுங்கள்.

தீர்வு : நீங்களே முயற்சி செய்யுங்கள்.



படம் 2.14

எடுத்துக்காட்டு 2.62 : ஒரு கனசதுரமாக இருக்கும்போது சதுர அடிப்பகுதி மற்றும் கொடுக்கப்பட்ட தொகுதி கொண்ட ஒரு மூடிய கனசதுரத்தின் மேற்பரப்பு மிகக் குறைவாக இருப்பதைக் காட்டுங்கள்.

தீர்வு : V ஆனது நீளம் a , அகலம் a மற்றும் உயரம் h உடன் மூடிய கனசதுரத்தின் நிலையான அளவாக இருக்கட்டும்.

S அதன் பரப்பளவாக இருக்கட்டும்.

$$V = (a \times a \times h) \text{ அல்லது } h = \frac{V}{a^2} \quad \dots(1)$$

$$S = 2(a^2 + ah + ah) = 2(a^2 + 2ah) = 2\left(a^2 + \frac{2V}{a}\right) \quad [(1) \text{ லிருந்து}]$$

$$S = 2\left(a^2 + \frac{2V}{a}\right)$$

$$\therefore \frac{dS}{da} = 2\left(2a - \frac{2V}{a^2}\right) \text{ மற்றும் } \frac{d^2S}{da^2} = \left(4 + \frac{8V}{a^3}\right)$$

$$\frac{dS}{da} = 0 \Rightarrow V = a^3 \Rightarrow a \times a \times h = a^3 \Rightarrow h = a$$

$h = a$, எனும்போது

$$V = a^3$$

$$\therefore \left[\frac{d^2S}{da^2}\right]_{h=a} = 4\left(4 + \frac{8a^3}{a^3}\right) = 12 > 0$$

எனவே, S என்பது நீளம் $= a$, அகலம் $= a$ மற்றும் உயரம் $= a$, அதாவது, ஒரு கனசதுரமாக இருக்கும்போது சிறுமமாக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.63 : கொடுக்கப்பட்ட மேற்பரப்பின் மூடிய உருளையின் உயரம் மற்றும் அதிகபட்ச அளவு அதன் அடிப்பகுதியின் விட்டத்திற்கு சமம் என்பதைக் காட்டுங்கள்.

தீர்வு : நீங்களே முயற்சி செய்யுங்கள்.

எடுத்துக்காட்டு 2.64 : கொடுக்கப்பட்ட கோளத்தில் பொறிக்கப்படக்கூடிய மிகப்பெரிய தொகுதியின் கூம்பு அதன் உயரத்தின் மூன்று மடங்கு கோளத்தின் விட்டத்திற்கு இரு மடங்கு ஆகும் என்பதைக் காட்டுங்கள். ஆரம் R உள்ள கோளத்தில் பொறிக்கப்பட்ட மிகப்பெரிய கூம்பின் கனஅளவைக் கண்டறியவும்.

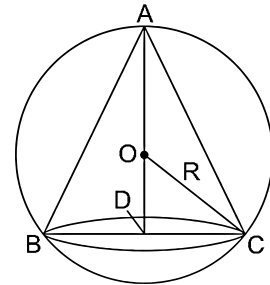
தீர்வு : மையம் O உடன் கொடுக்கப்பட்ட கோளத்தின் ஆரமாக R இருக்கட்டும், மற்றும் V என்பது பொறிக்கப்பட்ட கூம்பின் அளவாக இருக்கட்டும், h அதன் உயரம் மற்றும் r அடித்தளத்தின் ஆரமாக இருக்கட்டும்.

கொடுக்கப்பட்ட படத்தில்,

$$OD = AD - AO = (h - R)$$

$$R^2 = (h - R)^2 + r^2 \text{ அல்லது } r^2 = h(2R - h) \quad \dots(1)$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi h^2 (2R - h) \quad [(1) \text{ லிருந்து}]$$



படம் 2.15

$$\therefore \frac{dV}{dh} = \frac{1}{3}\pi h(4R - 3h)$$

$$\frac{d^2V}{dh^2} = \left(\frac{4}{3}\pi R - 2\pi h\right)$$

பெருமம் அல்லது சிறுமத்திற்கு,

$$\frac{dV}{dh} = 0$$

$$\frac{dV}{dh} = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}\pi h(4R - 3h) = 0$$

$$\Rightarrow h = 0 \quad \text{அல்லது} \quad (4R - 3h) = 0 \Rightarrow h = \frac{4}{3}R$$

$$\left[\frac{d^2S}{da^2}\right]_{h=(4/3)R} = -\frac{4\pi R}{3} < 0$$

எனவே, $h = \frac{4}{3}R$, அதாவது, $3h = 2(2R)$ போது V பெருமம்.

3 மடங்கு உயரம் = 2 மடங்கு விட்டம்.

$$\text{மிகப்பெரிய கூம்பின் அளவு} = \frac{1}{3}\pi \times \frac{16R^2}{9} \times \left(2R - \frac{4R}{3}\right) = \frac{32\pi R^3}{81}$$

பயிற்சி 2.9

- 8 ஐ இரண்டு நேர்மறையான பகுதிகளாகப் பிரிக்கவும், அதாவது ஒன்றின் சதுரத்தின் தொகை மற்றும் மற்றொன்றின் கனசதுரம் சிறுமம்.
- a ன் ஒரு பகுதியின் p^{th} சக்தி மற்றும் இரண்டாவது பகுதியின் q^{th} சக்தி பெருமமாக இருக்கும் வகையில் a ஐ இரண்டு பகுதிகளாக பிரிக்கவும்.
- கொடுக்கப்பட்ட சுற்றளவு கொண்ட மிகப்பெரிய செவ்வகம் ஒரு சதுரம் என்பதை நிரூபிக்கவும்.
- ஒரு செவ்வகத்தின் சுற்றளவைக் கருத்தில் கொண்டு, அது ஒரு சதுரமாக இருக்கும்போது அதன் மூலைவிட்டம் சிறுமமாக இருப்பதைக் காட்டுங்கள்.
- கொடுக்கப்பட்ட கர்ணத்தின் வலது கோண முக்கோணத்தின் சுற்றளவு முக்கோணம் இரு சமபக்க இருக்கும்போது அதிகபட்சம் பெருமம் என்பதை நிரூபிக்கவும்.
- குறைந்தபட்சம் வளைந்த மேற்பரப்பு மற்றும் கொடுக்கப்பட்ட தொகுதி வலது வட்டக் கூம்பு அடித்தளத்தின் ஆரம் $\sqrt{2}$ மடங்குக்கு சமமான உயரத்தைக் கொண்டுள்ளது என்பதைக் காட்டு.
- $(2, -8)$ என்ற புள்ளிக்கு அருகில் உள்ள $y^2 = 4ax$ வளைவில் உள்ள புள்ளியைக் கண்டறியவும்.
- ஒரு கனசதுரமாக இருக்கும்போது சதுர அடிப்பகுதி மற்றும் கொடுக்கப்பட்ட தொகுதி கொண்ட ஒரு மூடிய கனசதுரத்தின் மேற்பரப்பு மிகக் குறைவாக இருப்பதைக் காட்டுங்கள்.

விடைகள்

1. 6, 2

$$2. \frac{ap}{p+q}, \frac{aq}{p+q}$$

7. (4, -4)

சுவாரஸ்யமான உண்மைகள்

- ♦ பெருமம் மற்றும் சிறுமத்தைப் பயன்படுத்தி பெருமம் மற்றும் சிறும மதிப்புகள் அறுதிகள் என்று அழைக்கப்படுகின்றன.
- ♦ பெருமம் / சிறுமம் என்று பெயரிடப்பட்ட ஒரு சிற்பம் கஜகஸ்தானின் அஸ்தானாவில் கண்காட்சி 2017 இல் காட்சிப்படுத்தப்பட்டது. அதன் வடிவமைப்பு தனித்துவமானது.
- ♦ <https://arechitizer.com/projects/minima-maxima-1/>



Extreme values-I

அன்றாட வாழ்வில் பயன்பாடுகள்

- ♦ மருந்துகளின் செயல்திறன் / நோய்களின் பரவலைப் படிக்கும் போது மருத்துவத்தில் பயன்பாடுகள் (அதாவது, எவ்வளவு நேரத்திற்குப் பிறகு அதிகபட்ச செயல்திறன் காணப்பட்டது).
- ♦ அணுசக்தி துறையில் சிதைவு ஆய்வு.
- ♦ வணிகத்தில், தொழில்கள் இந்த கருத்தை தங்கள் இலாபங்களை அதிகரிக்க அல்லது இழப்பை குறைக்க, பொருட்களின் விலைகளை மதிப்பிடுவதன் மூலம் மற்றும் எத்தனை பங்குகளை வைத்திருக்க வேண்டும் என்பதைப் பயன்படுத்துகிறது.
- ♦ மக்கள் தொகை வளர்ச்சி வளைவு.

அகநிலை தீர்க்கப்பட்ட கேள்விகள்
(Subjective Solved Questions)

எடுத்துக்காட்டு 1 : $[2, 5]$ இடைவெளியில் $f: [2, 5] \rightarrow R$ ஆனது தொடர்ச்சியான மற்றும் வகையிடத்தக்கது என எடுத்துக் கொள்ளுங்கள். $\forall x \in (2, 5), f'(x) = (f(x))^2 + \pi$ என்று வைத்துக் கொள்ளுங்கள். $f(5) - f(2)$ ஐக் கண்டறியவும்.

தீர்வு : f என்பது $[2, 5]$ என்ற இடைவெளியில் தொடர்ச்சியானதாகவும் $(2, 5)$ என்ற இடைவெளியில் வகையிடத்தக்கதாகவும் உள்ளதாக கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

எனவே, லாக்ரேஞ்சின் சராசரி மதிப்பு தேற்றத்தால், குறைந்தபட்சம் ஒரு $c \in (2, 5)$ உள்ளதாக இருந்தால்

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad b = 5, a = 2$$

பிறகு,
$$\frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = (f(c))^2 + \pi \quad \therefore [(f(c))^2 \geq 0 \quad \forall c \in (2, 5)]$$

$$\frac{f(5) - f(2)}{3} \geq \pi$$

$$f(5) - f(2) \geq 3\pi$$

எடுத்துக்காட்டு 2 : $e^x \cos x = 1$ ன் இரண்டு மூலங்களுக்கு இடையில், $e^x \sin x - 1 = 0$ ன் ஏதேனும் ஒரு மூலம் இருக்கும் என நிறுவுக.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டது $e^x \cos x = 1$

வரிசைப்படுத்திய பிறகு, $\cos x = e^{-x}$

$f(x) = \cos x - e^{-x}$ என எடுத்துக் கொள்வோம்.

i. a, b என்பன f ன் மூலங்கள் என எடுத்துக்கொள்ளலாம்

$$f(a) = f(b) = 0$$

ரோலின் தேற்றத்தின் படி, $\exists c \in (a, b)$ என இருந்தால்

$$f'(c) = 0 \text{ எனலாம்}$$

$$f'(x) = -\sin x + e^{-x}$$

$$\Rightarrow -\sin c + e^{-c} = 0$$

$$\Rightarrow e^{-c} = \sin c$$

$$\text{அல்லது} \quad 1 = e^c \sin c$$

$$\text{அதாவது} \quad e^c \sin c - 1 = 0$$

இதிலிருந்து $c \in (a, b)$ ல் $e^c \sin c - 1 = 0$ க்கு ஒரு மூலம் உள்ளது எனது தெரிகிறது. அதாவது $e^c \cos c = 1$ -ன் இரண்டு மூலங்களுக்கிடையே.

எடுத்துக்காட்டு 3 : $p + q + r = 0$ எனில் $f(x) = 3px^2 + 2qx + r = 0$ என்ற இருபடி சமன்பாட்டின் மூலம் $(0, 1)$ ல் உள்ளது என்பதை நிரூபிக்கவும்.

நிரூபணம் : $f(x) = px^3 + qx^2 + rx$ என எடுத்துக் கொள்வோம்

i. $[0, 1]$ என்ற இடைவெளியில் உள்ள $f(x)$ என்ற தொடர்ச்சியான சார்பானது x ல் ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவையாக இருக்கும் எனது தெளிவாகத் தெரிகிறது.

$$f'(x) = 3px^2 + 2qx + r$$

ii. $(0, 1)$ என்ற இடைவெளியில் உள்ள $f(x)$ என்ற வகையிடத்தக்க சார்பானது x ல் ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவையாக இருக்கும்.

$$\text{iii. } f(0) = p(0)^3 + q(0)^2 + r(0) = 0$$

$$f(1) = p(1)^3 + q(1)^2 + r(1) = p + q + r = 0$$

$f'(c) = 0$ என்றிருக்குமாறு குறைந்தபட்சம் ஒரு $c \in (0, 1)$ ஆனது இருக்குமேயானால் ரோலின் தேற்றம் நிறைவுசெய்யும்.

$$f'(c) = 3pc^2 + 2qc + r$$

$$f'(c) = 0 \Rightarrow 3pc^2 + 2qc + r = 0$$

இது c இல் இருபடி ஆகும் மற்றும் $c \in (0, 1)$.

எடுத்துக்காட்டு 4 : $[a, b]$ என்ற மூடிய இடைவெளியில் f என்ற சார்பு தொடர்ச்சியானதாகவும் மற்றும் (a, b) என்ற திறந்த இடைவெளியில் வகையிடத்தக்கதாகவும் இருக்கட்டும்.

மற்றும் $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$. பின்னர் $[a, b]$ என்ற இடைவெளியில் f ஒரு மாறிலி என்பதைக் காட்டுங்கள்.

நிரூபணம் : $[a, b]$ ல் f நிலையானது என்பதைக் காட்ட, $f(x) = f(a) \quad \forall x \in [a, b]$ என்பதை நிரூபிக்க போதுமானது $f(x) = f(a) \quad \forall x \in [a, b]$

$x > a$. என இருக்குமாறு $x \in [a, b]$ ஐ எடுத்துக்கொள்ளுவோம்

இப்போது, $[a, x]$ இல் சராசரி மதிப்பு தேற்றத்தைப் பயன்படுத்துதல்

i. $[a, b]$ என்ற இடைவெளியில் f ஆனது தொடர்ச்சியாகும்.

$\therefore [a, x]$ என்ற இடைவெளியில் f ஆனது தொடர்ச்சியாகும்

ii. (a, b) என்ற இடைவெளியில் f வகையிடத்தக்கது என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$\therefore (a, x)$ என்ற இடைவெளியில் f வகையிடத்தக்கது

லாக்ரேஞ்சின் சராசரி மதிப்புக் தேற்றத்தின் படி, குறைந்தது ஒரு $c \in (a, x)$ உள்ளதால்

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c) \quad \dots(1)$$

$$f'(c) = 0$$

[(1) லிருந்து]

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0$$

$$f(x) - f(a) = 0$$

$\Rightarrow$

$f(x) = f(a)$ $[a, b]$ என்ற இடைவெளியில் f ஒரு மாறிலி.

எடுத்துக்காட்டு 5 : $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ $g(x) = x^2, x \in [0, 1]$ என எடுத்துக் கொள்வோம். பின்னர்,

$[0, 1]$ ல் f மற்றும் g இரண்டும் வகையிடத்தக்கது ஆகும்.

மற்றும் $g(x) > 0, x \neq 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \text{ மற்றும் } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ இல்லை என காட்டுக.}$$

நிரூபணம் : இங்கு $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0, x \neq 0$$

மேலும்,

$$g(x) = x^2 \quad \forall x \in (0, 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \quad \forall x$$

$x \neq 0$ க்கு,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin 1/x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$$

$$= \sin(\infty)$$

$= 1$ மற்றும் -1 க்கு இடையில் அலைவுறுகிறது.

$= \text{Does not exist.}$

எடுத்துக்காட்டு 6 : $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \geq 0, \quad 0 \leq c \leq x$ என்று வரையறுக்கப்பட்ட $f(x)$ க்கான n^{th}

வரிசையின் மீதமுள்ள மேக்லாரின் பல்லுறுப்பைப் பயன்படுத்துதல்.

$\sin(0.1)$ கணக்கிடுவதில் குறைந்தபட்சம் 10-6 என்ற முழுமையான உண்மையான பிழையைப் பெற குறைந்தபட்சம் மேக்லாரின் பல்லுறுப்புக்கோட்டின் வரிசை என்ன?

தீர்வு : $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \geq 0, \quad 0 \leq c \leq x$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

$$R_n(0.1) = \frac{(0.1)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \geq 0, \quad 0 \leq c \leq 0.1$$

$$|\sin x| \leq 1 \quad |\cos x| \leq 1 \quad \text{என நாம் அறிந்ததே}$$

$$f^{(n+1)}(c) \leq 1$$

$$R_n(0.1) \leq \frac{(0.1)^{n+1}}{(n+1)!} (1)$$

$$R_n(0.1) = \frac{(0.1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$R_n(0.1) < 10^{-6}$$

$$\frac{(0.1)^{n+1}}{(n+1)!} < 10^{-6}$$

$n \geq 4$ போது மட்டுமே இது சாத்தியமாகும்.

ஆனால் $\sin x$ க்கான மேக்லாரின் பல்லுறுப்புக்கோவை ஒற்றைப்படை உறுப்புகளை மட்டுமே உள்ளடக்கியது, எனவே, $n \geq 5$.

எடுத்துக்காட்டு 7 : $f : (0, \infty) \rightarrow R$ வகையிடத்தக்கது என எடுத்துக் கொள்வோம். $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) + f'(x) = L$.

என இருந்தால் $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$. $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$ என்று நிரூபி

தீர்வு: நீங்களே முயற்சி செய்யுங்கள்.

எடுத்துக்காட்டு 8 : $f : (a, b) \rightarrow R$ ஐ மூன்று முறை வகைப்படுத்தக்கூடிய சார்பு என்றால் $f(a) = f(b) = 0$,

$f'(a) = f'(b) = 0$ என்றவாறு எடுத்துக்கொள்ளுவோம். $c \in (a, b)$ என இருந்தால்

$f'''(c) = 0$ என்று எழுத முடியும் என நிரூபி.

நிரூபணம் : இங்கு $f : (a, b) \rightarrow R$ என்பது மூன்று முறை வகைப்படுத்தக்கூடிய சார்பு

$\Rightarrow f$ என்பது $[a, b]$ ல் தொடர்ச்சியாகவும் (a, b) -ல்

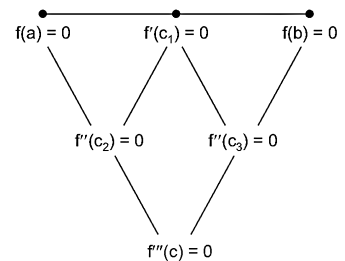
வகையிடத்தக்கதாகவும் இருக்கும். மேலும் $f(a) = f(b) = 0$.

ரோலின் தேற்றத்தின் படி, $c_1 \in (a, b)$ என இருந்தால்

$$f'(c_1) = 0 \quad \text{என்று எழுதலாம்.}$$

மீண்டும் ரோலின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்த:

i. f' என்பது $[a, b]$ ல் தொடர்ச்சியாக இருக்கும்.



படம் 2.16

எனவே $[a, c_1]$ மற்றும் $[c_1, b]$ ல் தொடர்ச்சியாக இருக்கும்.

ii. f' என்பது (a, b) ல் வகையிடத்தக்கதாக இருக்கும்.

எனவே (a, c_1) மற்றும் (c_1, b) ல் வகையிடத்தக்கதாக இருக்கும்.

iii. $f'(a) = f'(c_1) = f'(b) = 0$

ரோலின் தேற்றத்தின் படி, $c_2 \in (a, b)$ மற்றும் $c_3 \in (c_1, b)$ என இருந்தால்

$$f''(c_2) = 0, c_2 \in (a, c_1)$$

மற்றும் $f''(c_3) = 0, c_3 \in (c_1, b)$ என்று எழுதலாம்.

இதேபோல், (c_2, c_3) -ல் f'' க்கு ரோலின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்த, f'' என்பது $[c_2, c_3]$ ல் தொடர்ச்சியாகவும் (c_2, c_3) ல் வகையிடத்தக்கதாகவும் இருக்கும். மேலும் $f''(c_2) = f''(c_3) = 0$.

$c \in (c_2, c_3)$ என இருந்தால்

$$f''(c) = 0 \text{ for } c \in (c_2, c_3)$$

$$f''(c) = 0 \text{ for } c \in (a, b)$$

எடுத்துக்காட்டு 9 : 24 செமீ பக்கஅளவுள்ள ஒரு சதுரத் தகடு அதன் மேல் பகுதி இல்லாமல் உள்ளது. அதன் ஒவ்வொரு மூலையிலும் ஒரு சதுரத்தை வெட்டி மடிப்புகளை மடக்கி ஒரு பெட்டியை உருவாக்க வேண்டும். பெட்டியின் அளவு அதிகபட்சமாக இருக்கும் வகையில் துண்டிக்கப்பட வேண்டிய சதுரத்தின் பக்கம் என்னவாக இருக்க வேண்டும்? அதிகபட்ச அளவையும் கண்டறியவும்.

தீர்வு : சதுரத்தின் ஒவ்வொரு பக்கமும் x என்ற அளவில் துண்டிக்கப்படட்டும்.

$$\text{நீளம்} = 24 - 2x$$

$$\text{அகலம் உயரம்} = 24 - 2x, \text{ உயரம்} = x$$

பெட்டியின் கன அளவு V ஆக இருக்கட்டும்.

$$V = x(24 - 2x)^2$$

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dx} &= x \cdot 2(24 - 2x)(-2) + (24 - 2x)^2 \cdot 1 \\ &= (24 - 2x)(24 - 6x) \end{aligned}$$

பெருமம் அல்லது சிறுமத்திற்காக, $\frac{dV}{dx} = 0$

$$\Rightarrow (24 - 2x)(24 - 6x) = 0 \Rightarrow x = 4, 12$$

$$x = 4$$

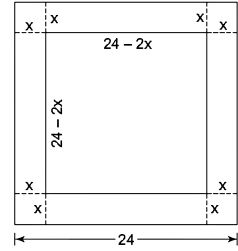
$$\frac{d^2V}{dx^2} = (24 - 2x)(-6) + (24 - 6x)(-2)$$

$$x = 4 \text{ -ல் } \frac{d^2V}{dx^2} = (24 - 8)(-6) = \text{குறை எண்}$$

$$x = 4 \text{ எனும்போது } V \text{ பெருமம் ஆகும்.}$$

$$\therefore \text{பெரும மதிப்பு} = 4(24 - 8)^2 = 1024 \text{ cu. cm.}$$

எடுத்துக்காட்டு 10 : மேலே திறக்கப்பட்டு செவ்வக அடிப்பகுதி மற்றும் செவ்வக பக்கங்களைக் கொண்ட ஒரு தொட்டியின் ஆழம் 2 மீ மற்றும் கொள்ளளவு 8 m^3 ஆகும். தொட்டியை கட்டுவதற்கு ஒரு சதுர மீட்டருக்கு ₹70, அடித்தளத்திற்கும் ₹. 45 / பக்கங்களுக்கும் தேவைப்படும் குறைந்தபட்ச விலை என்ன?



படம் 2.17

தீர்வு : $x \text{ mt}$ மற்றும் $y \text{ mt}$ ஆகியவை தொட்டியின் அடிப்பக்கத்தின் பக்கங்களாக இருக்கட்டும்.

தொட்டியின் ஆழம் 2 மீ.

தொட்டியின் கன அளவு = $2xy \text{ m}^3$

$$\Rightarrow 2xy = 8$$

$$\Rightarrow xy = 4$$

தொட்டியின் அடிப்பகுதியின் பரப்பளவு = $(x \times y) \text{ m}^2$

இப்போது, தொட்டியின் அடிப்பகுதியை நிர்மாணிப்பதற்கான

செலவு சதுர மீட்டருக்கு ₹.70 ஆகும்.

தொட்டியின் அடிப்பகுதியைக் கட்டுவதற்கான செலவு = ₹79xy

தொட்டியின் பக்கங்களின் மொத்த பரப்பளவு

$$= (2x + 2x + 2y + 2y) \text{ m}^2 = 4(x + y) \text{ m}^2$$

தொட்டியின் பக்கங்களைக் கட்டுவதற்கான செலவு சதுர மீட்டருக்கு ₹ 45 என்று வழங்கப்படுகிறது.

தொட்டியின் பக்கங்களைக் கட்டுவதற்கான செலவு = $180(x + y)$

தொட்டியை கட்டுவதற்கான மொத்த செலவு C ஆக இருக்கட்டும்

$$C = ₹ [70xy + 180(x + y)]$$

$$= ₹ \left[70(4) + 180 \left(x + \frac{4}{x} \right) \right]$$

$$= ₹ \left[280 + 180x + \frac{720}{x} \right]$$

$$\therefore \frac{dC}{dx} = 180 - \frac{720}{x^2}$$

பெருமம் அல்லது சிறுமத்திற்காக, $\frac{dC}{dx} = 0$

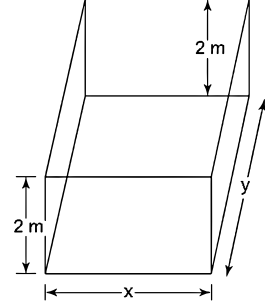
$$180 - \frac{720}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$\frac{d^2C}{dx^2} = \frac{140}{x^3}$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{1440}{(2)^3}$$

$x = 2$ எனும்போது C சிறுமம் ஆகும்.

$$\text{எனவே, குறைந்த விலை கொண்ட தொட்டியின் விலை} = ₹ \left[280 + 18(2) + \frac{720}{2} \right] = ₹ 1000$$



படம் 2.18

சுருக்கம்

1. ரோலின் தேற்றம் மற்றும் சராசரி மதிப்பு தேற்றத்தைப் பயன்படுத்துவதற்கான அவசியமான நிபந்தனையானது சார்பு தொடர்ச்சியாகவும், வகையிடத்தக்கதாகவும் இருக்க வேண்டும்.

2. x ன் அடுக்கில் $f(x)$ ன் விரிவாக்கம் (மெக்கலரின் தொடர்)

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots$$

3. $x-a$ ன் அடுக்கில் $f(x)$ ன் விரிவாக்கம் (டெய்லர் தொடர்)

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots$$

4. தேரப்பெறா வடிவங்கள்

i. $\frac{0}{0}$

ii. $\frac{\infty}{\infty}$

iii. $0 \times \infty$

iv. $\infty - \infty$

v. 1^∞

vi. 0^0

vii. ∞^0

5. லோபித்தால் விதி

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = 0 \text{ மற்றும் } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a) = 0 \text{ எனில் } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

6. எல்லையின் நிலையான முடிவுகள்

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$

d. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

7. பெருமம் மற்றும் சிறுமம்: $f(x)$ சார்பிற்கு, நாம் $f'(x)$ ஐ கண்டுபிடித்து அதை பூஜ்ஜியத்திற்கு சமன் செய்கிறோம், அதாவது $f'(x) = 0$ இது $f(x)$ இன் நிலைப்புள்ளிகளை அளிக்கிறது. இப்போது இந்த நிலைப்புள்ளிகளில் நாம் $f(x)$ இன் பெருமம் மற்றும் சிறுமத்தை சரிபார்க்கிறோம்.

நிலை-I நிலைப்புள்ளிகளில் முதலில் $f''(x)$ ஐக் கண்டறியவும்.

$f''(x) > 0$ எனில், நிலைப்புள்ளியானது சிறுமப்புள்ளியாகும்.

நிலை-II $f''(x) < 0$ எனில், நிலைப்புள்ளியானது பெருமப்புள்ளியாகும்.

8. சார்புகளின் சில நிலையான விரிவாக்கம்:

a. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$

b. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$

c. $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \dots$

d. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

e. $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots$ $|x| < 1$ எனில்

f. $\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots$

g. $(1-x)^n$, $|x| < 1$ க்கு

$$= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 \dots |x| < 1$$

குறிக்கோள் கேள்விகள்
(Objective Questions)

- கண்டுபிடி $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p^5 \cdot p!}{5.6 \dots (5+p)}$
 - 4!
 - 5!
 - 0
 - π
- கண்டுபிடி $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x}$
 - ∞
 - 1
 - 0
 - 2^2
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos 2x)}}{x}$ ன் மதிப்பு
 - 1
 - 1
 - 0
 - இல்லை
- ரோலின் தேற்றத்தை சரிபார்க்க எது அவசியம்?
 - திறந்த இடைவெளியில் தொடர்ச்சியான மற்றும் வகையிடத்தக்கது.
 - திறந்த இடைவெளியில் தொடர்ச்சியானது மற்றும் மூடிய இடைவெளியில் வகையிடத்தக்கது.
 - மூடிய இடைவெளியில் தொடர்ச்சியானது மற்றும் திறந்த இடைவெளியில் வகையிடக்கூடியது.
 - மூடிய இடைவெளியில் தொடர்ச்சியானது மற்றும் வகையிடத்தக்கது.
- ரோலின் தேற்றம் $[a, b]$ இல் $f(x)$ க்கு சரிபார்க்கப்படும்போது, c இருப்பதற்கு தேவையானது
 - $c \in [a, b]$ எனும்போது $f'(c) = 0$
 - $c \in (a, b)$ எனும்போது $f'(c) = 0$
 - $c \in [a, b)$ எனும்போது $f'(c) = 0$
 - $c \in (a, b]$ எனும்போது $f'(c) = 0$
- $f(x) = x^2 - 8x + 12$ என்ற சார்பு ரோலின் தேற்றத்தின் நிபந்தனையை (2, 6) என்ற புள்ளியில் நிறைவேற்றினால், $f'(c) = 0$ எனும்போது c ன் மதிப்பு
 - 6
 - 4
 - 8
 - 2
- $[0, 18\pi]$ -ல் $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ என்ற சார்புக்கு $f'(c) = 0$ எனுமாறு எத்தனை புள்ளிகள் கிடைக்கும்?
 - 8
 - 9
 - 17
 - 18
- $f(x) = \log(10 - x^2), x \in (-3, 3)$ எனில், தொடுகோட்டின் சாய்வு பூஜ்ஜியமாக இருக்கும்போது, $[-3, 3]$ என்ற இடைவெளியில் புள்ளியைக் கண்டறியவும் $[-3, 3]$?
 - 0
 - 2
 - ரோலின் தேற்றம் பயன்படுத்தப்படவில்லை, ஏனெனில் சார்பு $[-3, 3]$ இல் தொடர்ச்சியாக இல்லை
 - ரோலின் தேற்றம் பயன்படுத்தப்படவில்லை, ஏனெனில் சார்பு $[-3, 3]$ இல் வகையிடத்தக்கதாக இல்லை

9. வளைவரையின் தொடுகோட்டின் சாய்வு, $(0, 1)$ $(1, 4)$ என்ற இருபுள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் சாய்வுக்கு சமம் எனில் $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ என்ற வளைவரைக்கு $[0, 1]$ -ல் c என்ற புள்ளியைக் காண்க
 a. 0.64 b. 0.44 c. 0.54 d. 0.34
10. $f(x) = x^3 + x + 1$ என்ற சார்பிற்கு, எந்த ரோலின்புள்ளியும் இல்லை. கடிகார எதிர்ப்பு அர்த்தத்தில் சார்பை 60 டிகிரி சுழற்றுவதன் மூலம் ஆய அச்சுகள் மாற்றப்படுகின்றன. புதிய ரோலின் புள்ளி
 a. $\sqrt{3}/2$ b. சார்பு ஒரு ரோல் புள்ளியைக் கொண்டிருக்க முடியாது
 c. $\sqrt{3}$ d. $\sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{3}}$
11. $(1, 0)$ மற்றும் $(e, 1)$ என்ற இருபுள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் நானுக்கு இணையான தொடுகோட்டில் $y = \log x$ என்ற வளைவரையின் புள்ளியைக் காண்க
 a. e b. $e - 1$ c. $1 - e$ d. $-e$
12. சராசரி மதிப்பு தேற்றத்தில், $f(a) = f(b)$ எனில், பின்னர் _____ என மாறுகிறது.
 a. லீப்னிட்ஸ் தேற்றம் b. ரோலின் தேற்றம்
 c. டெய்லரின் தொடர் சார்பு d. கோஷியின் தேற்றம்
13. $(0, x)$ ல், $f(x) = \sin x \cos x$ என்ற சார்பு தொடர்ச்சியானது மற்றும் வகையிடத்தக்கது எனில்
 a. $1 < \frac{\cos x \cdot \sin x}{x} < \sin 2x$ b. $1 < \frac{\cos x \cdot \sin x}{x} < \cos 2x$
 c. $1 < \frac{\cos x \cdot \sin x}{x} < x \cos 2x$ d. $1 < \frac{\cos x \cdot \sin x}{x} < 1 + \cos 2x$
14. $[0, 1]$ என்ற இடைவெளியில் $x^{25} (1 - x)^{75}$ என்ற சார்பு அதன் பெரும மதிப்பை _____ ல் எடுக்கும்
 a. 0 b. $1/2$ c. 1 d. $1/4$
15. $x = 0$ ஐப் பொறுத்து $f(x) = e^{-x^2}$ என்ற சார்பின் டெய்லரின் தொடரின் x^2 ன் வகைக்கெழு
 a. $1/4$ b. -1 c. $1/2$ d. -2
16. $f(x) = 1 + 2x^2 + 4x^4 + 6x^6 + \dots + 100x^{100}$ என்பது ஒரு மெய் மாறி x ன் பல்லுறுப்பு ஆகும், பின்னர் $f(x)$ க்கு
 a. பெருமமும் இல்லை சிறுமமும் இல்லை b. ஒரே ஒரு பெருமம்
 c. ஒரே ஒரு சிறுமம் d. ஒரு பெருமம், ஒரு சிறுமம்
17. மேக்லாரின் தொடரைப் பயன்படுத்தி $f(x)$ சார்பின் விரிவாக்கம்
 a. $f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots$ b. $1 + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots$
 c. $f(0) - \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots$ d. $f(1) + \frac{x}{1!} f'(1) + \frac{x^2}{2!} f''(1) + \frac{x^3}{3!} f'''(1) + \dots$
18. மெய் எண் x அதன் தலைகீழில் சேர்க்கப்படும் போது தொகையின் சிறும மதிப்பு
 a. -2 b. 2 c. 1 d. -1

19. $f(x) = 2x^2 - 9ax^2 + 12a^2x + 1$, $a > 0$, என்ற சார்பு பெரும மற்றும் சிறும மதிப்புகளை p மற்றும் q ல் $p^2 = q$ எனும்போது அடையும் எனில் a -ன் மதிப்பு
 a. $1/2$ b. 3 c. 1 d. 2
20. $f(x)$ சார்பிற்கு மெக்லாரின் விரிவாக்கம் உண்மையாக இருக்க தேவையான நிபந்தனை
 a. அது தொடர்ச்சியாக இருக்க வேண்டும்
 b. அது வகையிடத்தக்கதாக இருக்க வேண்டும்
 c. அது ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் இருக்க வேண்டும்
 d. இது தொடர்ச்சியாகவும் வகைபடுத்தக்கூடியதாகவும் இருக்க வேண்டும்.

விடைகள்

1. a	2. c	3. d	4. c
5. b	6. b	7. d	8. a
9. c	10. d	11. b	12. b
13. b	14. d	15. b	16. c
17. a	18. c	19. c	20. d

**அகநிலை தீர்க்கப்படாத கேள்விகள்
(Subjective Unsolved Questions)**

1. $f(x)$ ஆனது R இல் தொடர்ச்சியான மற்றும் வகையிடக்கூடிய சார்பாக இருக்கட்டும், பின்னர் $f(x)$ இன் எந்த இரண்டு உண்மையான மூலத்திற்கும் இடையில், $f'(x)$ இன் குறைந்தபட்சம் ஒரு மூலம் இருப்பதைக் காட்டுங்கள்.
2. $f: (a, b) \rightarrow R$ ஐ மூன்று முறை வகைப்படுத்தக்கூடிய சார்பு என்றால் $f(a) = f(b) = f'(a) = f''(a) = 0$ என்றவாறு எடுத்துக்கொள்ளுவோம். $c \in (a, b)$ என இருந்தால் $f'''(c) = 0$ என்று எழுத முடியும் என நிரூபி.
3. சராசரி மதிப்பு தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி, $|\sin x - \sin y| \leq |x - y| \forall x, y \in R$ என நிரூபி.
4. $f: (0, \infty) \rightarrow R$, $a > 0$ வகையிடத்தக்க சார்பு.
 $\lim_{x \rightarrow \infty} (af(x) + f'(x)) = L$ எனில் $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{L}{a}$ என நிரூபி.
5. $a_0 + a_1 + \dots + a_n = 0$, $a_i \in R$, $1 \leq i \leq n$ எனில், $(0, 1)$ ல் $a_0 + 2a_1x + \dots + (n+1)a_n x^n = 0$ -க்கு குறைந்தபட்சம் ஒரு மெய் மூலமாவது இருக்கும் என நிரூபி.
6. சராசரி மதிப்பு தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி,
 $\frac{y-x}{y} < \log\left(\frac{y}{x}\right) < \frac{y-x}{x}$, $0 < x < y$ என நிரூபி.

7. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ மேலும் $g(x) = \sin x \quad \forall x \in R$ என எடுத்துக் கொள்க. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
- ஆனால் $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ க்கு மதிப்பு இல்லை என நிரூபி.
8. $f: R \rightarrow R$ என எடுத்துக் கொள்க. $\left| \frac{df(x)}{dx} \right| \leq 4$ மற்றும் $f(0) = 0$ எனும்போது $f(1) \in [-4, 4]$ மற்றும் $f(2) \in [-8, 8]$ என நிரூபி
9. ஒரு இடைவெளி என்க $I: I \rightarrow R$, என்பது I ல் வகையிடத்தக்க சார்பு என்க. வகையீடு f' , I ல் எப்போதும் 0 இல்லை எனில் $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I$ அல்லது $f'(x) < 0 \quad \forall x \in I$. எனக் காட்டுக.
10. உயரம் h மற்றும் அரை செங்குத்து கோணம் 30° என்ற அளவுள்ள கூம்பில் பொறிக்கக் கூடிய மிகப்பெரிய சிலிண்டரின் கனஅளவு $\frac{4}{81}\pi h^3$ காட்டவும்.
11. ஒரு நீர் தொட்டி தலைகீழான வலது வட்டக் கூம்பு வடிவத்தைக் கொண்டுள்ளது மற்றும் அதன் அச்ச செங்குத்தாகவும் மற்றும் உச்சம் கீழ்நோக்கியும் உள்ளது. அதன் அரை செங்குத்து கோணம் $\tan^{-1}(0.5)$ ஆகும். ஒரு மணி நேரத்திற்கு 5 கன மீட்டர் என்ற விகிதத்தில் தண்ணீர் ஊற்றப்படுகிறது. தொட்டியில் உள்ள நீரின் ஆழம் 4 மீட்டராக இருக்கும்போது உடனடியாக நீர் மட்டம் உயரும் விகிதத்தைக் கண்டறியவும்.

செயல்முறை

1. *MATLAB* ஐப் பயன்படுத்தி $[0, 2\pi]$ ல் சைன் மற்றும் கொசைன் சார்புகளின் வரைபடத்தை வரையவும்.
2. *MATLAB* ஐப் பயன்படுத்தி R ல் e^{3x} க்கான வரைபடத்தைத் திட்டமிடுங்கள்.
3. *M.S. Excel* $[0, 5]$ என்ற இடைவெளியில் மிகப்பெரிய முழு எண் சார்பு $[x]$ ஐ வரைக.

செயல்பாடு

1. பின்வரும் சார்புகளுக்கு ரோலின் தேற்றத்தை சரிபார்க்க, *MATLAB* குறியீட்டை எழுதுக.
 - i. $[-3, 3]$ என்ற இடைவெளியில் x^2
 - ii. $[-2, 3]$ என்ற இடைவெளியில் $(x+2)^3 \times (x-3)^4$
 மேலும் அந்த சார்புகளுக்கான வளைவை வரையவும்.

மேலும் அறிக

1. மதிப்பீடு $\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right\}^{1/x}$
 - a. abc
 - b. $(abc)^{1/3}$
 - c. $(abc)^{1/8}$
 - d. $\frac{1}{abc}$

1. *b* 2. *c* 3. *b* 4. *d* 6. *c*

1. Bary, N.K. (1964). *A Treatise on Trigonometric Series*, Pergamon Press.
2. Courant R. (1988). *Differential and Integral Calculus*, Wiley, NewYork.
3. Dass, H.K. *Advanced Engineering Mathematics*, S. Chand Publications.
4. Fleming, W.H. (1965). *Functions of Several Variables*, Addison Wesley Publishing Company, Reading, MA.
5. Garg, Reena (2019). *Engineering Mathematics-I*, 2nd Edition, Khanna Book Publishing Co. (P) Ltd.
6. Grewal, B.S. *Higher Engineering Mathematics*, Khanna Publishers.
7. Jain, R.K.; Iyengar, S.R.K. *Advanced Engineering Mathematics*, 2nd Edition, Narosa.
8. Knopp, K. (1947). *Theory of Functions*, Dover, NewYork.
9. Philip, Franklin (1940). *A Treatise on Advanced Calculus*, Wiley, Inc. NewYork.
10. Piskunov, N. (1969). *Differential and Integral Calculus*, MIR Publishers, Moscow.
11. Prasad, Chandrika (1967). *Mathematics for Engineers*, Pothishala Private Ltd.
12. Ram, Babu. *Engineering Mathematics*, Pearson.
13. Thomas, G.B. and Finney, R.L. (1992). *Calculus and Analytic Geometry*, Addison-Wesley, Reading, MA.
14. Tichmarsh, E.C. (1939). *Theory of Functions*, Oxford University Press, London.

3

வரிசைகள் மற்றும் தொடர்

அலகு விவரங்கள்

இந்த அலகில் பின்வரும் தலைப்புகளின் விரிவான சுய விளக்கக் கோட்பாட்டை வழங்குகிறது - வரிசை மற்றும் தொடரின் ஒருங்கிணைப்பு, ஒருங்கிணைப்புக்கான சோதனைகள், அடுக்குத் தொடர், டெய்லர் தொடர், அடுக்கத் தொடர், முக்கோணவியல் மற்றும் மடக்கை சார்புகள், ஃபோரியர் தொடர்: அரை வரம்பு சைன் மற்றும் கொசைன் தொடர், பார்செவலின் கோட்பாடு, புறநிலை கேள்விகள் மற்றும் அகநிலை கேள்விகள் வடிவில் பல பயிற்சிகளை வழங்கப்பட்டுள்ளது. ப்ளூமின் வகைபிரித்தல் பின்பற்றப்படுகிறது.

அடிப்படைக் கோட்பாடு

வரிசைகள் மற்றும் தொடர்களின் கருத்துக்கள் கணிதத்தில் மிகவும் முக்கியமானவை, நிதி, இயற்பியல், புள்ளியியல் மற்றும் பொறியியல் ஆகிய துறையில் அவற்றின் பரவலான பயன்பாடுகள் உள்ளன. ஒரு சூழ்நிலை அல்லது ஒரு நிகழ்வின் விளைவை முன்னறிவிப்பதில், மதிப்பிடுவதில் மற்றும் கண்காணிப்பதில் அவைகள் ஒரு குறிப்பிடத்தக்கபங்கை வகிக்கின்றன. இது நம் அன்றாட வாழ்க்கைக்கான முடிவுகளை எடுப்பதில் நிறைய உதவுகிறது. உண்மையில் டெய்லர் தொடரின் மிக முக்கியமான பயன்பாடாகக் கருதப்படுவது அவைகளின் பகுதிக் கூடுதலை தோராயசார்புகளுக்கு உபயோகிப்பதன் மூலம் பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் முடிவுகள் கிடைப்பதேயாகும். பூரியர் தொடர் பெரும்பாலும் சமீக்கைகளின் பண்பேற்றம் மற்றும் பண்பேற்றமாற்றத்திற்கு பயன்படுகிறது. உள்ளீடு, வெளியீடை கணக்கிடுவதற்கும் மற்றும் அவற்றின் சைன் கொசைன் வரைப்படத்தை வரைவதற்கும் பயன்படுகிறது. இது பொறியியலில் உள்ள மிகச்சிக்கலான கணக்குகளை தீர்க்க உதவுகிறது.

முன்தேவை

1. வகையிடல் மற்றும் தொகையிடல் பற்றி அறிந்திருத்தல்.
2. முக்கோணவியல் விகிதங்களைப் பற்றி தெளிவாக அறிந்திருத்தல். மற்றும் கோணத்தின் மதிப்பை எந்த காற்பகுதியிலும் காணும் முறையை நன்கு அறிந்திருத்தல்.
3. மடக்கை மற்றும் அடுக்கு குறிசார்புகள் பற்றியும் அவற்றின் வரைப்படம் பற்றியும் அறிந்திருத்தல்.
4. சார்பின் எல்லையை மதிப்பீடு செய்வது பற்றி அறிந்திருத்தல்.
5. கூட்டுத்தொடர் முறை மற்றும் பெருக்குத்தொடர் முறையினை அறிந்து மற்றும் அவைகளின் கூடுதல் மற்றும் n- வது உறுப்பை கண்டுபிடிக்கும் முறையையும் அறிந்திருத்தல்.

அலகு விளைவுகள்

இந்த அலகு முடிந்தவுடன் மாணவர்களால்

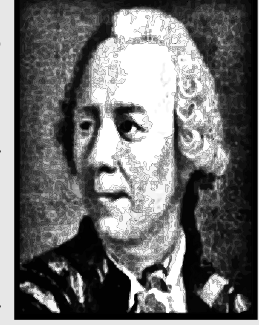
- U3-O1:** எல்லை, குவியும், விரியும், ஒரியல்பு வரிசைகளை அடையாளம் காண முடியும், சிறிய மேல்எல்லை, பெரியகீழ்எல்லை, ஆகியவற்றை கணக்கிட முடியும், விகிதம்,வர்கம், ரேபீஸ் மடக்கை மற்றும் காஸ் சோதனைகளை நேர்மறை உறுப்புகளைக் கொண்ட தொடரில் பயன்படுத்துதல் மற்றும் லேய்ப்பினிட்ஸ் சோதனையை மாற்று தொடரில் பயன்படுத்துதல், ஒப்பீட்டு சோதனையை குவிதல் மற்றும் முழுமையான குவிதலுக்கான முடிவுறா தொடரில் பயன்படுத்துதல் பற்றி அறிந்து கொள்ள முடியும்.
- U3-O2:** சார்புகளை அடுக்குத் தொடராக எழுதுதல், குவியும் ஆரத்தினை கணக்கிடல், அடுக்குத் தொடர் குவியும் பகுதியை கண்டறிதல்.
- U3-O3:** டெய்லர் மற்றும் மாக்லரின் தொடரைப் பயன்படுத்தி எந்த ஒரு சார்பையும் அது இயற்கணிதமாக இருந்தாலும் இடைநிலையாக இருந்தாலும் தோராயப்படுத்துதல்.
- U3-O4:** பூரியர் தொடரை பயன்படுத்துதல், பூரியர் தொடரின் வகையிடல் மற்றும் தொகையிடலை பயன்படுத்தி ஒரு மாரியின் விரிவாக்கம் சார்பை பயன்படுத்தும் முறையினை அறிந்து கொள்ளுதல்.

பாடநெறி முடிவுகளுடன் அலகு முடிவுகளை வரைபடமாக்கல்:

பாடப்பகுதி-3 முடிவுகள்	பாடக்கோப்பின் அடைவுகளுடன் எதிர்பார்க்கப்படும் ஒப்புமை (1-பலவீனமான தொடர்பு; 2-நடுத்தர தொடர்பு; 3-வலுவான தொடர்பு)				
	CO-1	CO-2	CO-3	CO-4	CO-5
U3-O1	2	-	3	-	1
U3-O2	-	1	3	1	-
U3-O3	-	3	-	-	1
U3-O4	1	-	2	1	-

வரலாறு

எல்லையற்ற தொடரின் தொகுப்போடு ஒரு பரபோலாவின் வளைவின் கீழ் உள்ள பகுதியை கணக்கிடுவதற்கான முதல் அறியப்பட்ட கருத்து கிரேக்க கணிதவியலாளர் ஆர்க்கிமிடிஸால் அறிமுகப்படுத்தப்பட்டது. இது இன்று கால்குலஸ் பகுதியில் பயன்படுத்தப்படுகிறது. ஜேம்ஸ் கிரிகோரி (17 ஆம் நூற்றாண்டு) எல்லையற்ற தொடரில் புதிய தசம அமைப்பில் பணியாற்றினார் மற்றும் மேக்லாரின் தொடரில் பல முடிவுகளை வெளியிட்டார். 1715 ஆம் ஆண்டில், டெய்லர் தொடரை அனைத்து செயல்பாடுகளுக்கும் உருவாக்கும் ஒரு பொதுவான முறை ப்ரூக் டெய்லரால் வழங்கப்பட்டது. 18 ஆம் நூற்றாண்டில் லியோன்ஹார்ட் யூலர், உயர் வடிவியல் தொடர் மற்றும் q-தொடர் கோட்பாட்டை உருவாக்கினார். 1807 இல் x இன் பெருக்கங்களின் சைன்கள் அல்லது கொசைன்களின் அடிப்படையில் கொடுக்கப்பட்ட x இன் செயல்பாட்டின் விரிவாக்கத்தில் ஃபோரியர் வேலை செய்யத் தொடங்கியது. பொதுத் தேற்றத்தை முதன்முதலில் வலியுறுத்தி நிரூபிக்க முயன்றவர் ஃபோரியர். ஆனால், இந்தத் தொடரின் ஒருங்கிணைப்பு பற்றிய கேள்வியை அவர் தீர்த்து வைக்கவில்லை, பின்னர் அது கச்சி (1826) மற்றும் டிரிச்லெட் (1829) ஆகியோரால் முழுமையாக அறிவியல் முறையில் முயற்சி செய்யப்பட்டது மற்றும் அதன் முன்னேற்றம் ரீமான் (1854) ஆல் செய்யப்பட்டது. தர்க்கம் என்பது நாம் பெறும் அனைத்து அறிவின் உறுதியான அடித்தளமாகும்.



- லியோஹார்ட் யூலர்

அறிமுகம்

ஒரு எளிய தனிஊசலை எடுத்துக் கொள்வோம். தனிஊசல் நகரும் போது அலைவு எண்ணிக்கையை கணக்கிடுவதற்கு வரிசை பயன்படுத்தப் படுகிறது.

முதல்வரிசையில் 30 இடங்கள், இரண்டாவதுவரிசையில் 32 இடங்கள், மூன்றாவது வரிசையில் 34 இடங்கள் மற்றும் மொத்தம் 40வரிசை இருக்கைகள் கொண்ட திரையரங்கை கருத்தில் கொள்வோம். திரையரங்கில் எத்தனை இருக்கைகள் உள்ளன?

இது போன்ற சிக்கல்களைத் தீர்க்க நாம் வரிசைகளையும் தொடர்களையும் கற்றுக் கொள்ள வேண்டும்.

இங்கே, திரையரங்கில் எத்தனை இருக்கைகள் உள்ளன என்பதை நாம் தெரிந்து கொள்ள வேண்டியது அவசியம், அதாவது நாம் பொருட்களை எண்ணி மொத்த இருக்கைகளின் எண்ணிக்கையை கண்டறியலாம். வேறுவார்த்தைகளில் கூறுவதானால், ஒவ்வொரு வரிசையிலும் நாம் அனைத்து இருக்கைகளையும் சேர்க்க வேண்டும். பொருட்களின் கூடுதல் ஒரு வரிசையாக விளங்குகிறது.

3.1 வரிசை

ஒரு வரிசை ஒரு செயல்பாடு என வரையறுக்கப்படுகிறது $a : N \rightarrow S$, டொமைன் என்பது இயற்கை எண் மற்றும் வரம்பின் தொகுப்பாகும்.

குறிப்பு: வரிசையின் வரம்பு உண்மையான எண்களின் ஏதேனும் துணை தொகுப்பாக இருந்தால், அந்த வரிசை உண்மையான வரிசை என்று அழைக்கப்படுகிறது.

$a : N \rightarrow R$ ஒரு வரிசையாக இருந்தால், ஒவ்வொரு $n \in N$ என் இன் பிம்பம், ஒரு a_n மூலம் குறிக்கப்படுகிறது. எனவே a_1, a_2, a_3 ஆகியவை 1, 2, 3 உடன் தொடர்புடைய உண்மையான எண்கள் ஆகும். அவை முறையே முதல், இரண்டாவது, மூன்றாவது வரிசை என அழைக்கப்படுகின்றன.

வரிசை $a : N \rightarrow R$ இதன் மூலம் $\langle a_n \rangle$ விரிவாக்கப்பட்ட வடிவத்தில் குறிக்கப்படும் போது $\langle a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \rangle$ என எழுதப்படுகிறது.

3.1.1 வரிசையை விவரிக்கும் முறைகள்

பின்வரும் வழிகளில் ஒரு வரிசையை விவரிக்கலாம்:

- (i) வரிசையின் முதல் சில சொற்களை எழுதுவதன் மூலம், வரிசையின் முறை தெளிவாகும் வரை.
- (ii) எடுத்துக்காட்டாக: $\langle 1, 8, 64, 125, \dots \rangle$ என்பது ஒரு வரிசையாகும், அதன் n^{th} சொல் n^3 ஆகும்.
- (iii) அதன் n^{th} காலத்திற்கு ஒரு சூத்திரத்தை வழங்குவதன் மூலம்

எடுத்துக்காட்டாக : $a_1 = 3$ அத்துடன் $a_{n+1} = 8 + a_n \forall n \in N$

$$a_1 = 3, a_2 = 8 + a_1 = 8 + 3 = 11$$

$$a_3 = 8 + a_2 = 8 + 11 = 19,$$

$$a_4 = 8 + a_3 = 8 + 19 = 27.$$

எனவே, வரிசை $\langle 3, 11, 19, 27, \dots \rangle$.

3.1.2 வரிசையின் வரம்பு தொகுப்பு

ஒரு வரிசையின் அனைத்து தனித்துவமான சொற்களின் தொகுப்பு வரம்பு என்று அழைக்கப்படுகிறது.

வரிசை $\langle a_n \rangle, \{a\}$ ஆல் குறிக்கப்பட்ட வரிசையின் வரம்பு.

உதாரணமாக : ஒரு $a_n = \langle (-1)^n \rangle$, பின்னர்

$\langle a_n \rangle = \langle -1, 1, -1, 1, \dots \rangle$ வரிசையின் வரம்பு தொகுப்பு $\{-1, 1\}$.

குறிப்புகள்

- (i) வெவ்வேறு நிலைகளில் நிகழும் வரிசையின் விதிமுறைகள் ஒரே மதிப்பைக் கொண்டிருந்தாலும் கூட தனித்துவமான சொற்களாகக் கருதப்படுகின்றன.
- (ii) வரிசையின் சொற்களின் எண்ணிக்கை எப்போதும் எல்லையற்றது, ஆனால் வரிசையின் வரம்பு வரிசையின் வரம்பு வரையறுக்கப்படலாம், ஏனெனில் இது வரிசையின் தனித்துவமான சொற்களை மட்டுமே கொண்டுள்ளது.

3.1.3 மாநிலி வரிசைமுறை

ஒரு $\langle a_n \rangle$ வரிசை, $a_n = c \forall n \in N$ ஆல் வரையறுக்கப்பட்ட ஒரு நிலையான வரிசை என்று அழைக்கப்படுகிறது.

இவ்வாறு, $\langle a_n \rangle = \langle c, c, c, \dots \rangle$ என்பது வரம்பில் ஒரு நிலையான வரிசை $= \{c\}$, ஒரு ஒற்றைத்தொகுப்பு, ஒரு வரையறுக்கப்பட்ட தொகுப்பு.

3.1.4 எல்லை வரிசை

- a. **மேலே உள்ள வரிசை :** ஒரு வரிசை $\langle a_n \rangle$ ஒரு உண்மையான எண், இருந்தால் மேலே எல்லை என்று கூறப்படுகிறது $a_n \leq K \forall n \in N$, ஒரு வரிசையின் மேல் கட்டு எனப்படும்.

உதாரணமாக : வரிசை $\langle -n \rangle = \langle -1, -2, -3, \dots \rangle$ மேலே எல்லையிடப்பட்டுள்ளது. -1 என்பது இந்த வரிசையின் மேல் எல்லையாக $a_n \leq -1 \forall n \in N$.

- b. **வரிசைக்கு கீழே எல்லை :** ஒரு வரிசை $\langle a_n \rangle$ ஒரு உண்மையான எண் இருந்தால் கீழே எல்லையாக இருக்கும் என்று கூறப்படுகிறது $a_n \leq K \forall n \in N$, ஒரு வரிசையின் கீழ்க்கட்டு எனப்படும்.

உதாரணமாக : வரிசை $\langle n \rangle = \langle 1, 2, 3, \dots \rangle$ கீழே கட்டப்பட்டுள்ளது. 1 இந்த வரிசையின் கீழ் எல்லையாக உள்ளது, இது ஒரு $a_n \leq 1 \forall n \in N$.

- c. **எல்லைக் கிரமம் :** $\langle a_n \rangle$ ஒரு வரிசை k மற்றும் K போன்ற உண்மையான எண் இருந்தால் கட்டுப்படுத்தப்படும் என்று கூறப்படுகிறது, இது $k \leq a_n \leq K \forall n \in N$.

உதாரணமாக : வரிசை $\left\langle \frac{1}{2} \right\rangle = \left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right\rangle$ மேலேயும் கீழேயும் எல்லையாக உள்ளது $0 \leq a_n \leq 1 \forall n \in N$ -ன் இருந்தால், 0 கீழ் கட்டு மற்றும் 1 இந்த வரிசையின் மேல் பிணைப்பு ஆகும்.

3.1.5 எல்லையற்ற வரிசை

ஒரு வரிசை $\langle a_n \rangle$ அது எல்லையாக இல்லாவிட்டால் எல்லையற்றது என்று கூறப்படுகிறது, அதாவது, அது மேலே அல்லது கீழே அல்லது இரண்டும் எல்லையற்றதாக உள்ளது.

- வரிசை $\langle (-1)^n \cdot n \rangle = \langle -1, 2, -3, 4, \dots \rangle$ கீழ் மற்றும் மேல் எல்லை இல்லாமல் எல்லையற்றது.
- வரிசை $\langle n \rangle = \langle 1, 2, 3, \dots \rangle$ குறைந்த கட்டுடன் ஆனால் மேலே எல்லையற்றது $\langle n \rangle$ எல்லையற்ற வரிசை

3.1.6 வரிசையின் கிழக்கு மேல் எல்லை (சுப்ரெமம்)

- $a_n \leq u \forall n \in N$, இது u வரிசையின் மேல் கட்டு $\langle a_n \rangle$
- நீங்கள் ஒரு u' என்று வேறு எந்த உண்மையான எண் $a_n \leq u' \forall n \in N$, பிறகு $u \leq u'$ அதாவது, வேறு எந்த மேல் பிணைப்பும் u விட குறைவாக இல்லை.

உதாரணமாக :

- $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1}{n} \right\rangle = \left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right\rangle$ மேலே எல்லைகள் அத்துடன் 1 மேல் கட்டு $\langle a_n \rangle$ என. $a_n \leq 1 \forall n \in N$, மேலும், $2, 3, 4, \dots \langle a_n \rangle$ மேல் கட்டுண்டவை ஆனால் 1 அவர்கள் மத்தியில் குறைந்த மேல் கட்டு உள்ளது.

1 எல்.யு.பி/சுப்ரெமம் $\langle a_n \rangle$

- $\langle a_n \rangle = \langle n \rangle = \langle 1, 2, 3, \dots \rangle$ மேலே எல்லையற்றது, எனவே எல்.யு.பி இல்லை.

- $\langle a_n \rangle = \left\langle -\frac{1}{n} \right\rangle = \left\langle 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3} \right\rangle$ மேலே எல்லைகள் மற்றும் $0 < a_n >$ ஒரு $\langle a_n \rangle \leq 0 \forall n \in N$. மேலும் $1, 2, 3, \dots$ எனவே, $\langle a_n \rangle$ மேல் எல்லை, ஆனால் 0 என்பது எல்.யு.பி $\langle a_n \rangle$.

குறிப்பு :

- ஒரு வரிசையின் எல்.யு.பி, இருக்கலாம் அல்லது இல்லாமல் இருக்கலாம்.
- ஒரு வரிசையின் எல்.யு.பி, இருந்தால், அது தனித்துவமானது.
- வரிசையின் எல்.யு.பி, வரிசைக்கு உரியதாக இருக்கலாம் அல்லது இல்லாமல் போகலாம்.

3.1.7 வரிசையின் மிகப்பெரிய கீழ் கட்டு (இன்ஃபிமம்)

ஒரு உண்மையான எண் l ஒரு வரிசையின் மிகப்பெரிய கீழ் எல்லை (ஜி.எல். பி) (அல்லது இன்ஃபிமம்) என்று அழைக்கப்படுகிறது $\langle a_n \rangle$:

- $a_n > l \forall n \in N$, இது l வரிசையின் கீழ் கட்டு $\langle a_n \rangle$
- நீங்கள் ஒரு l' என்று வேறு எந்த உண்மையான எண் $l' \leq a_n \forall n \in N$, பிறகு $l \geq l'$ அதாவது, வேறு எந்த கீழ் பிணைப்பும் l விட பெரியது இல்லை.

உதாரணமாக :

- $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1}{n} \right\rangle = \left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right\rangle$ கீழே எல்லை அத்துடன் 1 கீழ் கட்டு $\langle a_n \rangle$ எனக் $a_n \geq 0 \forall n \in N$
மேலும், $-1, -2, -3, \dots \langle a_n \rangle$ கீழே கட்டுண்டவை ஆனால் 0 அவர்களில் மிகப் பெரியவர்கள்.
0 என்பது ஜி.எல்.பி / இன்ஃபிமம் ஆகும்.
- $\langle a_n \rangle = \langle -n \rangle = \langle -1, -2, -3, \dots \rangle$ கீழே கட்டப்படாதது, எனவே ஜி.எல். பி இல்லை.
- $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{(-1)^n}{n} \right\rangle = \left\langle -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4} \right\rangle$ கீழே எல்லையிடப்பட்டுள்ளது மற்றும் -1 கீழ்க்கட்டு $\langle a_n \rangle$
ஒரு $\langle a_n \rangle \geq -1 \forall n \in N$. மேலும் $-2, -3, -4 \dots$ எனவே, $\langle a_n \rangle$ ஆனால் -1 அவர்கள் மத்தியில் மிகப் பெரியது.
 $-1 \langle a_n \rangle$ ஜி.எல். பி / இன்ஃபிமம் ஆகும்.

குறிப்பு :

- ஒரு வரிசையின் ஜி.எல். பி இருக்கலாம் அல்லது இல்லாமல் இருக்கலாம்.
- ஒரு வரிசையின் ஜி.எல். பி, இருப்பின், தனித்துவமானது.
- ஒரு வரிசையின் ஜி.எல். பி வரிசைக்கு உரியதாக இருக்கலாம் அல்லது இல்லாமல் இருக்கலாம்.

3.2 குவிதல், மாறுபட்ட மற்றும் அலைவு வரிசை

- குவிதிறவரிசை :** ஒருவரிசை $\langle a_n \rangle$ ஒரு உண்மையான எண் l ஒரு குறிப்பிட்ட $\varepsilon > 0$, அது எவ்வளவு சிறியதாக இருந்தாலும், ஒரு நேர்மறையான முழுஎண் உள்ளது (மின்பொறுத்து) அத்தகைய $|a_n - l| < \varepsilon \forall n \geq m$
உண்மையான எண் $l \langle a_n \rangle$ வரிசையின் வரம்பு என்று அழைக்கப்படுகிறது.

அல்லது

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ வரையறுக்கப்பட்ட l என்று கூறினால் ஒரு வரிசை $\langle a_n \rangle$ ஒன்று சேரும் என்று கூறப்படுகிறது.

உண்மையான எண் l வரிசையின் எல்லை என்று அழைக்கப்படுகிறது $\langle a_n \rangle$ மேலும் $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ அல்லது $a_n \rightarrow l$ என $n \rightarrow \infty$.

b. மாறுபட்டவரிசை : எந்தவரிசையும் ஒன்று சேரவில்லை என்றால் மாறுபட்டதாக இருக்கும் என்று கூறப்படுகிறது.

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ அல்லது $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$

c. அலைவுவரிசை : ஒரு வரிசை $\langle a_n \rangle$ ஒரு வரையறுக்கப்பட்ட எண்ணிற்கு ஒன்று சேரவில்லை, ∞ அல்லது $-\infty$ வேறுபடவில்லை என்றால் அது அலைவுவரிசை என்று அழைக்கப்படுகிறது.

அலைவு வரிசை இரண்டு வகைப்படும்:

a. வரையறுக்கப்பட்ட அலைவு : ஒரு வரிசை வரையறுக்கப்பட்ட ஊசலாடுகிறது என்றால்

- அது எல்லைக்குட்பட்டது
- அது ஒன்றுகூடவோ, வேறுபடவோ இல்லை.

b. எல்லையற்ற அலைவு:

- அது எல்லையற்றது
- அது ஒன்று கூடவோ அல்லது வேறுபடவோ இல்லை

உதாரணமாக :

- $\langle (-1)^n \rangle = \langle -1, 1, -1, 1, \dots \rangle$ வரையறுக்கப்பட்ட அலைவு.
- $\langle 1 + (-1)^n \rangle = \langle 0, 2, 0, 2, \dots \rangle$ வரையறுக்கப்பட்ட அலைவு.
- $\langle (-1)^n \cdot n \rangle = \langle -1, 2, -3, 4, -5, 6, \dots \rangle$ எல்லையற்ற அலைவு.
- $\langle 1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3} \rangle$ எல்லையற்ற அலைவு.

3.2.1 வரிசையின்வரம்பு

$\langle a_n \rangle$ ஒரு வரிசையானது, $n \rightarrow \infty$ போது, ஒவ்வொரு $\varepsilon > 0$ க்கு ஒரு நேர்மறையான முழுஎண் m இருந்தால் (ε பொறுத்து) l என்ற வரம்பை அணுகுவதாகக் கூறப்படுகிறது.

$|a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n \geq m$ அதாவது $a_n \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$.

குறியீட்டு ரீதியாக நாம் எழுதலாம் $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$

உதாரணமாக :

- $\langle \frac{1}{n} \rangle = \langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \rangle$ அதன் வரம்பில் 0 மட்டுமே உள்ளது.
- $\langle n^2 \rangle = \langle 1, 4, 9, \dots \rangle$ எந்த வரம்பும் இல்லை.

3.2.2 வரிசையின் எல்லை புள்ளி

ஒரு குறிப்பிட்ட $\varepsilon > 0$ மற்றும் கொடுக்கப்பட்ட நேர்மறை முழுஎண் m , ஒரு குறிப்பிட்ட எண் $\langle a_n \rangle$ ஒரு வரிசையின் வரம்பு புள்ளி என்று கூறப்படுகிறது, ஒரு நேர்மறையான முழுஎண் $K > m$ என்று $|a_k - l| < \varepsilon \forall K \geq m$ அதாவது $a_n \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$

வரம்பு மற்றும் வரம்புபுள்ளிக்கு இடையிலான வேறுபாடு:

வரம்பு மற்றும் வரம்புபுள்ளிக்கு இடையிலான முக்கிய வேறுபாடு என்னவென்றால், வரம்பு வழக்கில், இடைவெளிக்குள் இருக்கும் சொற்களின் எண்ணிக்கை $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ எல்லையற்றதாக இருக்க வேண்டும், ஆனால் இந்த இடைவெளிக்கு வெளியே இருக்கும் சொற்களின் எண்ணிக்கை வரையறுக்கப்பட்டதாக இருக்க வேண்டும்; ஆனால் வரம்புபுள்ளி வழக்கில், இடைவெளி உள்ளே இருக்கும் சொற்களின் எண்ணிக்கை $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ எல்லையற்றதாக இருக்க வேண்டும், ஆனால் இந்த இடைவெளிக்கு வெளியே இருக்கும் சொற்களின் எண்ணிக்கை வரையறுக்கப்பட்டதாகவோ அல்லது எல்லையற்றதாகவோ இருக்கலாம்.

வரிசையின் வரம்பு உண்மையான எண்களின் ஏதேனும் துணை தொகுப்பாக இருந்தால், அந்த வரிசை உண்மையான வரிசை என்று அழைக்கப்படுகிறது.

முக்கிய அவதானிப்புகள்

1. ஒரு வரிசையின் வரம்பும் வரிசையின் வரம்பு புள்ளியாகும், ஆனால் உரையாடல் உண்மை அல்ல.

எடுத்துக்காட்டாக : $\langle a_n \rangle$ ஒரு வரிசை, அங்கு $\langle a_n \rangle = (-1)^n$ வரிசை $\langle -1, 1, -1, 1, \dots \rangle$ மற்றும் $-1 \leq a_n \leq 1$.

வரிசையின்வரம்புபுள்ளி $\{-1, 1\}$ ஆனால் இந்த வரிசைக்கு வரம்பு இல்லை.

2. ஒவ்வொரு குவி வரிசைக்கும் ஒரு தனித்துவமான வரம்பு உள்ளது, எனவே தனித்துவமான வரம்புபுள்ளி உள்ளது, ஆனால் ஒரு வரிசைக்கு ஒரு தனித்துவமான வரம்புபுள்ளி இருந்தால், அது குவியாமல் இருக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக : $\langle a_n \rangle$ ஒரு வரிசை, அங்கு $\langle a_n \rangle = \langle 1, 2, 1, 3, 1, 4, \dots \rangle$ வரம்பு வரிசை 1 ஆனால் இந்த வரிசை ஒன்று சேரவில்லை.

3. ஒவ்வொரு குவிதல் வரிசையும் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது, ஆனால் உரையாடல் உண்மை அல்ல.

எடுத்துக்காட்டாக : $\langle a_n \rangle$ ஒரு வரிசை, அங்கு $\langle a_n \rangle = \langle -1, 1, -1, \dots \rangle$ மற்றும் $-1 \leq a_n \leq 1 \forall n \in \mathbb{N}$.

4. ஒரு எல்லை வரிசை ஒன்று குவிகிறது அல்லது வரையறுக்கப்படுகிறது.

5. ஒரு எல்லையற்ற வரிசை ∞ அல்லது $-\infty$ அல்லது எல்லையற்ற ஊசலாடுகிறது.

3.2.3 பூஜ்ய வரிசை

ஒரு வரிசை $\langle a_n \rangle$, 0 க்கு குவிந்தால் அது பூஜ்ய வரிசை என்று கூறப்படுகிறது. அதாவது, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

உதாரணமாக : வரிசை $\langle \frac{1}{n} \rangle, \langle \frac{1}{n^2} \rangle, \langle \frac{1}{2n} \rangle, \langle \frac{(-1)^n}{n} \rangle$ என்பது ஒரு பூஜ்ய வரிசை.

பூஜ்ய வரிசைகளின் முடிவுகள்

- ஒரு வரிசை $\langle a_n \rangle$ l - க்கு குவிகிறது என்றால் மற்றும் மட்டும் என்றால் $\langle a_n - l \rangle$ என்ற வரிசை ஒரு பூஜ்ய வரிசை.
- $\langle a_n \rangle$ ஒரு வரிசை என்றால் பின்னர் $a_n \rightarrow 0$ என்றால் மற்றும் மட்டும் என்றால் $|a_n| \rightarrow 0$.
- செல்லுபடியாகாத வரிசைகளின் தொகையும் ஒரு செல்லுபடியாகாத வரிசை $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 0$

ஏற்றத்தாழ்வுகள் மற்றும் ஒப்பீடுகள் முடிவுகள்

- ஒரு வரிசை $\langle a_n \rangle$ a -க்கு குவிகிறது $a_n \geq 0 \forall n$ பின்னர் $a \geq 0$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, மற்றும் $a_n \leq b_n \forall n$ இருந்தால், பின்னர் $a \leq b$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ மற்றும் $a_n \geq k \forall n$, இருந்தால், பின்னர் $a \geq k$.

3.2.4 வரம்புகளின் இயற்கணிதம்

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ பின்னர் $\lim_{n \rightarrow \infty} K a_n = K a$ இருந்தால், $K \in R$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ பின்னர் $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ பின்னர்,
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{a}$ வசதி செய்து கொடுக்கப்பட்ட $a_n \neq 0, \forall n$, $a \neq 0$
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$ வசதி செய்து கொடுக்கப்பட்ட $b_n \neq 0, \forall n$, $b \neq 0$

இருப்பினும், மேலே உள்ள முடிவை உரையாடுவது உண்மை அல்ல.

வ. எண்	$\langle a_n \rangle$	$\langle b_n \rangle$	$\langle a_n + b_n \rangle$
1.	குவிகிறது	∞ இதற்கு வேறுபடுகிறது	∞ இதற்கு வேறுபடுகிறது

வ. எண்	$\langle a_n \rangle$	$\langle b_n \rangle$	$\langle a_n + b_n \rangle$
2.	குவிகிறது	$-\infty$ இதற்கு வேறுபடுகிறது	$-\infty$ இதற்கு வேறுபடுகிறது
3.	∞ இதற்கு வேறுபடுகிறது	∞ இதற்கு வேறுபடுகிறது	∞ இதற்கு வேறுபடுகிறது
4.	$-\infty$ இதற்கு வேறுபடுகிறது	$-\infty$ இதற்கு வேறுபடுகிறது	$-\infty$ இதற்கு வேறுபடுகிறது

வ. எண்	$\langle a_n \rangle$	$\langle b_n \rangle$	$\langle a_n + b_n \rangle$
1.	∞ இதற்கு வேறுபடுகிறது	∞ இதற்கு வேறுபடுகிறது	∞ இதற்கு வேறுபடுகிறது
2.	∞ இதற்கு வேறுபடுகிறது	$-\infty$ இதற்கு வேறுபடுகிறது	$-\infty$ இதற்கு வேறுபடுகிறது

சில தீர்க்கப்பட்ட உதாரணங்கள்

எடுத்துக்காட்டு 3.1 : பின்வரும் வரிசையின் எல்லைத் தன்மை பற்றி விவாதிக்கவும் $\langle a_n \rangle$ ஒரு வரிசை கொடுக்கப்பட்ட இடத்தில்

$$\text{i. } a_n = 5 \quad \text{ii. } a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2}$$

தீர்வு : i. இங்கே $a_n = 5$ என்பது ஒரு நிலையான வரிசை அதாவது, $\langle a_n \rangle = \langle 5, 5, 5, \dots \rangle$

தெளிவாக, $5 < a_n \leq 5 \quad \forall n \in N$

இவ்வாறு, வரிசை எல்லையானது.

$$\text{ii. } a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2}$$

$$< \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \quad \left\{ \because n^2 \langle (n+1)^2 \cdot \frac{1}{n^2} \rangle \frac{1}{(n+1)^2} \right\}$$

$$= \frac{n+1}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \leq 1 + 1 = 2 \quad \forall n \in N$$

கூட, $a_n > 0 \quad \forall n$

இப்படி, $0 < a_n < 2 \quad \forall n \in N$

எனவே, வரிசை $\langle a_n \rangle$ எல்லைகள்.

எடுத்துக்காட்டு 3.2 : கொடுக்கப்பட்ட வரிசைக்கு, பின்வரும் பண்புகளை விவாதிக்கவும்:

பிணைப்பு, *l.u.b.*, *g.l.b.*, வரம்பு புள்ளிகள், ஒருங்கிணைப்பு, விலகல், ஊசலாட்டம் அல்லது வரம்பற்ற ஊசலாட்டம்.

$$\text{i. } a_n = 1 + (-1)^n$$

$$\text{ii. } a_n = \text{குறைந்த பட்ச பிரிப்பான் } n_2, n \geq 2,$$

தீர்வு :

$$(i) \quad a_n = 1 + (-1)^n = \begin{cases} 2, & n \text{ is even} \\ 0, & n \text{ is odd} \end{cases}$$

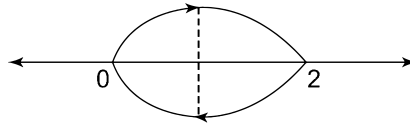
$$\langle a_n \rangle = \langle 0, 2, 0, 2, 0, \dots \rangle$$

தெளிவாக $0 \leq a_n \leq 2 \quad \forall n \in N$

எனவே, வரிசை வரம்பைக் கட்டுப்படுத்தவும் $= \{0, 2\}$

இவ்வாறு வரிசை வரையறுக்கப்பட்டு $l.u.b = 2$ மற்றும் $g.l.b = 0$

கொடுக்கப்பட்ட வரிசை ஒரு புள்ளியாக ஒன்றிணைவதில்லை மாறாக இந்த வரிசை வரையறுக்காமல் ஊசலாடுகிறது.



படம் 3.4

வரிசை 0 மற்றும் 2 க்கு இடையில் ஊசலாடுகிறது.

$$(ii) \quad a_n = \text{குறைந்த பட்ச பிரிப்பான் } n_2, \quad n \geq 2, \text{ எனவே, வரிசை}$$

$$\langle a_n \rangle = \langle 2, 3, 2, 5, 2, \dots \rangle$$

தெளிவாக, $2 < a_n \quad \forall n \in N$

ஆனால் அது போன்ற K எதுவும் இல்லை $a_n < K \quad \forall n \in N$

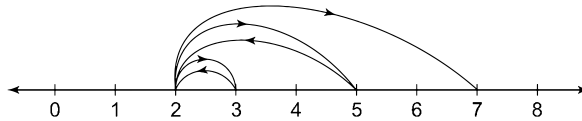
இவ்வாறு, $\langle a_n \rangle$ கீழே வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது மற்றும் மேலே $l.u.b$ உடன் வரம்பற்றது = இல்லை

$$g.l.b. = 2$$

வரிசையின் வரம்பு வரம்பு $\langle a_n \rangle = \{2, 3, 5, \dots\}$ அதாவது, $\{p; p \text{ என்பது முதன்மையானது}\}$

இந்த வரிசை ஒரு வரம்பிற்குள் ஒன்றிணைவதில்லை மற்றும் அது ஊசலாட்டமாக இருந்தாலும் $\pm \infty$ -க்கு வேறுபடவில்லை

எல்லையற்றது.



படம் 3.2

எடுத்துக்காட்டு 3.3 : வரையறையின்படி,

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+7}{4n+8} = \frac{3}{4}$$

$$(ii) \quad \langle n \rangle \infty \text{ வேறுபடுகிறது}$$

தீர்வு : (i) கருதுங்கள் $a_n = \frac{3n+7}{4n+8}$

$\varepsilon > 0$ -க்கு உண்மையான எண் கொடுக்கப்பட்டதும்

இப்போது,

$$\left| a_n - \frac{3}{4} \right| = \left| \frac{3n+7}{4n+8} - \frac{3}{4} \right|$$

$$= \left| \frac{12n+28-12n-24}{4(4n+8)} \right|$$

$$\left| a_n - \frac{3}{4} \right| = \frac{1}{4n+8} < \frac{1}{4n}$$

$$\therefore \left| a_n - \frac{3}{4} \right| < \varepsilon \text{ என்றால் } \frac{1}{4n} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| a_n - \frac{3}{4} \right| < \varepsilon \text{ என்றால் } n > \frac{1}{4n \varepsilon}$$

$$\Rightarrow \left| a_n - \frac{3}{4} \right| < \varepsilon \text{ என்றால் } n > m$$

$$m \text{ என்பது நேர்மறை முழு எண் } > \frac{1}{4n \varepsilon}$$

$$\Rightarrow \left| a_n - \frac{3}{4} \right| < \varepsilon \quad \forall n \geq m$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{4}$$

இவ்வாறு, வரிசை $a_n = \frac{3n+7}{4n+8}$ இணைகிறது $\frac{3}{4}$

மாற்று முறை :

$$\text{கொடுக்கப்பட்டது, } a_n = \frac{3n+7}{4n+8}$$

எண் மற்றும் வகுப்பை n ஆல் வகுத்தல்

$$a_n = \frac{3 + \frac{7}{n}}{4 + \frac{1}{n}}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty}$ எடுத்து இருபுறமும், நாம் பெறுகிறோம்

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{7}{n}}{4 + \frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+7}{4n+8} = \frac{3}{4}$$

இவ்வாறு, வரிசை $a_n = \frac{3n+7}{4n+8}$ இணைகிறது $\frac{3}{4}$

(ii) கொடுக்கப்பட்ட எண்ணாக $a_n = n$ மற்றும் $k > 0$ இருக்கட்டும்.

இப்போது $a_n > k$ என்றால் $n > k$

$a_n > k$ என்றால் $n \geq m$, m என்பது குறைந்தபட்ச நேர்மறை முழு எண் $> k$

$$a_n > k \quad \forall n \geq m$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

$\therefore \langle a_n \rangle = \langle n \rangle$ ∞ -க்கு வேறுபடுகிறது

மாற்று முறை :

$$\langle a_n \rangle = \langle n \rangle = \langle 1, 2, 3, 4, \dots \rangle$$

தெளிவாக, இந்த வரிசை கீழே வரம்பிடப்பட்டுள்ளது மற்றும் மேலே வரம்பற்றது.

அது போன்ற எந்த $k \in R$ இல்லை அத்தகைய ஒரு $a_n \leq k \quad \forall n \in N$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

$\therefore \langle a_n \rangle = \langle n \rangle$ ∞ -க்கு வேறுபடுகிறது

எடுத்துக்காட்டு 3.4 : $\langle a_n \rangle$ மற்றும் $\langle b_n \rangle$ போன்ற வரிசைகளுக்கு எடுத்துக்காட்டுகள் கொடுங்கள்

(i) $\langle a_n \rangle \rightarrow \infty$ $\langle b_n \rangle \rightarrow -\infty$ ஆனால் $\langle a_n + b_n \rangle$ ஒன்றுசேர்கிறது.

(ii) $\langle a_n \rangle \rightarrow \infty$ $\langle b_n \rangle \rightarrow -\infty$ ஆனால் $\langle a_n + b_n \rangle$ வரையறுக்கப்பட்ட அலைவுகள்.

(iii) $\langle a_n \rangle$ ஒன்றுசேர்கிறது மற்றும் $\langle b_n \rangle \rightarrow \infty$ ஆனால் $\langle a_n \cdot b_n \rangle$ -க்கு வேறுபடுகிறது.

(iv) $\langle a_n \rangle$ ஒன்றுசேர்கிறது மற்றும் $\langle b_n \rangle \rightarrow \infty$ ஆனால் $\langle a_n \cdot b_n \rangle$ வரையறுக்கப்பட்ட அலைவுகள்

(v) $\langle a_n - b_n \rangle$ ஒன்றுசேர்கிறது ஆனால் $\langle a_n \rangle$ மற்றும் $\langle b_n \rangle$ இரண்டும் ஒன்றுசேரவில்லை.

தீர்வு : (i) $a_n = n^2$ என்பது மற்றும் $b_n = n^2 \quad \forall n$

$$\therefore \langle a_n \rangle \rightarrow \infty \text{ மற்றும் } \langle b_n \rangle \rightarrow -\infty$$

$$\text{இந்தச்சமயம், } a_n + b_n = n^2 - n^2 = 0 \quad \forall n$$

$$\Rightarrow \langle a_n + b_n \rangle \rightarrow 0$$

இவ்வாறு வரிசை $\langle a_n + b_n \rangle$, 0 ஆக குவிகிறது.

(ii) மற்றும் $= \begin{cases} -n, & n \text{ ஒற்றைப்படை} \\ -n+1, & n \text{ இரட்டைப்படை} \end{cases}$ ஆகியவை

$$\langle a_n \rangle = \langle 1, 2, 3, 4, \dots \rangle \rightarrow \infty$$

மற்றும் $\langle b_n \rangle = \langle 1, 2, 3, 4, \dots \rangle \rightarrow -\infty$

இப்போது, $\langle a_n + b_n \rangle = \langle 1, 0, 1, 0, 1, \dots \rangle$ இரண்டு வரம்பு புள்ளிகள் $\{1, 0\}$ மற்றும் 0 மற்றும் 1 இடையே வரையறுக்கப்பட்ட ஊசலாடுகிறது.

(iii) $a_n = -1$ மற்றும் $b_n = -n \forall n$

$\langle a_n \rangle$ ஒரு நிலையான வரிசை மற்றும் -1-க்கு குவிகிறது

$$\begin{aligned} \langle b_n \rangle &= \langle -n \rangle \\ &= \langle 1, 2, 3, 4, \dots \rangle \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

இந்தச் சமயம், $a_n \cdot b_n = (-1)(-n) = n$

$\Rightarrow \langle a_n \cdot b_n \rangle = \langle n \rangle \rightarrow \infty$

இவ்வாறு $\langle a_n \cdot b_n \rangle$ வரிசை ∞ -க்கு வேறுபடுகிறது.

(iv) அனுமதிக்க

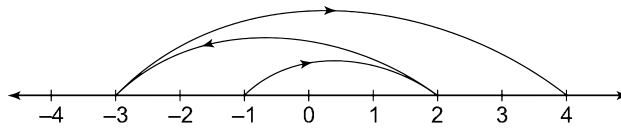
$$a_n = \frac{(-1)^n}{n},$$

$$b_n = n^2 \forall n$$

$$\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{(-1)^n}{n} \right\rangle \rightarrow 0 \text{ மற்றும் } \langle a_n \rangle = \langle n^2 \rangle \rightarrow \infty$$

இப்போது, $a_n \cdot b_n = \frac{(-1)^n}{n} \cdot n^2 = (-1)^n \cdot n$

$\Rightarrow \langle a_n \cdot b_n \rangle = \langle (-1)^n \cdot n \rangle$
 $= \langle -1, 2, -3, 4, -5 \rangle$



படம் 3.3

இவ்வாறு, $\langle a_n \cdot b_n \rangle$ எல்லையற்றது மற்றும் எண்ணற்ற ஊசலாடுகிறது.

(v) அனுமதிக்க $a_n = n$

மற்றும் $b_n = n \forall n$

$\therefore a_n \cdot b_n = n \forall n$

$\langle a_n - b_n \rangle$ குவிப்பு மற்றும் 0-க்கு இணைகிறது. ஆனால் $\langle a_n \rangle$ அல்லது $\langle b_n \rangle$ ஒன்றிணைவதில்லை

எடுத்துக்காட்டு 3.5 : ஒரு வரிசைக்கு ஒரு உதாரணம் கொடுங்கள்

(i) இது வரையறுக்கப்பட்ட மற்றும் ஊசலாடுகிறது.

(ii) வரம்பு இல்லை.

தீர்வு : (i) $\langle a_n \rangle$ வரிசையை கருத்தில் கொள்ளுங்கள் இங்கே $a_n = (-1)^n$

$$\langle a_n \rangle = \langle -1, 1, -1, 1, \dots \rangle$$

$$\Rightarrow -1 \leq a_n \leq 1 \quad \forall n \in N$$

$\langle a_n \rangle$ ஆனது -1 மற்றும் 1 -க்கு இடையில் ஊசலாடுகிறது

(ii) $\langle a_n \rangle$ வரிசையை கருத்தில் கொள்ளுங்கள் இங்கே $a_n = n$

$$\langle a_n \rangle = \langle 1, 2, 3, 4, \dots \rangle$$

வரிசை $\langle n \rangle$, ∞ -க்கு வேறுபடுகிறது மற்றும் வரம்பு புள்ளி இல்லை.

பயிற்சி 3.1

1. பின்வரும் வரிசைகளின் வரம்பை விவாதிக்கவும் $\langle a_n \rangle$ எங்கே

(i) $a_n = C$ (எந்த மாறிலி)

(ii) $a_n = (-1)^n$

(iii) $a_n = n^2$

(iv) $a_n = \frac{n}{n^2 + 1}$

(v) $a_n = n^{\text{th}}$ முதன்மை எண்

2. கொடுக்கப்பட்ட காட்சிகளுக்கு, பின்வரும் பண்புகளை விவாதிக்கவும்: எல்லை, l.u.b., g.l.b., வரம்பு புள்ளிகள், ஒன்றிணைதல், வேறுபாடு, முடிவாக அல்லது எண்ணற்ற ஊசலாட்டம்

(i) $a_n = \frac{1}{2^n}$

(ii) $a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$

(iii) $a_n = -n^2$

(iv) $a_n = \frac{-1}{2n + 1}$

(v) $a_n = \langle 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5 \dots \rangle$

(vi) $a_n = (214)^n$

(vii) $a_n = \begin{cases} 0, & \text{என்றால் } n = 1 \text{ அல்லது முதன்மை எண்} \\ n, & \text{என்றால் } n \text{ கலப்பு} \end{cases}$

(viii) $a_n = \begin{cases} 3, & \text{என்றால் } n \text{ ஒற்றைப்படை எண்} \\ 1/n, & \text{என்றால் } n \text{ இரட்டைப்படை எண்} \end{cases}$

3. வரையறையின் படி, நிரூபிக்க

- (i) வரிசை $\left\langle \frac{1}{3n} \right\rangle$ 0-க்கு குவியும் (ii) வரிசை $\left\langle \frac{n^2 + 11}{2n^2 + 5} \right\rangle \frac{1}{3}$ - க்கு குவியும்
- (iii) வரிசை $\langle -n^2 \rangle$ ∞ -க்கு விரியும் (iv) வரிசை $\left\langle \frac{2n + 3}{3n + 4} \right\rangle \frac{2}{3}$ - க்கு குவியும்
- (v) வரிசை $\langle n^2 \rangle$ ∞ -க்கு விரியும்

4. வரையறையின் படி, நிரூபிக்க

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{3n^2 + 2} = \frac{1}{3}$ (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + 2\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = 2$
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n - 1}{4n + 5} = \frac{3}{4}$ (iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 1}{n} = 1$
- (v) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n + 5}{2n^2 + 5n + 7} = \frac{1}{2}$

5. பின்வரும் கட்டுப்பாடுகளுக்கு வரிசைகள் $\langle a_n \rangle$ மற்றும் $\langle b_n \rangle$ -ன் எடுத்துக்காட்டுகளை கூறவும்

- (i) $\langle a_n \rangle \rightarrow \infty, \langle b_n \rangle \rightarrow -\infty$ ஆனால் $\langle a_n + b_n \rangle$ ∞ -க்கு விரியும்.
- (ii) $\langle a_n \rangle \rightarrow \infty, \langle b_n \rangle \rightarrow -\infty$ ஆனால் $\langle a_n + b_n \rangle$ ∞ -க்கு விரியும்.
- (iii) $\langle a_n \rangle \rightarrow \infty, \langle b_n \rangle \rightarrow -\infty$ ஆனால் $\langle a_n + b_n \rangle$ எல்லையற்ற அலைவு.
- (iv) $\langle a_n \rangle$ குவிகிறது மற்றும் $\langle b_n \rangle \rightarrow \infty$ ஆனால் $\langle a_n \cdot b_n \rangle$ குவிகிறது.
- (v) $\langle a_n \rangle$ குவிகிறது மற்றும் $\langle b_n \rangle \rightarrow \infty$ ஆனால் $\langle a_n \cdot b_n \rangle$ ∞ -க்கு விரியும்
- (vi) $\langle a_n \rangle$ குவிகிறது மற்றும் $\langle b_n \rangle \rightarrow \infty$ ஆனால் $\langle a_n \cdot b_n \rangle$ வரையறுக்கப்பட்ட அலைவு.
- (vii) $\langle a_n \rangle$ குவிகிறது மற்றும் $\langle b_n \rangle \rightarrow -\infty$ ஆனால் $\langle a_n \cdot b_n \rangle$ எல்லையற்ற அலைவு.
- (viii) $\langle a_n \rangle$ குவிகிறது மற்றும் $\langle b_n \rangle \rightarrow -\infty$ ஆனால் $\langle a_n \cdot b_n \rangle$ குவிகிறது.
- (ix) $\langle a_n \rangle$ குவிகிறது மற்றும் $\langle b_n \rangle$ மற்றும் $\langle a_n \cdot b_n \rangle$ வரையறுக்கப்பட்ட அலைவு.
- (x) $\langle a_n \cdot b_n \rangle$ குவிகிறது மற்றும் $\langle a_n \rangle$ மற்றும் $\langle b_n \rangle$ குவிகிறது.
- (xi) $\left\langle \frac{a_n}{b_n} \right\rangle$ குவிகிறது மற்றும் $\langle a_n \rangle$ மற்றும் $\langle b_n \rangle$ குவியாது.

6. பின்வரும் கட்டுப்பாடுகளுடன் கூடிய வரிசைகளின் உதாரணத்தை கூறுக

- (i) வரம்பற்றது மற்றும் எல்லையற்ற அலைவு
- (ii) இரண்டு எல்லை புள்ளிகள் கொண்டது

7. (i) $\left\langle \frac{\sin n \frac{\pi}{3}}{\sqrt{n}} \right\rangle$ பூச்சிய வரிசை என நிரூபிக்க

(ii) $\left\langle \frac{n!}{n^n} \right\rangle$ பூச்சிய வரிசை என நிரூபிக்க

குறிப்பு : ஏற்றத்தாழ்வுகள் மற்றும் ஒப்பீட்டின் விளைவாக பயன்படுத்தவும்

$$a_n = \frac{n!}{n^n}, b_n = \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow |a_n| < |b_n| \quad \forall n$$

விடைகள்

1. (i) வரம்புடையது (ii) வரம்புடையது (iii) வரம்பற்றது (iv) வரம்புடையது
(v) வரம்பற்றது
2. (i) வரம்புடையது, l.u.b. = 1/2, g.l.b. = 0, எல்லை புள்ளி = {0}, 0-க்கு குவியும்.
(ii) வரம்புடையது, l.u.b. = 3/2, g.l.b. = -2, எல்லை புள்ளி = {-1, 1}, எல்லையற்ற அலைவு.
(iii) வரம்பற்றது, l.u.b. = -1, g.l.b. = இல்லை, எல்லை புள்ளி இல்லை, $-\infty$ -க்கு விரியும்.
(iv) வரம்புடையது, l.u.b. = 0, g.l.b. = -1/3, எல்லை புள்ளி = {0}, 0-க்கு குவியும்.
(v) வரம்பற்றது, l.u.b. = இல்லை, g.l.b. = 1, எல்லை புள்ளி = $\{n, n \in \mathbb{N}\}$, எல்லையற்ற அலைவு.
(vi) வரம்புடையது, l.u.b. = 6, g.l.b. = 4, எல்லை புள்ளி = {4, 6}, வரையறுக்கப்பட்ட அலைவு.
(vii) வரம்புடையது, l.u.b. = இல்லை, g.l.b. = 0, எல்லை புள்ளி = {0}, எல்லையற்ற அலைவு.
(viii) வரம்புடையது, l.u.b. = 3, g.l.b. = 0, எல்லை புள்ளி = {0, 3}, எல்லையற்ற அலைவு.
5. (i) $a_n = 2n, b_n = -1$ (ii) $a_n = n, b_n = -2n$
(iii) $b_n = -n, a_n = \begin{cases} n^2, & n \text{ is odd} \\ n+1, & n \text{ is even} \end{cases}$ (iv) $a_n = \frac{1}{n^2}, b_n = n$
(v) $a_n = -\frac{1}{n}, b_n = n^2$ (vi) $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}, b_n = n$
(vii) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}, b_n = -n^2$ (viii) $a_n = \frac{1}{n^2}, b_n = -n$
(ix) $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}, b_n = -n$ (x) $a_n = b_n = (-1)^n$
(xi) $a_n = b_n = n$
6. (i) $\langle (-1)^n \cdot n \rangle$ (ii) $\langle (-1)^n \rangle$

3.2.5 ஒத்திசைவு வரிசை

ஒரு வரிசையானது ஒத்திசைவு வரிசை என அழைக்கப்பட அது இயல்பாக அதிகரிக்கவோ அல்லது குறையவோ நிகழ்ந்தால் அது ஒத்திசைவு வரிசை எனப்படும்.

- (a) ஒரு வரிசை $\langle a_n \rangle$ ஆனது ஒத்திசைவாக அதிகரிக்கும் வரிசை என அழைக்கப்படவேண்டும் எனில் $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \dots$ என்ற கட்டுப்பாட்டினை பூர்த்தி செய்ய

வேண்டும்.

- (b) ஒரு வரிசை $\langle a_n \rangle$ ஆனது ஒத்திசைவாக குறையும் வரிசை என அழைக்கப்படவேண்டும் எனில் $a_{n+1} \leq a_n \forall n \in N, a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \dots$ என்ற கட்டுப்பாட்டினை பூர்த்தி செய்ய வேண்டும்.
- (c) ஒரு வரிசை $\langle a_n \rangle$ ஆனது கண்டிப்பான ஒத்திசைவு அதிகரிக்கும் வரிசை என அழைக்கப்படவேண்டும் எனில் $a_{n+1} > a_n \forall n \in N$ என்ற கட்டுப்பாட்டினை பூர்த்தி செய்ய வேண்டும்.
- (d) ஒரு வரிசை $\langle a_n \rangle$ ஆனது கண்டிப்பான ஒத்திசைவு குறையும் வரிசை என அழைக்கப்படவேண்டும் எனில் $a_{n+1} < a_n \forall n \in N$ என்ற கட்டுப்பாட்டினை பூர்த்தி செய்ய வேண்டும்.

உதாரணமாக :

1. வரிசை $\langle 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4 \dots \rangle$, ஒத்திசைவாக அதிகரிக்கும் வரிசை.
2. வரிசைகள் $\langle n \rangle, \langle n^2 \rangle, \langle n^3 \rangle$ கண்டிப்பான ஒத்திசைவு அதிகரிக்கும் வரிசைகள்.
3. வரிசை $\langle 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \dots \rangle$ ஒத்திசைவாக குறையும் வரிசை.
4. வரிசை $\langle \frac{1}{n} \rangle, \langle \frac{1}{n^2} \rangle$, கண்டிப்பான ஒத்திசைவாக குறையும் வரிசை.

ஒத்திசைவு வரிசையின் முடிவுகள்

1. எல்லா ஒத்திசைவாக அதிகரிக்கும் வரிசையானது அதன் வரம்பிற்கு மேல் தத்தமது l.u.b - க்கு குவியும்.
2. எல்லா ஒத்திசைவாக குறையும் வரிசையானது அதன் வரம்பிற்கு கீழ் தத்தமது g.l.b - க்கு குவியும்.
3. எல்லா வரம்புள்ள ஒத்திசைவு வரிசையானது குவியும்.
4. தத்தமது வரம்பற்ற எல்லா ஒத்திசைவாக அதிகரிக்கும் வரிசையானது ∞ க்கு விரியும்
5. தத்தமது வரம்பற்ற எல்லா ஒத்திசைவாக குறையும் வரிசையானது $-\infty$ க்கு விரியும்
6. எல்லா ஒத்திசைவு வரிசையும் குவியவோ அல்லது விரியவோ செய்யும். அதாவது ஒத்திசைவு வரிசை எப்போதும் அலையாது

சில தீர்க்கப்பட்ட உதாரணங்கள்

எடுத்துக்காட்டு 3.6 : கொடுக்கப்பட்ட வரிசையின் n^{th} உறுப்பு $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}$

தீர்வு : $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2^{n+1}} > 0 \quad \forall n$$

$a_{n+1} > a_n$ n -ன் எல்லா மதிப்புக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.7 : ஒரு வரிசை $\langle a_n \rangle$, $a_{n+1} = \sqrt{3a_n}$, $a_1 = 1$ என வரையறுக்கப்பட்டால் 3-க்கு குவிகிறது என நிரூபிக்க.

தீர்வு : ஒரு வரிசை $\langle a_n \rangle$ விரிவாக்கம் $\langle 1, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3} \dots \rangle$ கணித தூண்டலின் கொள்கையைப் பயன்படுத்துவதன் மூலம், $\langle a_n \rangle$ வரிசை ஒத்திசைவாக அதிகரித்து மேலே வரம்பிடப்பட்டுள்ளது என்பதை நாம் நிரூபிப்போம்.

$$\text{தற்பொழுது, } \sqrt{3} > 1 \Rightarrow a_2 > a_1$$

கணித தூண்டல் கருதுகோளாக கருதுங்கள் $a_n > a_{n+1}$

$$\Rightarrow \sqrt{3a_n} > \sqrt{3a_{n-1}}$$

$$\Rightarrow a_{n+1} > a_n$$

$\Rightarrow \langle a_n \rangle$ கணித தூண்டல் கொள்கையால் ஒத்திசைவாக அதிகரித்து வருகிறது.

$$\text{தற்பொழுது, } a_1 = 1 < 3$$

தூண்டல் கொள்கை மூலம் $a_n < 3$ கருதுக

$$\Rightarrow \sqrt{3a_n} > \sqrt{3 \cdot 3}$$

$$\Rightarrow a_{n+1} < 3$$

$\Rightarrow \langle a_n \rangle$ கணித தூண்டலின் கொள்கையால் மேலே வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது, எனவே வரிசை $\langle a_n \rangle$ குவிகிறது

$$\text{மற்றும் } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$$

$$\text{தற்பொழுது, } \sqrt{3a_n} = a_{n+1}$$

$$\Rightarrow a_{n+1}^2 = 3a_n$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}^2 = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\text{அல்லது } I^2 = 3I$$

$$\text{அல்லது } I(I - 3) = 0$$

$$I = 0, 3$$

$\langle a_n \rangle$ வரிசை ஒத்திசைவாக அதிகரிக்கிறது மற்றும் $a_1 = 1$, $a_n > a_1 \quad \forall n$

$$\Rightarrow a_n > 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq 1$$

$$\Rightarrow I \geq 1$$

$$\therefore I \neq 0 \text{ மற்றும் } I = 3$$

$\langle a_n \rangle$ வரிசை $\langle a_n \rangle$ 3-க்கு குவிகிறது.

பயிற்சி 3.2

1. ஒரு வரிசை $\langle a_n \rangle$ எனும்போது $a_{n+1} = \frac{3 + 2a_n}{2 + a_n}$, $a_1 = 1$ குவிகிறது என நிரூபிக்க.. அதன் எல்லை கண்டுபிடிக்க.

2. ஒரு வரிசை $\langle a_n \rangle$ எனும்போது $a_1 = \sqrt{2}$ மற்றும் $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$, 2-க்கு குவிகிறது என நிரூபிக்க.

3. (i) ஒரு வரிசை $\langle a_n \rangle$ எனும்போது $a_1 = 1$ மற்றும் $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$, 2-க்கு குவிகிறது.

(ii) ஒரு வரிசை $\langle a_n \rangle$ எனும்போது $a_{n+1} = \sqrt{7a_n}$, $a_n = 1$, 7-க்கு குவிகிறது.

4. ஒரு வரிசை $\langle a_n \rangle$ எனும்போது குவிகிறதா என விவாதிக்க.

$$(i) a_n = \frac{2n-7}{3n+2} \quad (ii) a_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}$$

விடைகள்

1. $\sqrt{3}$

3.2.6 ஸ்க்யூஸ் தத்துவம் (Squeeze Principle)

கூற்று : $\langle a_n \rangle$, $\langle b_n \rangle$, மற்றும் $\langle c_n \rangle$ மூன்று வரிசைகள் எனில்

i $a_n \leq c_n \leq b_n$ n -ன் எல்லா மதிப்புக்கும்

ii $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l$, எனில் $\langle c_n \rangle$ -ம் l -க்கு குவிகிறது $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = l$

3.2.7 காஷியின் முதல் தேற்றம் (Cauchy's First Theorem on limit)

ஒரு வரிசை $\langle a_n \rangle$ l -க்கு குவிகிறது எனில் $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ மற்றும் $b_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ எனவே வரிசை $\langle b_n \rangle$ ம் ' a ' க்கு குவிகிறது.

கருத்துக்கள் : காஷியின் முதல் தேற்றத்தின் மறுதலை உண்மையல்ல.

எடுத்துக்காட்டு : இங்கு $a_n = (-1)^n$, $b_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \begin{cases} 0, & n \text{ இரட்டைப்படை} \\ -\frac{1}{n}, & n \text{ ஒற்றைப்படை} \end{cases}$$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \Rightarrow \langle b_n \rangle$ குவிகிறது.

ஆனால் $\langle a_n \rangle$ குவியவில்லை.

துணை தேற்றம் : $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > 0$ எனில் $a_n \geq 0$ n

$\langle a_n \rangle$ என்பது ஒரு நேர்மறை உறுப்புகள் கொண்ட வரிசை எனில் $a > 0$ -ல் குவிகிறது மற்றும் $\langle a_n \rangle = (a_1 a_2 \dots a_n)^{1/n}$, எனில் $\langle b_n \rangle$ a -ல் குவிகிறது.

3.2.8 காஷியின் இரண்டாம் தேற்றம் (Cauchy's Second Theorem on limit)

கூற்று : $\langle a_n \rangle$ என்பது ஒரு நேர்மறை உறுப்புகள் கொண்ட வரிசை மற்றும் $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle a_n \rangle^{\frac{1}{n}}$ மற்றும் $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 1}{a_n}$ இரண்டும் இறுதியாக உள்ளன அல்லது முடிவில்லாமல், பின்னர்

சில முக்கிய முடிவுகள்

- $\langle a_n \rangle$ என்பது ஒரு வரிசை என்க $a_n \neq 0$ $n \in N$ மற்றும் $\frac{a_n + 1}{a_n} \rightarrow l$, $|l| < 1$, எனில் $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
- $\langle x_n \rangle$ மற்றும் $\langle y_n \rangle$ இரு வரிசைகள் நிபந்தனையை நிறைவு செய்யும் என்க
 - y_n அதை போல $\langle y_n \rangle$ ஒத்திசைவாக அதிகரிக்கிறது மற்றும் $n \rightarrow \infty$ எனும்போது $y_n \rightarrow \infty$
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = l$ எனில் $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = l$

குறிப்பு : [(b) ஸ்டால்ஸ் தேற்றம் ஆகும்]

சில தீர்க்கப்பட்ட உதாரணங்கள்

எடுத்துக்காட்டு 3.8 : ஸ்க்யூஸ் தத்துவத்தை பயன்படுத்தி நிரூபிக்க:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right] = 1$$

தீர்வு : இங்கு $a = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}$

$$\begin{aligned} &\geq \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \end{aligned} \quad \dots(1)$$

மீண்டும், $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}$

$$\begin{aligned} &\geq \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} \end{aligned} \quad \dots(2)$$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து, நமக்கு கிடைப்பது

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \leq a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}$$

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = 1$, ஸ்க்யூஸ் தத்துவத்தின் படி,

எனவே, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right] = 1$

எடுத்துக்காட்டு 3.9 : $a_n = \frac{n!}{n^n}$ எனும்போது, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

தீர்வு : இங்கு, $a_n = \frac{n!}{n^n}$, $a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)^{(n+1)}}{(n+1)!} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{e} < 1 \quad [\because e = 2.718 \text{ approx.}]$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 3.10 : காஷியின் முதல் தேற்றத்தினை பயன்படுத்தி, அதன் எல்லையின் மீது நிரூபிக்க:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) = 0$$

தீர்வு : இங்கு, $a_n = \frac{1}{n}$ எனும் போது, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

காஷியின் முதல் தேற்றத்தின் படி,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 3.11 : காஷியின் இரண்டாம் தேற்றத்தினை பயன்படுத்தி, அதன் எல்லையின் மீது நிரூபிக்க :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{2}{1} \right)^1 \left(\frac{3}{2} \right)^2 \left(\frac{4}{3} \right)^3 \dots \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \right]^{1/n} = e$$

தீர்வு : இங்கு,

$$a_n = \left(\frac{2}{1} \right)^1 \left(\frac{3}{2} \right)^2 \left(\frac{4}{3} \right)^3 \dots \left(\frac{n+1}{n} \right)^n$$

எனும் போது,

$$a_{n+1} = \left(\frac{2}{1} \right)^1 \left(\frac{3}{2} \right)^2 \left(\frac{4}{3} \right)^3 \dots \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+1}$$

மற்றும்

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} = e$$

காஷியின் இரண்டாம் தேற்றத்தின் படி, அதன் எல்லையின் மேல்

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = e$$

$$\text{அதாவது, } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{2}{1} \right)^1 \left(\frac{3}{2} \right)^2 \left(\frac{4}{3} \right)^3 \dots \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \right]^{1/n} = e$$

எடுத்துக்காட்டு 3.12 : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 2$ என நிரூபிக்க.

தீர்வு : [குறிப்பு: ஸடால்ஸ் தேற்றம் முடிவு (b)-யை பயன்படுத்துக]

எடுத்துக்காட்டு 3.13 : மதிப்பிடுக : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)^{-n} = e$

$$\text{தீர்வு : இங்கு, } y = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)^{-n} = e$$

இருபுறமும் மடக்கை எடுத்தால்

$$\begin{aligned} \log y &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left[\left(1 - \frac{1}{n^2} \right)^{-n} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left[-n \log \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \right] \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left[-n \left(-\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n^4} - \frac{1}{3n^6} \dots \right) \right]$$

அல்லது
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^3} + \frac{1}{3n^5} \dots \right] = 0$$

$\Rightarrow y = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)^{-n} = 1$

எடுத்துக்காட்டு 3.14 : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^n}{n!} \right)^n = e$ என நிரூபிக்க.

தீர்வு : இங்கு, $a_n = \left(\frac{n^n}{n!} \right)$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

தற்போது,
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n}$$

$$= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1) \cdot n^n}$$

$$= \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$

இங்கு (a_n) ஒரு வரிசையின் நேர்மறை உறுப்பு எனில்

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = e$$

காவதியின் இரண்டாம் தேற்றத்தின் படி,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = e$$

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = e$

i.e.,
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^n}{n!} \right)^{\frac{1}{n}} = e$$

பயிற்சி 3.3

1. ஸ்க்யூஸ் தத்துவத்தை பயன்படுத்தி நிரூபிக்க:

i.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \right] = 0$$

$$\text{ii. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right] = \infty$$

$$\text{iii. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+n)^2} \right] = 0$$

$$\text{iv. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \dots + \frac{1}{n^2+n} \right] = \frac{1}{2}$$

2. காஷியின் முதல் தேற்றத்தினை பயன்படுத்தி அதன் எல்லையின் மீது நிரூபிக்க:

$$\text{i. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right]}{n} = 0$$

$$\text{ii. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} \right] = 0$$

$$\text{iii. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \dots + \frac{n+1}{n} \right] = 1$$

3. காஷியின் இரண்டாம் தேற்றத்தினை பயன்படுத்தி அதன் எல்லையின் மீது நிரூபிக்க:

$$\text{i. } \lim_{n \rightarrow \infty} (n)^{\frac{1}{n}} = 1$$

$$\text{ii. } \lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n}} = \infty$$

$$\text{iii. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(3n)!}{(n!)^3} \right]^{\frac{1}{n}} = 27$$

$$\text{iv. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(n+1)(n+2) \dots (n+n)}{n^n} \right]^{\frac{1}{n}} = \frac{4}{e}$$

4. நிறுவுக: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(1 + 2^{1/2} + 3^{1/3} + \dots + n^{1/n} \right) = 1$

5. கீழ்க்கண்ட எல்லைகளை மதிப்பிடுக:

$$\text{i. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^{3n}$$

$$\text{ii. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+4} \right)^{n+5}$$

$$\text{iii. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n$$

$$\text{iv. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)^{-n}$$

விடைகள்

5. i. $e^{3/2}$

ii. e

iii. e^{-1}

iv. 1

அறிமுகம்

எண்ணை அறிந்த ஒரு சாதாரண மனிதனின் பார்வையுடன் எல்லையற்ற தொடரின் கருத்து பின்வருமாறு:

ஒரு முடிவிலித் தொடரை கருதுக

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \dots \quad \dots(1)$$

கால்குலேட்டர் அல்லது வேறு எந்த சாதனத்தையும் பயன்படுத்தி மேற்கண்ட தொடரின் கூட்டுத்தொகையை கண்டுபிடித்து, தசம பிரதிநிதித்துவத்தில் தொகையை வெளிப்படுத்த ஒரு சாதாரண மனிதனிடம் கேட்டால், அவர் சரியான தொகையைக் கண்டுபிடிக்கும் என்ற எதிர்பார்ப்புடன் காலத்தைச் சேர்க்கத் தொடங்குவார். இந்த செயல்பாட்டில் அவர் பெறுவார்:

இரண்டு உறுப்புகளின் கூடுதல்	= 1 + 0.5	= 1.5
மூன்று உறுப்புகளின் கூடுதல்	= 1.05 + 0.25	= 1.75
நான்கு உறுப்புகளின் கூடுதல்	= 1.75 + 0.125	= 1.875
நான்கு உறுப்புகளின் கூடுதல்	= 1.75 + 0.125	= 1.875
ஐந்து உறுப்புகளின் கூடுதல்	= 1.875 + 0.0625	= 1.9375
ஆறு உறுப்புகளின் கூடுதல்	= 1.9375 + 0.03125	= 1.96875
ஏழு உறுப்புகளின் கூடுதல்	= 1.96875 + 0.015625	= 1.984375

இந்தத் தொடரின் சில விதிமுறைகளைச் சேர்த்த பிறகு, இந்த தொடரின் தொகையைக் கண்டுபிடிக்க முடியாது என்ற முடிவுக்கு அவர் விரைவில் வருவார், ஏனெனில் எண்ணற்ற சொற்கள் இருப்பதால் விதிமுறைகளைச் சேர்க்கும் செயல்முறைக்கு முடிவே இருக்காது.

எண்ணற்ற பல சொற்களின் சரியான தொகையை கண்டுபிடிக்க இயலாது என்று முடிவு செய்துள்ளோம். ஆம், நாங்கள் சொல்வது சரிதான்! ஆனால் இந்த முடிவை ஒரு பக்கத்தில் ஒரு கணம் வைத்துக் கொண்டு, தொடரின் (1) விதிமுறைகளைச் சேர்க்கும் செயல் முறையை மீண்டும் தொடங்குவோம். தொடரின் பத்து விதிமுறைகளைச் சேர்த்தபிறகு, நாம் 1.998046875 தொகையைப் பெறுவோம். இந்த எண்ணைப் பார்க்கும் போது, இன்னும் சில சொற்களில் ஒன்று அல்லது இரண்டைச் சேர்த்த பிறகு, இந்தத் தொகை எண் 2 ஐக் கடக்கும் என்று தெரிகிறது.

எனவே, பதினோராம் காலத்தின் மதிப்பைத் தேடுவோம், அதாவது $\frac{1}{1024} = 0.0009765625$

இந்த பதினோராம் காலத்தின் தசமத்திற்குப் பிறகு 0 இன் எண்ணிக்கை முதல் பத்துகளின் கூட்டுத் தொகையில் தசமத்திற்குப் பிறகு 9 ஐ விட அதிகமாக இருப்பதை கவனிக்கவும். எனவே தொடரின் பதினொரு விதிமுறைகளின் தொகை எண் 2 ஐக் கடக்காது. எனவே, தொடரின் சரியான தொகையை எங்களால் கண்டுபிடிக்க முடியவில்லை. ஆனால் அது எண் 2 ஐ நோக்கி நெருங்கிச் செல்லும், அதை ஒரு போதும் கடக்காது. கணிதவியலாளர் 'ஒருங்கிணைப்பு' என்ற பெயரைத் தேர்ந்தெடுத்துள்ளார் ஒரு

தொடரின் இந்த நடத்தைக்காக நாங்கள் சொல்வது தொடர் $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$ 2-க்கு இணைகிறது.

மற்றொரு எல்லையற்ற தொடரைப் பார்ப்போம்

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots \quad \dots(2)$$

தெளிவாக, இந்தத் தொடரின் தொகை அனைத்து வரம்புகளையும் தாண்டிச் செல்லும், மேலும் இது போன்ற தொடர்கள் வேறுபட்டவை என்று பெயரிடப்பட்டுள்ளன.

தொடரின் (1) மற்றும் (2) இடையேயான முக்கிய வேறுபாடு என்ன வென்றால், தொடரின் (1) விதிமுறைகள் சிறியதாக இருக்கும், அதே நேரத்தில் தொடரின் (2) விதிமுறைகள் பெரிதாகி வருகின்றன. இரண்டு தொடர்களுக்கும் இடையிலான வேறுபாட்டைக் குறிப்பிடுவதன் மூலம் நமது உள்ளுணர்வு (உணர்வு) என்ன சொல்கிறது. உள்ளுணர்வால் அதிகம் செல்லுபவர்கள், சொற்கள் சிறியதாகிவிட்டால், தொடர் ஒன்றிணைந்து, காலஅளவு பெரிதாகிவிட்டால் தொடர் வேறுபடும் என்று நினைப்பார்கள்.

குறிப்பாக, இந்த எண் 2 தொடரின் கூட்டுத் தொகையாக 'வரையறுக்கப்படுகிறது'. தொடரின் சரியான தொகை 2 என்று நாங்கள் கூறவில்லை என்பதை கவனத்தில் கொள்ள வேண்டும்.

3.3 முடிவிலி தொடர்

ஒரு தொடர் என்பது ஒரு வரிசையின் விதிமுறைகளின் கூட்டுத்தொகையாகும். $u_1, u_2, u_3, \dots$ ஒரு வரிசை என்றால் தொகை $u_1, u_2, u_3, \dots$ அனைத்து சொற்களிலும் எல்லையற்ற தொடர் என்று அழைக்கப்படுகிறது மற்றும் இது $\sum u_n$ என்று குறிக்கப்படுகிறது.

$$\sum u_n = u_1, u_2, u_3, \dots u_n + \dots \text{ என்பது ஒரு முடிவிலி தொடர் எனில்,}$$

$$S_n = u_1, u_2, u_3, \dots u_n$$

வரிசை $\{S_n\}$ என்பது தொடரின் பகுதி தொகைகளின் வரிசை மற்றும்

$$S_1 = u_1$$

$$S_2 = u_1 + u_2$$

$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3$$

ஒவ்வொரு எல்லையற்ற தொடர் $\sum u_n$ -க்கும், அதன் பகுதித் தொகைகளின் வரிசை $\{S_n\}$ ஒத்துள்ளது.

குறிப்பு : ஒரு எல்லையற்ற தொடர் அதன் பகுதி வரிசை $\{S_n\}$ ஒன்றிணைந்து, மாறுபடுகிறது அல்லது ஊசலாடும் போது இணைகிறது, வேறுபடுகிறது அல்லது ஊசலாடுகிறது.

கருத்துக்கள் :

1. தொடர் $\sum u_n$ அதன் பகுதித் தொகைகளின் வரிசை $\{S_n\}$ ஒன்றிணைந்தால் ஒன்று சேர்க்கும் என்று கூறப்படுகிறது.
2. அதன் பகுதித் தொகைகளின் வரிசை $\{S_n\}$ வேறுபட்டால் தொடர் $\sum u_n$ வேறுபடுகிறது. அதாவது, $\sum u_n$ வேறுபடுகிறது என்றால் $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ அல்லது $-\infty$
3. $\{S_n\}$ வரையறுக்கப்பட்டால், ஒன்றிணைவதில்லை அல்லது வேறுபடவில்லை என்றால் தொடர் $\sum u_n$ ஊசலாடுகிறது.
4. $\{S_n\}$ வரம்பற்றது மற்றும் ஒன்றிணைவதில்லை அல்லது வேறுபடவில்லை என்றால் தொடர் $\sum u_n$ ஊசலாடுகிறது.
5. நாம் சிலவற்றைச் சேர்த்தால் அல்லது தவிர்த்தால் எல்லையற்ற தொடரின் ஒருங்கிணைப்பு அல்லது வேறுபாடு பாதிக்கப்படாது.
6. எல்லையற்ற தொடரின் தன்மை கொடுக்கப்பட்ட தொடரை பூஜ்ஜிய மாறிலியால் பெருக்கும் போது மாறாது.
7. இரண்டு ஒருங்கிணைந்த தொடரின் கூட்டுத்தொகை எப்பொழுதும் ஒருங்கிணைந்ததாக இருக்கும்.

தீர்க்கப்பட்ட உதாரணங்கள்

எடுத்துக்காட்டு 3.15 : $1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots$ என்ற குவி தொடரை சரிப்பார்க்க.

தீர்வு : இங்கு $S_n = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots (-1)^{n-1} \frac{1}{5^{n-1}}$

$$= \frac{1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{5}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}$$

$$= \frac{5}{6} \quad n \rightarrow \infty \text{ எனும்போது } [\because \text{இது ஒரு முடிவறு பெருக்குத் தொடர். } \frac{a(1-r^n)}{1-r} \text{ பயன்படுத்துக}]$$

$\therefore \{S_n\}$ என்பது ஒரு குவிவரிசை எனவே, கொடுக்கப்பட்டது குவித் தொடர் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.16 : $1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \dots$ என்ற குவி தொடரை சரிப்பார்க்க.

தீர்வு : $1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \dots$ என்ற தொடரின் n வது உறுப்பு

$$u_n = (2n - 1)^2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty$$

$\therefore \sum u_n$ என்பது ஒரு குவித் தொடர் அல்ல மற்றும் இது ஒரு விலகு தொடர் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.17 : $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots$ என்ற குவி தொடரை சரிப்பார்க்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட தொடரை $\frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \right) + \dots \right]$ என மாற்றி எழுதுக.

$$S_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$S_n \rightarrow \frac{1}{2} \quad (n \rightarrow \infty \text{ எனும்போது})$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ என்பது ஒரு குவித் தொடர்.

எடுத்துக்காட்டு 3.18 : $7 - 4 - 3 + 7 - 4 - 3 + 7 - 4 - 3 + \dots$ என்ற குவி தொடரை சரிப்பார்க்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட தொடரின் $\{S_n\}$ என்ற வரிசையின் பகுதிக் கூடுதல்

$$S_n = 7, n = 3m + 1 \text{ எனில், } m \geq 0 \text{ ஒரு நேர்மறை முழு எண்}$$

$$= 0, n = 3m \text{ எனில், } m \geq 0 \text{ ஒரு நேர்மறை முழு எண்}$$

$$= 3, n = 3m - 1 \text{ எனில், } m > 0 \text{ ஒரு நேர்மறை முழு எண்}$$

எனவே, $\{S_n\}$ என்பது ஒரு அலைவறும் தொடர் ஆகும்.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ என்பது ஒரு அலைவறும் தொடர்

பயிற்சி 3.4

1. கீழ்க்கண்ட குவி தொடரை சரிப்பார்க்க.

i. $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n.(n+1)} + \dots \infty$

ii. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + \dots$

iii. $-1 - 2 - 3n \dots$

iv. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$

v. $5 - 4 - 1 + 5 - 4 - 1 + 5 - 4 - 1 + \dots \infty$ வரை

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.(n+2)}$ என்ற தொடர் $\frac{3}{4}$ -ல் குவிகிறது என நிறுவுக.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1}$ என்ற தொடர் 4-ல் குவிகிறது என நிறுவுக.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n$ என்ற தொடர் முடிவிலியில் அலைவறுகிறது என நிறுவுக.

5. கீழ்க்கண்ட குவி தொடரை சரிப்பார்க்க.

i. $1 + 3 + 5 + 7 + \dots \infty$

ii. $-1 - 8 - 27 - 64 \dots \infty$

விடைகள்

1. i. குவிகிறது ii. +விலகுகிறது iii. விலகுகிறது
iv. முடிவுறு அலைவுறுதல் v. முடிவுறு அலைவுறுதல்
5. i. விலகுகிறது ii. விலகுகிறது

3.3.1 பெருக்குத் தொடரில் குவிதல் அல்லது விலகுதல்

$a + ar + ar^2 + \dots + \infty$ என்ற பெருக்கு தொடரில்

- i. $|r| < 1$ எனில் குவிகிறது
ii. $r \geq 1$ எனில் விலகுகிறது
iii. $r = -1$ எனில் முடிவுறு அலைவுறு ஆகும்
iv. $r < -1$ எனில் முடிவிலி அலைவுறு ஆகும்

மெய்ப்பித்தல் : இங்கு $S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$

$$= \frac{a(1-r^n)}{1-r} \text{ இருப்பினும் } r \neq 1$$

வகை i : $|r| < 1$ எனில், $n \rightarrow \infty$ எனும்போது $r^n \rightarrow 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-r} \text{ இது ஒரு ஒருமை மற்றும் முடிவுறு ஆகும்}$$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட தொடர் $\frac{a}{1-r}$ -ல் குவிகிறது.

வகை ii : $|r| > 1$ எனில், $n \rightarrow \infty$ எனும்போது $r^n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \infty$$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட தொடர் விலகுகிறது.

$$r = 1 \text{ எனில், அப்போது } S_n = \underbrace{(a + a + \dots + a)}_{n \text{ times}} = na$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட தொடர் விலகுகிறது.

வகை iii : $r = -1$ எனில், அப்போது $S_n = a - a + a - a \dots + n$ தடவை வரை

$$= \begin{cases} a, & n\text{-ன் மதிப்பு ஒற்றைப்பட} \\ 0, & n\text{-ன் மதிப்பு இரட்டைப்பட} \end{cases}$$

எனவே, $\{S_n\}$ தொடர் அலைவுறுகிறது மற்றும் $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$ முடிவுறு அலைவுறு ஆகும்

வகை iv : $r = -1$ எனில்,

$$\Rightarrow -r > 1 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow x = -r \text{ எனும் போது}$$

$$\Rightarrow n \rightarrow \infty \text{ எனும் போது } x^n \rightarrow \infty$$

$$\text{இப்போது, } S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{n(-1)(-x)^n}{1 + x}$$

$$= \begin{cases} \frac{a(1 - x^n)}{1 + x}, & n\text{-ன் மதிப்பு இரட்டைப்படை எனில்} \\ \frac{a(1 - x^n)}{1 + x}, & n\text{-ன் மதிப்பு ஒற்றைப்படை எனில்} \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \begin{cases} -\infty, & n \text{ ஒற்றைப்படை} \\ \infty, & n \text{ இரட்டைப்படை} \end{cases}$$

இதனால், வரிசை $\{S_n\}$ முடிவிலியில் அலைவறுகிறது மற்றும் எனவே கொடுக்கப்பட்ட தொடர் முடிவிலியில் அலைவறுகிறது.

பெருக்குத் தொடரில் உதராணங்கள் (குவிதல் அல்லது விலகுதல்)

$$1. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$$

$$\text{இது ஒரு பெருக்குத் தொடர் } r = \frac{1}{2}$$

$$r = \frac{1}{2} < 1$$

$\therefore$ இது ஒரு குவித் தொடர்

$$2. \quad \sum_{n=1}^{\infty} 3^n = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots$$

$$\text{இது ஒரு பெருக்குத் தொடர் } r = 3$$

$$r = 3 > 1$$

$\therefore$ இது ஒரு விலகு தொடர்

$$3. \quad \frac{3}{4} - \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} + \dots$$

$$\text{இது ஒரு பெருக்குத் தொடர் } r = -1$$

$$r = -1$$

$\therefore$ இது ஒரு முடிவறு அலைவறு தொடர் ஆகும்.

3.3.2 நேர்மறை உறுப்புகளின் தொடர்

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ என்ற தொடரின் அனைத்து மதிப்புக்கும் $a_n > 0$ எனில், நேர்மறை உறுப்புகளின் தொடர் எனப்படும்.

அடிப்படைமுடிவு : ஒருங்கத் தேவையான நிபந்தனை : தொடர் $\sum a_n$ என்றால், ஒரு $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$, மற்றும் மறுதலை எப்போதும் உண்மை இல்லை.

முடிவுகள் :

- (ஒரு நேர்மறையான காலத் தொடருக்கான அடிப்படை சோதனை) ஒரு நேர்மறையான சொல் தொடர் $\sum a_n$ ஒன்றுப்பட்டால் அதன் வரிசை $\langle S_n \rangle$ பகுதி தொகைகள் மேலே வரம்பிடப்பட்டால் மட்டுமே. அதாவது, ஒரு நேர்மறையான சொல் தொடர் $\sum a_n$ இணைகிறது. $S_n < k \forall n$ (k என்பது சில நேர்மறை உண்மையான எண்)
- ஒரு ஏகபோக வரிசை குவிகிறது அல்லது வேறுபடுகிறது ஆனால் ஊசலாட முடியாது. எனவே ஒரு நேர்மறையான சொல் தொடர் குவிகிறது அல்லது வேறுபடுகிறது. அதாவது, ஒரு நேர்மறைகாலதொடர் ஊசலாட முடியாது.

குறிப்பு :

- ஒரு c என்றால் நேர்மறை சொற்கள் தொடர் $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \infty$; வேறுபடுகிறது.
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$ என்றால், நேர்மறை சொற்கள் தொடரின் நடத்தை பற்றி முடிவு இல்லை

3.3.3 குவிதலில் காஷியின் பொது தத்துவம்

ஒரு தொடர் $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ குவித் தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை என்னவென்றால், ஒவ்வொரு $\varepsilon > 0$ -க்கும், ஒரு நேர்மறை முழு எண் m உள்ளது.

$$|a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n| < \varepsilon \quad n \geq m$$

சில தீர்க்கப்பட்ட உதாரணங்கள்

எடுத்துக்காட்டு 3.19 : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ என்ற தொடர் குவி தொடர் அல்ல என நிறுவுக.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட தொடர் குவிகிறது எனில், $\langle S_n \rangle$ என்ற வரிசையின் பகுதிக் கூடுதல் எனில்; கொடுக்கப்பட்ட தொடர் குவிகிறது.

குவிதலில் காஷியின் பொது தத்துவத்தின் படி தொடரில், $\varepsilon = \frac{1}{2}$ க்கான m என்ற நேர்மறை மெய்யெண்

உள்ளது அதை போல $|S_n - S_m| < \frac{1}{2} \quad n \geq m$

$$\left| \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{n} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} \right) \right| < \frac{1}{2} \quad n \geq m$$

$$\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{n} < \frac{1}{2} \quad n \geq m \quad \dots(1)$$

$n = 2m$ எடுத்துக் கொண்டால், நமக்கு கிடைப்பது

$$\begin{aligned} \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{n} &= \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{2m} > \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} + \dots + \frac{1}{2m} \\ &= m \cdot \frac{1}{2m} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{n} &> \frac{1}{2} \quad (n = 2m > m) \end{aligned} \quad \dots(2)$$

இதிலிருந்து (1) மற்றும் (2) முரண்பாடான கருத்து, கொடுக்கப்பட்ட தொடர் குவி தொடர் அல்ல.

3.3.4 ஒப்பீட்டு சோதனை

சோதனை 1

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ மற்றும் $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ஆகிய இரண்டும் நேர்மறை உறுப்புகளின்; தொடர் எனில் $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ குவிகிறது மற்றும் அங்கு நேர்மறை மாறிலி k ஆகவே, $a_n \leq k, " n > m$ எனும்போது $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ -ம் குவிகிறது.

சோதனை 2

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ மற்றும் $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ஆகிய இரண்டும் நேர்மறை உறுப்புகளின்; தொடர் எனில் $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ விலகுகிறது மற்றும் அங்கு நேர்மறை மாறிலி k ஆகவே, $a_n \leq k, " n > m$ எனும்போது $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ -ம் விலகுகிறது.

சோதனை 3

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ மற்றும் $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ஆகிய இரண்டும் நேர்மறை உறுப்புகளின்; தொடர் எனில் k, K ஆகிய இரண்டும் நேர்மறை எண்கள் ஆகவே $k b_n < a_n < K b_n " n$ எனும்போது தொடர் $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ மற்றும் $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ஒன்றாக குவிகிறது அல்லது விலகுகிறது.

சோதனை 4

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ மற்றும் $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ஆகிய இரண்டும் நேர்மறை உறுப்புகளின்; தொடர் எனில் $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ (பூஜ்ஜியமற்ற மற்றும் முடிவுறு எண்), ஆகிய இரண்டு தொடரும் $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ மற்றும் $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ஒன்றாக குவிகிறது அல்லது விலகுகிறது.

கருத்துக்கள் : மேற்க்கண்ட சோதனையில் நிபந்தனை $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ என்பது முடிவுறு மற்றும் பூஜ்ஜியமற்றது என்பதை கைவிட முடியாது.

$a_n = \frac{1}{n}$ மற்றும் $a_n = \frac{1}{n^2}$ எனக் கருதுக

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$$

இங்கு $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ மற்றும் $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ஒன்றாக குவிகிறது அல்லது விலகுகிறது $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ விலகுகிறது மற்றும் $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ குவிகிறது.

சோதனை 5

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ மற்றும் $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ஆகிய இரண்டும் நேர்மறை உறுப்புகளின்; தொடர் எனில்

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ மற்றும் $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ குவிகிறது, ஆகவே $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ குவிகிறது.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ மற்றும் $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ விலகுகிறது, ஆகவே $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ விலகுகிறது.

சோதனை 6

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ மற்றும் $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ஆகிய இரண்டும் நேர்மறை உறுப்புகளின்; தொடர் எனில்,

ஆகவே $\frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{b_n}{b_{n+1}}$ " $n \geq m$, இங்கு m என்பது நேர்மறை மெய்யெண்,

- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ குவிகிறது $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ குவிகிறது.
- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ விலகுகிறது, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ விலகுகிறது.

3.3.5 ஒப்பீடுதலில் முக்கியமான சோதனை

$\left[\frac{1}{n^p} \right]$ மிகை சீரிசை வரிசை அல்லது p - வரிசை

தேற்றம் : ஒரு வரிசை $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$

- $p > 1$ எனில், குவிகிறது
- $p \leq 1$ எனில், விலகுகிறது

மெய்ப்பித்தல் :

வகை i : $p > 1$ எனில்,

$$\frac{1}{1^p} = 1$$

$$\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} < \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} = \frac{1}{2^{p-1}}$$

$$\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} < \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} = \frac{4}{4^p} = \frac{1}{4^{p-1}} = \frac{1}{(2^{p-1})^2}$$

$$\dots$$

$$\frac{1}{(2^n)^p} + \dots + \frac{1}{(2^{n+1} - 1)^p} < \frac{1}{(2^{p-1})^n}$$

சமத்துவமின்மையை கூட்ட, நமக்கு கிடைப்பது

$$S_{2^{n+1}-1} < 1 + \frac{1}{(2^{p-1})^n} + \frac{1}{(2^{p-1})^2} + \dots + \frac{1}{(2^{p-1})^n}$$

மேற்கண்ட சமத்துவமின்மையில் வலது பக்கம் $\frac{1}{(2^{p-1})^n} < 1$ என்ற பொது விகிதத்தில் பெருக்குத் தொடரில் உள்ளது

$$S_{2^{n+1}-1} < \frac{1 \left[1 - \frac{1}{(2^{p-1})^n} \right]}{1 - \frac{1}{(2^{p-1})^n}} \quad \left[\because S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \right]$$

$$S_{2^{n+1}-1} < \frac{1}{1 - \frac{1}{(2^{p-1})^n}}$$

$$\text{அல்லது } S_{2^{n+1}-1} < k \text{ இங்கு } k = \frac{1}{1 - \frac{1}{(2^{p-1})^n}} \text{ நிலையானது}$$

ஆனால் $S_n < S_{2^{n+1}-1}$ n -ன் எல்லா மதிப்புக்கும்

$S_n < k_n$ -ன் எல்லா மதிப்புக்கும்

$\Rightarrow \langle S_n \rangle$ என்பது மேல் வரம்பு வரிசை. ஆனால் ஒவ்வொரு நேர்மறை வரிசையும் மேல் வரம்பில் குவிகிறது.

$\Rightarrow \langle S_n \rangle$ என்பது குவிகிறது. எனவே கொடுக்கப்பட்ட வரிசை $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p}$ குவிகிறது.

வகை ii : $p = 1$ எனில், இந்த வகையில் நமக்கு கிடைக்கும் தொடர்

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

$$1 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$1 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{2}$$

.....
.....

$$\frac{1}{2^{n+1} + 1} + \dots + \frac{1}{2^n} > \frac{1}{2}$$

மேற்கண்ட சமத்துவமின்மையை கூட்ட, நமக்கு கிடைப்பது

$$S_{2^n} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} \quad n\text{-வது உறுப்பு வரை}$$

$$S_{2^n} > \frac{n}{2}$$

$\Rightarrow$ வரிசை (S_{2^n}) என்பது மேல் வரம்பு வரிசை அல்ல. n -ன் தேவையான பெரிய மதிப்புக்கும்.

எனவே தொடர் $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ என்பது $+\infty$ ல் விலகுகிறது.

வகை iii : $p < 1$ எனில்

இங்கு $n^p < n$, n -ன் எல்லா மதிப்புக்கும் அல்லது $\frac{1}{n^p} > \frac{1}{n}$, n -ன் எல்லா மதிப்புக்கும்

வகை ii-ன் படி $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ என்பதும் விலகுகிறது.

$\therefore$ ஒப்பீட்டு சோதனையின் படி $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ என்பதும் விலகுகிறது.

இது முடிவை நிரூபிக்கிறது.

சில தீர்க்கப்பட்ட உதாரணங்கள்

எடுத்துக்காட்டு 3.20 : குவிதல் தொடரை சோதிக்க :

i. $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \infty$

ii. $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \infty$

iii. $\frac{1}{\sqrt{1.2}} + \frac{1}{\sqrt{2.3}} + \frac{1}{\sqrt{3.4}} + \dots + \infty$

தீர்வு : i. $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \infty$

இந்த வரிசையை எழுத

$$\sum a_n = \sum \frac{1}{n(n+1)}$$

$$a_n = \sum \frac{1}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

$$b_n = \frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(1 + \frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{n^2}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2}\right)} = 1 \text{ பூஜ்ஜியமற்ற மற்றும் முடிவுறு எண்}$$

$\therefore$ ஒப்பீட்டு சோதனையின் படி, $\sum a_n = \sum b_n$ மற்றும் ஒன்றாக குவிகிறது அல்லது விலகுகிறது.

ஆனால் $\sum b_n = \frac{1}{n^2}$ என்பதன் வடிவம் $\sum \frac{1}{n^p}$

இங்கு $p = 2 > 1$

$\therefore \sum b_n$ குவிகிறது

$\Rightarrow \sum a_n$ குவிகிறது

ii. குறிப்பு : $a_n = \frac{n}{(2n-1)(2n+1)}$ மற்றும் $b_n = \frac{1}{n}$

விடை : கொடுக்கப்பட்ட தொடர் விலகுகிறது.

iii. $\frac{1}{\sqrt{1.2}} + \frac{1}{\sqrt{2.3}} + \frac{1}{\sqrt{3.4}} + \dots + \infty$

இங்கு $a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = 1$

$b_n = \frac{1}{n}$ என்க

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = 1$$

$\therefore \sum a_n$ மற்றும் $\sum b_n$ ஒன்றாக குவிகிறது அல்லது விலகுகிறது.

ஆனால் $\sum b_n = \sum \frac{1}{n}$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட வரிசை விலகுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3.21 : $\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots \infty$ குவிதல் தொடரை சோதிக்க.

தீர்வு : குறிப்பு: $a_n = \frac{n+1}{n^p}$ மற்றும் $b_n = \frac{1}{n^{(p-1)}}$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட தொடர் $p > 2$ -ல் குவிகிறது மற்றும் $p \leq 2$ -ல் விலகுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3.22 : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(2n-1)}$ குவிதல் தொடரை சோதிக்க

தீர்வு : இங்கு $a_n = \frac{n+1}{n(2n-1)} = \frac{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n^2 \left(2 - \frac{1}{n}\right)}$

$b_n = \frac{1}{n}$ என்க

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n^2 \left(2 - \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{n}$ (பூஜ்ஜியமற்ற மற்றும் முடிவுறு எண்)

$\therefore$ ஒப்பீட்டு சோதனையின் படி, $\sum a_n$ மற்றும் $\sum b_n$ ஒன்றாக குவிகிறது அல்லது விலகுகிறது.

ஆனால் $\sum b_n = \sum a$ விலகுகிறது. ($\because p = 1$, p -தேர்வு மூலம்)

எனவே கொடுக்கப்பட்ட தொடர் விலகுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3.23 : கீழ்க்கண்ட குவி தொடரை சரிப்பார்க்க.

i. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p (n+1)^p}$ ii. $\frac{2^p}{1^p} + \frac{3^p}{2^p} + \frac{4^p}{3^p} + \dots \infty$ iii. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 1}$ iv. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n^2 + 1}$

தீர்வு i : குறிப்பு : $a_n = \frac{1}{n^p (n+1)^p}$ மற்றும் $b_n = \frac{1}{n^{2p}}$

எனவே $p > \frac{1}{2}$ எனில் கொடுக்கப்பட்ட தொடர் குவிகிறது மற்றும் $p \leq \frac{1}{2}$ எனில் விலகுகிறது.

ii. குறிப்பு : $a_n = \frac{(n+1)^p}{n^p}$ மற்றும் $b_n = \frac{1}{n^{(p-q)}}$

எனவே $q > p+1$ எனில் கொடுக்கப்பட்ட தொடர் குவிகிறது மற்றும் $q \leq p+1$ எனில் விலகுகிறது.

iii. குறிப்பு : $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 1}$ மற்றும் $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட தொடர் குவிகிறது.

iv. குறிப்பு : $a_n = \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n^2 + 1}$ மற்றும் $b_n = \frac{1}{n^2}$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட தொடர் குவிகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3.24 : கொடுக்கப்பட்ட குவி தொடரை சரிப்பார்க்க.

a. $\frac{1}{5} + \frac{\sqrt{2}}{7} + \frac{\sqrt{3}}{9} + \frac{\sqrt{4}}{11} + \dots \infty$

b. $\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots \infty$

தீர்வு : a. குறிப்பு : $a_n = \frac{\sqrt{n}}{(2n+3)}$ மற்றும் $b_n = \frac{1}{n^{(1/2)}}$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட தொடர் குவிகிறது.

$$b. \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots \infty$$

இங்கு
$$a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right)}$$

மற்றும்
$$b_n = \frac{1}{n^2} \text{ என்க}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right)} = 1 \text{ (பூஜ்ஜியமற்ற மற்றும் முடிவுறு எண்)}$$

$\therefore \sum a_n$ மற்றும் $\sum b_n$ ஒன்றாக குவிகிறது அல்லது விலகுகிறது.

ஆனால் $\sum b_n = \frac{1}{n^2}$ குவிகிறது [$\because p = 3 > 1$. p - தேர்வு மூலம்]

எனவே கொடுக்கப்பட்ட தொடர்குவிகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3.25 : கொடுக்கப்பட்ட $\sum(\sqrt{n^2+1} - n)$ என்ற குவி தொடரை சரிப்பார்க்க.

தீர்வு : இங்கு $a_n = \sum(\sqrt{n^2+1} - n)$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{n^2+1} - n \times \frac{\sqrt{n^2+1} + n}{\sqrt{n^2+1} + n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n} = \frac{1}{n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1 \right)} \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{n} \text{ என்க}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1 \right)} = \frac{1}{2}$$

ஒப்பீட்டு சோதனையின் படி, $\sum a_n$ மற்றும் $\sum b_n$ ஒன்றாக குவிகிறது அல்லது விலகுகிறது.

ஆனால் $\sum b_n = \sum \frac{1}{n}$ விலகுகிறது. ($\because p = 1$, p -தேர்வு மூலம்)

எனவே கொடுக்கப்பட்ட தொடர் விலகுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3.26 : கொடுக்கப்பட்ட $\sum(\sqrt{n^4+1} - \sqrt{n^4-1})$ என்ற குவி தொடரை சரிப்பார்க்க.

தீர்வு : நீங்களே முயற்சி செய்யவும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.27 : கொடுக்கப்பட்ட $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{3} + \dots$ என்ற குவி தொடரை சரிப்பார்க்க.

தீர்வு : குறிப்பு : $a_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n^2+1}$ மற்றும் $b_n = \frac{1}{n^{(3/2)}}$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட தொடர் குவிகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3.28 : $\sum (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})$ கொடுக்கப்பட்ட என்ற குவி தொடரை சரிப்பார்க்க.

தீர்வு : எனவே கொடுக்கப்பட்ட தொடர் குவிகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3.29 : கீழ்க்கண்ட குவி தொடரை சரிப்பார்க்க.

$$\text{a. } \sum \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{n} \quad \text{b. } \sum \cot^{-1} n^2 \quad \text{c. } \sum \left(\frac{1}{n} - \log \frac{n+1}{n} \right) \quad \text{d. } \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right)$$

தீர்வு : a. குறிப்பு : $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$ பயன்படுத்துக.

எனவே கொடுக்கப்பட்ட தொடர் குவிகிறது.

$$\text{b. } \sum a_n = \sum \cot^{-1} n^2$$

$$a_n = \cot^{-1} n^2$$

$$= \tan^{-1} \frac{1}{n^2}$$

$$= \frac{1}{n^2} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n^2} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{n^2} \right)^5 - \frac{1}{7} \left(\frac{1}{n^2} \right)^7 + \dots$$

$$b_n = \frac{1}{n^2} \text{ என்க}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

$$\left[\because \tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right]$$

ஒப்பீட்டு சோதனையின் படி, $\sum a_n$ மற்றும் $\sum b_n$ ஒன்றாக குவிகிறது அல்லது விலகுகிறது.

$$\text{ஆனால் } b_n = \frac{1}{n^2} \text{ குவிகிறது.}$$

($\because p = 2 > 1$, p -தேர்வு மூலம்)

$\Rightarrow \sum a_n$ வரிசை குவிகிறது.

$$\begin{aligned} \text{c. } a_n &= \frac{1}{n} - \log \frac{n+1}{n} \\ &= \frac{1}{n} - \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} + \dots \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{1}{n^2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3n} + \frac{1}{4n} + \dots \right]$$

$$b_n = \frac{1}{n^2} \text{ என்க}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{2} \text{ (பூஜ்ஜியமற்ற மற்றும் முடிவுறு எண்)}$$

$\sum a_n$ மற்றும் $\sum b_n$ ஒன்றாக குவிகிறது அல்லது விலகுகிறது.

ஆனால் $\sum b_n = \frac{1}{n^2}$ குவிகிறது.

($\because p = 2 > 1$, p -தேர்வு மூலம்)

$\Rightarrow \sum a_n$ வரிசை குவிகிறது.

d. குறிப்பு : $\cos x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$ பயன்படுத்துக.

விடை : தொடர் குவிகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3.29 : $\sum \frac{x^{n-1}}{1+x^n}$ குவி தொடரை சரிப்பார்க்க.

தீர்வு : $a_n = \frac{x^{n-1}}{1+x^n}$ என்க

குவி தொடரை சரிப்பார்ப்பதற்கு, கீழ்க்காணும் வகையில் காணலாம்

வகை i : $0 < x < 1$

பிறகு $n \rightarrow \infty$

எனும்போது $x^n \rightarrow 0$

$b_n = x^{n-1}$ என்க

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^n} = \frac{1}{1+0} = 1 \text{ (பூஜ்ஜியமற்ற மற்றும் முடிவுறு எண்)}$$

$\sum a_n$ மற்றும் $\sum b_n$ ஒன்றாக குவிகிறது அல்லது விலகுகிறது.

ஆனால் $\sum b_n = \sum x^{n-1}$ என்பது ஒரு பெருக்குத் தொடர் பொது வித்தியாசம் $x < 1$

$\therefore \sum b_n$ குவிகிறது

$\therefore \sum a_n$ குவிகிறது

வகை ii : $x = 1$ எனில்

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \text{ (பூஜ்ஜியமற்ற மற்றும் முடிவுறு எண்)}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ எனில், $\sum a_n$ மாறாது.

$\sum a_n$ ஒரு விலகுத் தொடர்.

வகை iii : $x > 1$ எனில், பிறகு $n \rightarrow \infty$ எனும்போது $\frac{1}{x^n} \rightarrow 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{x^n \cdot x \left(1 + \frac{1}{x^n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x \left(1 + \frac{1}{x^n}\right)} = \frac{1}{x} \neq 0$$

எனவே தொடர் விலகுகிறது.

ஆகவே $x < 1$ எனில் கொடுக்கப்பட்ட தொடர்குவிகிறது, $x \geq 1$ எனில் விலகுகிறது.

பயிற்சி 3.5

கீழ்க்காணும் குவிதல் அல்லது விலகுதல் தொடரை சரிப்பார்க்க:

1. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} + \dots \infty$

2. $\frac{1}{1.4} + \frac{1}{2.5} + \frac{1}{3.6} + \dots \infty$

3. $\frac{1}{1.2} + \frac{2}{3.4} + \frac{3}{5.6} + \dots \infty$

4. $\frac{3}{5} + \frac{4}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \frac{4}{5^4} + \dots \infty$

5. $1 + \frac{1}{4^{2/3}} + \frac{1}{9^{2/3}} + \frac{1}{16^{2/3}} + \dots \infty$

6. $\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots \infty$

7. $\frac{1}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{4}} + \dots$

8. $\sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{2}{6}} + \sqrt{\frac{3}{8}} + \dots \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}} + \dots$

9. $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{2^2}{3^3} + \frac{3^3}{4^4} + \frac{4^4}{5^5} + \dots$

10. $\frac{\sqrt{2}-1}{3^3-1} + \frac{\sqrt{3}-1}{4^3-1} + \frac{\sqrt{4}-1}{5^3-1} + \dots$

11. $\frac{1}{1^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{5^p} + \dots$

12. $\sum \frac{2n^3+5}{4n^5+1}$

13. $\sum (\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3})$

14. $\sum \frac{\sqrt[3]{3n^2+1}}{\sqrt[4]{4n^3+2n+7}}$

15. $\frac{1}{1^2} + \frac{1+2}{1^2+2^2} + \frac{1+2+3}{1^2+2^2+3^2} + \dots$

16. $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{2}{1+2\sqrt{3}} + \frac{3}{1+3\sqrt{4}} + \dots$

17. $\frac{1}{a(a+b)} + \frac{a}{(a+2b)(a+3b)} + \frac{1}{(a+4b)(a+5b)} + \dots \infty, a > 0, b > 0$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n^p}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n + x^{-n}}, x > 0$

விடைகள்

1. குவிகிறது
2. குவிகிறது
3. குவிகிறது
4. குவிகிறது
5. குவிகிறது
6. குவிகிறது
7. விலகுகிறது
8. விலகுகிறது
9. விலகுகிறது
10. குவிகிறது
11. $p > 1$ எனில் குவிகிறது, $p \leq 1$ எனில் விலகுகிறது
12. குவிகிறது
13. குவிகிறது
14. விலகுகிறது
15. விலகுகிறது
16. விலகுகிறது
17. குவிகிறது
18. $p > \frac{1}{2}$ எனில் குவிகிறது மற்றும் $p \leq \frac{1}{2}$ எனில் விலகுகிறது
19. குவிகிறது
20. $x < 1$ எனில் குவிகிறது மற்றும் $x > 1$ ஆனால் $x = 1$ விலகுகிறது.

3.3.6 டி' ஆல்மப்ட்ஸ் விகித சோதனை

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ என்பது ஒரு நேர்மறை உறுப்புகள் கொண்ட வரிசை $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = l$, மேலும்

- i. $l > 1$ எனில் குவிகிறது
- ii. $l < 1$ எனில் விலகுகிறது.
- iii. $l = 1$ எனில் முடிவு எட்டப்படவில்லை (அதாவது தோல்வியடைகிறது).

சில தீர்க்கப்பட்ட உதாரணங்கள்

எடுத்துக்காட்டு 3.31 : கீழ்க்காணும் குவிதல்; தொடரை விவாதிக்க:

- (i) $1 + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \frac{4!}{4^4} + \dots \infty$
- (ii) $\frac{1}{1+2} + \frac{2}{1+2^2} + \frac{3}{1+2^3} + \dots \infty$
- (iii) $\frac{2}{1} + \frac{2.5.8}{1.5.9} + \frac{2.5.8.11}{1.5.9.13} + \dots \infty$
- (iv) $\frac{2!}{3} + \frac{3!}{3^2} + \frac{4!}{3^3} + \dots \infty$
- (v) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1.2}{3.5}\right)^2 + \left(\frac{1.2.3}{3.5.7}\right)^2 + \left(\frac{1.2.3.5}{3.5.7.9}\right)^2 + \dots \infty$

தீர்வு : (i) $1 + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \frac{4!}{4^4} + \dots \infty$

$$\begin{aligned}
 \text{இங்கு } a_n &= \frac{n!}{n^n}, a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} \times \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(n+1)^n (n+1)}{n^n (n+1)n!} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n^n}
 \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{n^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1$$

∴ $\sum a_n$ குவிகிறது.

ii. குறிப்பு : $a_n = \frac{n}{1+2^n}$, விடை: குவிகிறது

iii. குறிப்பு: $a_n = \frac{2.5.8.11... (3n-1)}{1.5.9.13... [4(n-1)+1]}$

விடை : நீங்களாகவே முயற்சி செய்க.

iv. குறிப்பு: $a_n = \frac{(n+1)!}{3^n}$, விடை: விலகுகிறது

v. $\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1.2}{3.5}\right)^2 + \left(\frac{1.2.3.4}{3.5.7.9}\right)^2 + \dots \infty$

தீர்வு : இங்கு $a_n = \left[\frac{1.2.3.4 \dots n}{3.5.7.9 \dots (2n+1)} \right]^2$

$$a_{n+1} = \left[\frac{1.2.3.4 \dots n (n+1)}{3.5.7.9 \dots (2n+1) (2n+3)} \right]^2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(2n+3)^2}{(n+1)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2} \left[\frac{\left(2 + \frac{3}{n}\right)^2}{1 + \frac{1}{n}} \right] = 4 > 1$$

∴ $\sum a_n$ குவிகிறது .

எடுத்துக்காட்டு 3.32 : பின்வரும் தொடர்களின் ஒருங்கும் தன்மையைக் காண்க:

i. $\sum \frac{2^{n-1}}{3^{n+1}}$

ii. $\sum \frac{1}{n!}$

iii. $\sum \frac{x^n}{3^n \cdot n^2}, x > 0$

vi. $\sum \frac{x^n}{n}, x > 0$

v. $\sum \frac{n}{n^2+1} \cdot x^n, x > 0$

vi. $\sum \left(\frac{n^2}{2^n} + \frac{1}{n^2} \right)$

i. தீர்வு : $\sum \frac{2^{n-1}}{3^{n+1}}$

இங்கு, $a_n = \sum \frac{2^{n-1}}{3^{n+1}}$

மற்றும் $a_{n+1} = \frac{2^n}{3^{n+1}+1}$

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n-1}}{3^n + 1} \times \frac{3^{n+1} + 1}{2^n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot 3^{n+1}}{2 \cdot 3^n} \times \frac{\left(1 + \frac{1}{3^{n+1}}\right)}{\left(1 + \frac{1}{3^n}\right) 2^n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2} \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{3^{n+1}}\right)}{\left(1 + \frac{1}{3^n}\right)} \\
 &= \frac{3}{2} > 1
 \end{aligned}$$

∴ $\sum a_n$ குவிகிறது.

ii. நீங்களாகவே முயற்சி செய்க.

விடை : குவிகிறது.

iii. நீங்களாகவே முயற்சி செய்க.

விடை : $3 \geq x$ எனும்போது ஒருங்கும் தொடர் மற்றும் $3 < x$ விலகும் தொடராகும்.

iv. நீங்களாகவே முயற்சி செய்க.

விடை : $x < 1$ எனும்போது ஒருங்கும் தொடர் மற்றும் $x \geq 1$ விலகும் தொடராகும்

v. $\sum \frac{n}{n^2+1} \cdot x^n, x > 0$

இங்கு $a_n = \frac{n x^n}{n^2+1}, a_{n+1} = \frac{(n+1) x^{n+1}}{(n+1)^2+1}$

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2+1} x^n \times \frac{(n+1)^2+1}{(n+1) x^{n+1}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot x^n \cdot n^2 \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right]}{n \cdot n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) x^n \cdot x} = \frac{1}{x}
 \end{aligned}$$

தகவு சோதனையின் படி $\sum a_n$ ஆனது $\frac{1}{x} > 1$ என்றால் ஒருங்குகிறது. அதாவது $x < 1$ மற்றும் $x > 1$

என்றால் விலகும், $x = 1$ எனும்போது தகவு சோதனை தோல்வியடையும்.

கொடுக்கப்பட்ட வரிசை தொடரில் $x = 1$ என பதிவிட

$$a_n = \frac{n}{n^2+1} = \frac{1}{n \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}$$

$b_n = \frac{1}{n}$ என்க, b_n விலகும்.

$x < 1$ எனும்போது தொடர் ஒருங்கும் தொடராகும் மற்றும் $x \geq 1$ விலகும் தொடராகும்.

vi. $\sum \left(\frac{n^2}{2^n} + \frac{1}{n^2} \right)$

$$\sum \left(\frac{n^2}{2^n} + \frac{1}{n^2} \right) = \sum a_n + \sum b_n$$

இங்கே

$$a_n = \frac{n^2}{2^n}, a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} \times \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \cdot 2^n \cdot 2}{2^n \cdot n^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^2} = 2 > 1 \end{aligned}$$

எனவே $\sum \frac{n^2}{2^n}$ குவிகிறது.

மேலும் $\sum b_n = \sum \frac{n^2}{2^n}$ என்பது p -சோதனை மூலம் குவிகிறது.

எனவே கொடுக்கப்பட்ட தொடர் குவிகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3.33 : $\sum \sqrt{\frac{n+1}{n^2+1}} \cdot x^n$, $x > 0$ தொடரின் குவிகிறது பற்றி விவாதிக்கவும்

தீர்வு : இங்கே $a_n = \sum \sqrt{\frac{n+1}{n^2+1}} \cdot x^n$

$$a_{n+1} = \sum \sqrt{\frac{n+2}{(n+1)^2+1}} \cdot x^{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n+1}{n^2+1}} \cdot x^n \times \sqrt{\frac{(n+1)^2+1}{n+2}} \cdot \frac{1}{x^{n+1}} = \frac{1}{x}$$

$\sum a_n$ குவிகிறது என்றால் $\frac{1}{x} > 1$ i.e. $x < 1$ மற்றும் வேறுபட்டது என்றால் $\frac{1}{x} < 1$ i.e. $x > 1$

சோதனை தோல்வி என்றால் $\frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x = 1$

கொடுக்கப்பட்ட தொடரில் $x = 1$ என பிரதியிட $a_n = \sqrt{\frac{n+1}{n^2+1}} \times \frac{1}{n} \sqrt{\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}}$ மேலும் $\sum b_n = \sum \frac{1}{n}$ என்பது

p -சோதனை மூலம் வேறுபட்டது.

எனவே கொடுக்கப்பட்ட தொடர் குவிகிறது என்றால் $x < 1$ மற்றும் வேறுபட்டது என்றால் $x \geq 1$

எடுத்துக்காட்டு 3.34 : $x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots \infty$

தீர்வு : இங்கே $a_n = nx^n$

$$a_{n+1} = (n+1) x^{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx^n}{(n+1) x^{n+1}} = \frac{1}{x}$$

டி' ஆல்ம்ப்ஸ் விகித சோதனை மூலம். இந்தத் தொடர் குவிகிறது

என்றால் $\frac{1}{x} > 1$ i.e. $x < 1$ மற்றும் வேறுபட்டது என்றால் $\frac{1}{x} < 1$ i.e. $x > 1$ சோதனை தோல்வி என்றால்

$$\frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x = 1$$

கொடுக்கப்பட்ட தொடரில் $x = 1$ என பிரதியிட $\sum a_n = \sum n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$$

$\therefore x = 1$ -க்கு தொடர் வேறுபட்டது

எனவே கொடுக்கப்பட்ட தொடர் $x < 1$ க்கு குவிகிறது $x \geq 1$ க்கு வேறுபட்டது.

எடுத்துக்காட்டு 3.35 : $x + \frac{3}{5}x^2 + \frac{8}{10}x^3 + \frac{15}{17}x^4 + \dots \frac{n^2-1}{n^2+1}x^n$ தொடரின் குவிகிறது சரிபார்க்கவும்.

தீர்வு : $a_n = \frac{n^2-1}{n^2+1}x^n$, $a_{n+1} = \frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2+1}x^{n+1}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-1}{n^2+1}x^n \times \frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^2-1} \cdot \frac{1}{x^{n+1}} = \frac{1}{x}$$

$\sum a_n$ குவிகிறது என்றால் $\frac{1}{x} > 1$ i.e., $x < 1$ மற்றும் வேறுபட்டது என்றால் $\frac{1}{x} < 1$ i.e., $x > 1$

சோதனை தோல்வி என்றால் $x = 1$.

கொடுக்கப்பட்ட தொடரில் $x = 1$ என பிரதியிட, நாம் பெறுவது

$$a_n = \frac{n^2-1}{n^2+1}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-1}{n^2+1} = 1$$

நேர்மறை காலத் தொடரின் முடிவால் $\sum a_n$ எனில் $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ பிறகு $\sum a_n$ நிச்சயமாக வேறுபட்டது.

∴ $\sum a_n x = 1$ -க்கு வேறுபட்டது.

$$\sum \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \cdot x_n, x < 1\text{-க்கு குவிகிறது, } x \geq 1\text{-க்கு வேறுபட்டது.}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.36 : $\sum \frac{3^n - 2}{3^n + 1} \cdot x^{n-1}, x > 0$ தொடர்களின் ஒருங்கும் தன்மையைக் காண்க:

தீர்வு : நீங்களாகவே முயற்சி செய்க.

விடை : $x < 1$ குவிகிறது மற்றும் $x \geq 1$ விலகுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3.37 : $\sum \frac{n \cdot x^n}{(n+1)(n+2)}, x > 0$ தொடரின் ஒருங்கும் தன்மையைக் காண்க.

தீர்வு : நீங்களாகவே முயற்சி செய்க.

விடை : $x < 1$ குவிகிறது மற்றும் $x \geq 1$ விலகுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3.38 : $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} + \dots \infty$

தீர்வு : நீங்களாகவே முயற்சி செய்க.

விடை : $x^2 < 1$ குவிகிறது மற்றும் $x^2 \geq 1$ விலகுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3.39 : $\frac{4}{18} + \frac{4.12}{18.27} + \frac{4.12.20}{18.27.36} + \dots \infty$

தீர்வு : குறிப்பு: தொடர் குவிகிறது

$$\text{விடை : } \frac{4.12.20 \dots (8n-4)}{18.27.36 \dots (9n+9)}$$

பயிற்சி 3.5

கீழ்க்காணும் குவிதல் தொடரை விவாதிக்க:

$$(1) 1 + \frac{2^p}{2!} + \frac{3^p}{3!} + \frac{4^p}{4!} + \dots (p > 0)$$

$$(2) \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots$$

$$(3) \frac{1^2 \cdot 2^2}{1!} + \frac{2^2 \cdot 3^2}{2!} + \frac{3^2 \cdot 4^2}{3!} + \frac{4^2 \cdot 5^2}{4!} + \dots \infty$$

$$(4) 1 + \frac{2^2}{2!} + \frac{3^2}{3!} + \frac{4^2}{4!} + \dots \infty$$

$$(5) \sum \frac{n^3 + a}{2^n + a}$$

$$(6) \sum \frac{n! \cdot 3^n}{n^n}$$

$$(7) \sum \frac{n!}{n^n}$$

$$(8) \sum \frac{n^3 - n + 1}{n!}$$

$$(9) \frac{1}{1.2.3} + \frac{x}{4.5.6} + \frac{x^2}{7.8.9} + \dots \infty (x > 0)$$

$$(10) 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{5} + \frac{x^3}{10} + \dots + \frac{x^n}{n^2 + 1} + \dots \infty$$

$$(11) \frac{x}{1.3} + \frac{x^2}{3.5} + \frac{x^3}{5.7} + \dots$$

$$(12) \frac{x}{2\sqrt{3}} + \frac{x^2}{3\sqrt{4}} + \frac{x^2}{4\sqrt{5}} + \dots \infty$$

$$(13) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$$

$$(14) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$$

$$(15) \frac{x}{1+\sqrt{1}} + \frac{x^2}{2+\sqrt{2}} + \frac{x^3}{3+\sqrt{3}} + \dots \infty$$

$$(16) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n-1)^2 \cdot 2^n}$$

$$(17) 1 + \frac{3}{2!} + \frac{5}{3!} + \frac{7}{4!} + \dots \infty$$

$$(18) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)\sqrt{n}}$$

$$(19) 1 + \frac{1^2 \cdot 2^2}{1.3.5} + \frac{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2}{1.3.5.7.9} + \dots \infty$$

$$(20) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3.6.9. \dots 3n}{4.7.10.(3n+1)} \cdot \frac{5^n}{3n+2}$$

$$(21) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+1}} \cdot x^n, (x > 0)$$

$$(22) \frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{x^2}{3\sqrt{2}} + \frac{x^4}{4\sqrt{3}} + \frac{x^6}{5\sqrt{4}} + \dots$$

$$(23) 1 + \frac{2}{5}x + \frac{6}{9}x^2 + \frac{14}{17}x^3 + \dots + \frac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}+1}x^n + \dots (x > 0)$$

$$(24) 1 + \frac{\alpha+1}{\beta+1} + \frac{(\alpha+1)(2\alpha+1)}{(\beta+1)(2\beta+1)} + \frac{(\alpha+1)(2\alpha+1)(3\alpha+1)}{(\beta+1)(2\beta+1)(3\beta+1)}$$

விடைகள்

1. குவிகிறது
2. குவிகிறது
3. விலகுகிறது
4. குவிகிறது
5. குவிகிறது
6. விலகுகிறது
7. குவிகிறது
8. குவிகிறது
9. $x \leq 1$ எனும்போது குவிகிறது, $x > 1$ எனும்போது விலகுகிறது.
10. $x \leq 1$ எனும்போது குவிகிறது, $x > 1$ எனும்போது விலகுகிறது.
11. $x \leq 1$ குவிகிறது, $x > 1$ விலகுகிறது
12. $x \leq 1$ எனும்போது குவிகிறது, $x > 1$ எனும்போது விலகுகிறது
13. குவிகிறது
14. குவிகிறது
15. $x < 1$ எனும்போது குவிகிறது, $x \geq 1$ எனும்போது விலகுகிறது.
16. $x \geq 2$ எனும்போது குவிகிறது, $x > 2$ எனும்போது விலகுகிறது.
17. குவிகிறது

18. $x \leq 1$ எனும்போது குவிகிறது, $x > 1$ எனும்போது விலகுகிறது
19. குவிகிறது 20. விலகுகிறது
21. $x < 1$ எனும்போது குவிகிறது, $x \geq 1$ எனும்போது விலகுகிறது.
22. $x^2 \leq 1$ எனும்போது குவிகிறது, $x^2 > 1$ எனும்போது விலகுகிறது.
23. $x < 1$ எனும்போது குவிகிறது, $x \geq 1$ எனும்போது விலகுகிறது.
24. $\beta > \alpha > 0$ எனும்போது குவிகிறது, $\alpha \geq \beta > 0$ எனும்போது விலகுகிறது.

3.3.7 காஷிஸ் மூலம் சோதனை (Cahchy's Root Test)

$\sum a_n$ என்பது ஒரு நேர்மறை உறுப்புத் தொடர் எனில் மற்றும் $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = l$, பின்னர்

- i. $l < 1$ எனில் $\sum a_n$ குவிகிறது
- ii. $l > 1$ எனில் $\sum a_n$ விலகுகிறது

$l = 1$ எனில் தேர்வு தோல்வி அடைகிறது. அதாவது தொடர் குவிகிறது அல்லது விலகுகிறது பற்றி எந்த முடிவும் எடுக்க முடியாது.

தீர்க்கப்பட்ட உதாரணங்கள்

எடுத்துக்காட்டு 3.40 : $\sum \frac{1}{n^n}$ என்ற குவி தொடரை சரிப்பார்க்க.

தீர்வு : இங்கு $\sum a_n = \sum \frac{1}{n^n}$

$$a_n = \frac{1}{n^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^n} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$$

காஷிஸ் சோதனையின் மூலம், இந்த தொடர் குவிகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3.41 : $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$ என்ற குவி தொடரை சரிப்பார்க்க.

தீர்வு : இங்கு $a_n = \frac{1}{(\log n)^n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\log n)} < 1$$

$\therefore$ தொடர் குவிகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3.42 : $\sum \left(\frac{n+1}{3n} \right)^n$ என்ற குவி தொடரை சரிப்பார்க்க.

தீர்வு : நீங்களாகவே முயற்சி செயது பாருங்கள்.

விடை : தொடர் குவிகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3.43 : $\sum \frac{(n-1 \log n)^n}{2^n n^n}$ என்ற குவி தொடரை சரிப்பார்க்க.

தீர்வு : நீங்களாகவே முயற்சி செய்து பாருங்கள்.

விடை : தொடர் குவிகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3.44 : $\sum \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n^{3/2}}$ என்ற குவி தொடரை சரிப்பார்க்க.

தீர்வு : இங்கு $a_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n^{3/2}}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{1/n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^{3/2}}} \right]^{1/n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

இது 1 ஐ விடக் குறைவு $\left(\frac{1}{e} < 1\right)$

$\therefore$ தொடர் குவிகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3.45 : $\sum \left(\frac{nx}{(n+1)}\right)^n$ என்ற குவி தொடரை சரிப்பார்க்க.

தீர்வு : இங்கு $a_n = \left(\frac{nx}{(n+1)}\right)^n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = x$$

$x < 1$ எனில் தொடர் குவிகிறது.

$x > 1$ எனில் விலகுகிறது.

$x = 1$ எனில் தேர்வு தோல்வி அடைகிறது.

$x = 1$ எனப் பிரதியிட கொடுக்கப்பட்ட தொடர்

$$a_n = \left(\frac{nx}{(n+1)}\right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \right) = \frac{1}{e} \neq 0$$

அதாவது $\sum a_n$ விலகுகிறது. $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \text{ எனில், பின்னர் } \sum a_n \text{ குவியவில்லை} \right)$

எனவே தொடர் $x < 1$ எனில் குவிகிறது மற்றும் $x \geq 1$ எனில் விலகுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3.46 : $\sum 5^{-n}(-1)^n$ என்ற குவி தொடரை சரிப்பார்க்க.

தீர்வு : நீங்களாகவே முயற்சி செயது பாருங்கள்.

விடை : தொடர் குவிகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3.47 : $1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3^2} + \frac{x^3}{4^3} + \dots \infty$ என்ற குவி தொடரை சரிப்பார்க்க

தீர்வு : இங்கு $a_n = \frac{x^{n-1}}{n^{n-1}}$ (முதல் உறுப்பை விட்டுவிட)

$$(a_n)^{\frac{1}{n}} = \frac{x^{\frac{n-1}{n}}}{n^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{x^{1-\frac{1}{n}}}{n^{1-\frac{1}{n}}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x \cdot x^{\frac{-1}{n}}}{n \cdot n^{\frac{-1}{n}}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} = 0 < 1$$

$\therefore$ தொடர் குவிகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3.48 : $\sum \frac{(1+nx)^n}{n^n}$ குவிகிறதா என சோதிக்க.

தீர்வு : நீங்களாகவே முயற்சி செயது பாருங்கள்.

விடை : $x < 1$ எனில் குவிகிறது மற்றும் $x \geq 1$ எனில் விலகுகிறது.

பயிற்சி 3.7

கீழ்க்கண்ட குவிதல் தொடரை சோதிக்க:

1. $\sum \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$ (or) $\sum \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n^2}$
2. $\left(\frac{2^2}{1^2} - \frac{2}{1} \right)^{-1} + \left(\frac{3^3}{2^3} - \frac{3}{2} \right)^{-3} + \left(\frac{4^4}{3^4} - \frac{4}{3} \right)^{-3} + \dots$
3. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}x + \left(\frac{3}{4} \right)^2 x^2 + \left(\frac{4}{5} \right)^3 x^3 + \dots (x > 0)$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1) \cdot x^n}{n^{n+1}}$
5. $\frac{2x}{1^2} + \frac{3^2 x^2}{2^3} + \frac{4^3 x^3}{3^4} + \dots + \frac{(n+1)^n x^n}{n^{n+1}} + \dots$

- பின்னர் $\sum a_n, \lambda > 1$ எனில் குவிகிறது மற்றும் $\lambda \leq 1$ எனில் விலகுகிறது.

குறிப்புகள் :

- a. காஸ் சோதனையைப் பயன்படுத்துவதற்கு, $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ சக்தியை $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\lambda}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ அங்கு $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ என்பது $\frac{1}{n}$ இன் அதிக சக்தியின் விதிமுறைகளைக் குறிக்கிறது.
- b. இந்தத் தொடர் வேறுபடுகிறது என்று நமக்குத் தெரிந்ததால் சோதனை ஒருபோதும் தோல்வியடையாது $\lambda = 1$. மேலும் விகிதச் சோதனை தோல்விக்குப் பிறகு மற்றும் $\frac{1}{n}$ இருமொழித் தேற்றத்தின் அதிகாரத்தில் விரிவாக்கம் $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ சாத்தியமாகும்போது சோதனை பயன்படுத்தப்படுகிறது அல்லது வேறு எந்த முறையும்.

சில தீர்க்கப்பட்ட உதாரணங்கள்

எடுத்துக்காட்டு 3.49: கீழ்க்கண்ட குவிதல் தொடரை சோதிக்க:

$$\begin{aligned} a. \quad & 1 + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^2 \cdot 4^2}{3^2 \cdot 5^2} + \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2} + \dots \infty \\ b. \quad & 1 + \frac{3}{7}x + \frac{3 \cdot 6}{7 \cdot 10}x^2 + \frac{3 \cdot 6 \cdot 9}{7 \cdot 10 \cdot 13}x^3 + \dots \infty \\ c. \quad & 1 + \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{1 \cdot 3 \cdot 5} \cdot \frac{1}{4} + \dots \infty \\ d. \quad & x + \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{3^3 x^3}{3!} + \frac{4^4 x^4}{4!} + \frac{5^5 x^5}{5!} + \dots \infty \end{aligned}$$

தீர்வு : a. $1 + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^2 \cdot 4^2}{3^2 \cdot 5^2} + \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2} + \dots \infty$

முதல் உறுப்பை விட்டுவிட

$$a_n = \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \dots (2n)^2}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \dots (2n+1)^2}$$

$$a_{n+1} = \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \dots (2n)^2 (2n+2)^2}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \dots (2n+1)^2 (2n+3)^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)^2}{(2n+2)^2} = 1$$

டி ஆல்மப்ட்ஸ் விகித சோதனை தோல்வி, தற்பொழுது ரேபிஸ் சோதனையை நாம் தேர்ந்தெடுக்க.

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 = \frac{(2n+3)^2}{(2n+2)^2} - 1$$

$$\frac{4n^2 + 9 + 12n - 4n^2 - 4 - 8n}{(2n+2)^2} = \frac{4n + 5}{(2n+2)^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{5}{n}}{\left(2 + \frac{2}{n}\right)^2} = 1$$

ரேபிஸ் சோதனை தோல்வி,

தற்பொழுது காஸ் சோதனையை நாம் தேர்ந்தெடுக்க.

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{(2n+3)^2}{(2n+2)^2} \\ &= \left(1 + \frac{3}{2n}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{2n}\right)^2 \\ &= \left[1 + \frac{3}{2n} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] \left[1 + \frac{2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\ &= 1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

$$\text{ஒப்பிடும்போது} = 1 + \frac{\lambda}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow \lambda = 1$$

$\therefore$ காஸ் சோதனையின் படி தொடர் விலகுகிறது.

$$\text{b. தீர்வு : } 1 + \frac{3}{7}x + \frac{3.6}{7.10}x^2 + \frac{3.6.9}{7.10.13}x^3 + \dots \infty$$

$$\begin{aligned} \text{முதல் உறுப்பை விட்டுவிட} \quad a_n &= \frac{3.6.9 \dots 3n}{7.10.13 \dots (3n+4)} x^n \\ a_{n+1} &= \frac{3.6.9 \dots 3n (3n+3)}{7.10.13 \dots (3n+4) (3n+7)} x^{n+1} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+7}{3n+3} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

$\frac{1}{x} > 1$ எனில் தொடர் குவிகிறது. i.e. $x < 1$

$\frac{1}{x} < 1$ எனில் தொடர் விலகுகிறது. i.e. $x > 1$

$x = 1$ எனில் சோதனை தோல்வி,

தற்பொழுது ரேபிஸ் சோதனையை நாம் தேர்ந்தெடுக்க, $x = 1$ என பிரதியிட, நமக்கு கிடைப்பது,

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 &= \frac{3n+7}{3n+3} - 1 = \frac{3n+7-3n-3}{3n+3} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{3n+3} = \frac{4}{3} > 1 \end{aligned}$$

∴ $\sum a_n$ குவிகிறது.

$x \leq 1$ எனில் குவிகிறது, $x > 1$ எனில் விலகுகிறது.

c. தீர்வு : $1 + \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2.4}{1.3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2.4.6}{1.3.5} \cdot \frac{1}{4} + \dots \infty$

முதல் உறுப்பை விட்டுவிட $a_n = \frac{2.4.6 \dots 2n}{1.3.5 \dots (2n-1)} \cdot \frac{1}{(n+1)}$

$$a_{n+1} = \frac{2.4.6 \dots 2n (2n+2)}{1.3.5 \dots (2n-1) (2n+1)} \cdot \frac{1}{(n+2)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{n+2}{(n+1)} = 1$$

∴ டி ஆல்மப்ட்ஸ் விகித சோதனை தோல்வி,
தற்பொழுது ரேபிஸ் சோதனையை நாம் தேர்ந்தெடுக்க.

$$\left[\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right] = \frac{n}{2n^2 + 4n + 2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right] = \frac{1}{2} < 1$$

ரேபிஸ் சோதனையின் படி தொடர் விலகுகிறது.

d. தீர்வு : $x + \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{3^3 x^3}{3!} + \frac{4^4 x^4}{4!} + \frac{5^5 x^5}{5!} + \dots \infty$

இங்கு,

$$a_n = \sum \frac{n^n x^n}{n!}$$

$$a_{n+1} = \sum \frac{(n+1)^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n^n x^n}{n!} \times \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1} x^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \right] = \frac{1}{ex}$$

$$\frac{1}{ex} > 1 \text{ தொடர் குவிகிறது i.e. } ex < 1, x < \frac{1}{e}$$

$$\frac{1}{ex} < 1 \text{ தொடர் விலகுகிறது. i.e. } x > \frac{1}{e}$$

$x = \frac{1}{e}$ எனில் சோதனை தோல்வி

$\frac{a_n}{a_{n+1}}$ -ல் e உள்ளது, மடக்கை சோதனையின் படி,

$x = \frac{1}{e}$ என பிரதியிட, நமக்கு கிடைப்பது,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\begin{aligned} \log \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \log e - n \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= 1 - n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \dots\right) \end{aligned}$$

$$\log \frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2} + \dots\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2} + \dots\right] = \frac{1}{2} < 1$$

$\therefore x = \frac{1}{e}$ எனில் $\sum a_n$ விலகுகிறது.

எனவே கொடுக்கப்பட்ட தொடர் $x < \frac{1}{e}$ எனில் குவிகிறது, $x \geq \frac{1}{e}$ எனில் விலகுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3.50 : $1^p + \left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^p + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^p + \dots$ குவிகிறதா என சோதிக்க

தீர்வு : முதல் உறுப்பை விட்டுவிட

$$a_n = \left[\frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots (2n)} \right]^p$$

$$a_{n-1} = \left[\frac{1.3.5 \dots (2n-1) (2n+1)}{2.4.6 \dots (2n) (2n+2)} \right]^p$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+2}{2n+1} \right)$$

விகித சோதனை தோல்வி

தற்பொழுது காஸ் சோதனையை நாம் தேர்ந்தெடுக்க

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{-p} = \left[1 + \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \left[1 + \frac{p}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\ &= \left[1 + \left(p - \frac{p}{2}\right) \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \end{aligned}$$

$$= 1 + \frac{p}{2} \cdot \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)^{-p}$$

இங்கு $\lambda = 1 + \frac{p}{2}$

காஸ் சோதனையின் படி, $\frac{p}{2} > 1$ எனில் $\sum a_n$ குவிகிறது. *i.e.* $p > 2$ மற்றும் $p \leq 2$ எனில் விலகுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3.51 : $\frac{a}{b} + \frac{a(a+1)}{b(b+1)} + \frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(a+2)}$ குவிகிறது என சோதிக்க

தீர்வு : குறிப்பு : $a_n = \frac{a(a+1) \dots (n+a)}{b(b+1) \dots (n+b)}$

விடை : $b > 1 + a$ எனில் தொடர் குவிகிறது மற்றும் $b \leq 1 + a$ எனில் விலகுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3.52 : $\sum \frac{n!}{x(x+1)(x+2) \dots (x+n-1)}$ குவிகிறது என சோதிக்க

தீர்வு : இங்கு $a_n = \frac{n!}{x(x+1)(x+2) \dots (x+n-1)}$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{x(x+1)(x+2) \dots (x+n)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x+n}{(n+1)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(1 + \frac{x}{n}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = 1$$

$\therefore$ டி ஆல்மப்ட்ஸ் விகித சோதனை தோல்வி,

தற்பொழுது காஸ் சோதனையை நாம் தேர்ந்தெடுக்க.

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \\ &= \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left[1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\ &= \left[1 + \frac{x-1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \end{aligned}$$

இங்கு $\lambda = x-1$

காஸ் சோதனையின் படி, $x-1 > 1$ எனில் தொடர் குவிகிறது. *i.e.* $x > 2$ மற்றும் $x-1 \leq 1$ எனில் விலகுகிறது. *i.e.* $x \leq 2$

எடுத்துக்காட்டு 3.53 : $\frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{3.4} + \frac{x^3}{5.6} + \frac{x^4}{7.8} + \dots \infty$ ($x > 0$) குவிகிறதா என சோதிக்க

தீர்வு : இங்கு $a_n = \frac{x^n}{(2n-1)(2n)}$

$$a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{2n(2n-1)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

$\therefore$ $\frac{1}{x}$ ஆல்மப்படஸ் விகித சோதனையின் படி, $x < 1$ எனில் தொடர் குவிகிறது மற்றும் $x > 1$ எனில் விலகுகிறது.

ரேபிஸ் சோதனையின் படி, $x = 1$ என பிரதியிட,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{4n^2 + 6n + 2}{4n^2 - 2n} - 1 \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{4n^2 + 6n + 2 - 4n^2 + 2n}{4n^2 - 2n} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{8n + 2}{4n^2 - 2n} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{8n^2 + 2n}{4n^2 - 2n} \right] = 2 > 1 \end{aligned}$$

$\therefore$ தொடர் குவிகிறது.

காஸ் சோதனையின் படி, $x \leq 1$ எனில் தொடர் குவிகிறது மற்றும் $x > 1$ எனில் விலகுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3.54 : $1 + \frac{a}{1!} + \frac{a(a+1)}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)}{3!} + \dots$ குவிகிறதா என சோதிக்க

தீர்வு : முதல் உறுப்பை விட்டுவிட

$$a_n = \frac{a(a+1)(a+2) \dots (a+n-1)}{n!}$$

$$a_{n+1} = \frac{a(a+1)(a+2) \dots (a+n-1)(a+n)}{(n+1)!}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{a+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{a}{n}} = 1$$

$\therefore$ விகித சோதனை தோல்வி

தற்பொழுது ரேபிஸ் சோதனையை நாம் தேர்ந்தெடுக்க

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{n+1}{a+n} - 1 \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n(1-a)}{a+n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-a}{\frac{a}{n} + 1} = 1 - a\end{aligned}$$

ரேபிஸ் சோதனையின் படி, $1-a > 1$ எனில் தொடர் குவிகிறது. *i.e.* $a < 0$ மற்றும் $1-a < 1$ எனில் விலகுகிறது. *i.e.* $a > 0$.

$1-a = 1$ எனில் $a = 0$ சோதனை தோல்வி,

இந்த வகையில் கிடைக்கும் தொடர் $1 + 0 + 0 + \dots$

இந்த தொடர் குவிகிறது.

எனவே, தொடர் $\sum a_n$, $a \leq 0$, எனில் குவிகிறது மற்றும் $a > 0$ எனில் விலகுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3.55 : $\sum \frac{1.3.5. \dots (2n-1)}{2.4.6. \dots (2n)} \cdot x^{2n}$, $x > 0$ குவிகிறதா என சோதிக்க.

தீர்வு : நீங்களாகவே முயற்சி செய்க.

விடை : தொடர் $x^2 \leq 1$ எனில் குவிகிறது மற்றும், $x^2 > 1$ எனில் விலகுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3.56 : $1 + \frac{(1!)^2}{2!} x^2 + \frac{(2!)^2}{4!} x^4 + \frac{(3!)^2}{6!} x^6 + \dots \infty$ ($x > 0$) குவிகிறதா என சோதிக்க

தீர்வு : இங்கு $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^{2n}$

$$a_{n+1} = \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} x^{2n+2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n!}{(2n)!} \times \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)(n+1)n! n!} \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(2n+1)}{(n+1)} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{4}{x^2}$$

விகித சோதனையின் படி, $\sum a_n \frac{4}{x^2} > 1$ எனில் குவிகிறது *i.e.* $x^2 < 4$ மற்றும் $\frac{4}{x^2} < 1$ எனில் விலகுகிறது. *i.e.* $x^2 > 4$.

$x^2 = 4$ சோதனை தோல்வி

ரேபிஸ் சோதனையின் படி, $x^2 = 4$ என பிரதியிட,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{4n+2-4n-4}{4(n+1)} \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n}{4(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} \left[\frac{-2}{4 \left(1 + \frac{1}{n} \right)} \right] = \frac{1}{2} < 1$$

ரேபிஸ் சோதனையின் படி, தொடர் குவிகிறது.

எனவே, தொடர் $x^2 > 4$ எனில் குவிகிறது மற்றும் $x^2 \geq 4$ எனில் விலகுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3.57 : $\frac{x^2}{2 \log 2} + \frac{x^3}{3 \log 3} + \frac{x^4}{4 \log 4} + \dots \infty$ குவிகிறதா என சோதிக்க

தீர்வு : குறிப்பு: $a_n = \frac{x^{n-1}}{(n+1) \log(n+1)}$

விடை : தொடர் $x < 1$ எனில் குவிகிறது மற்றும் $x \geq 1$ எனில் விலகுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3.58 : $1 + \frac{a}{b}x + \frac{a(a+1)}{b(b+1)}x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)}x^3 + \dots$ குவிகிறதா என சோதிக்க

தீர்வு : முதல் உறுப்பை விட்டுவிட

$$a_n = \frac{a(a+1)(a+2) \dots (a+n-1)}{b(b+1)(b+2) \dots (b+n-1)} x^n \quad (x \geq 0)$$

$$a_{n+1} = \frac{a(a+1)(a+2) \dots (a+n)}{b(b+1)(b+2) \dots (b+n)} x^{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b+n}{a+n} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

விகித சோதனையின் படி, $\sum a_n \frac{1}{x} > 1$, எனில் குவிகிறது i.e., $x < 1$ மற்றும் $\frac{1}{x} < 1$ எனில் விலகுகிறது.
i.e. $x > 1$.

$x = 1$ சோதனை தோல்வி

ரேபிஸ் சோதனையின் படி, $x = 1$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b-a)n}{a+n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b-a)}{\left(1 + \frac{a}{n} \right)} = (b-a) \end{aligned}$$

ரேபிஸ் சோதனையின் படி, $\sum a_n b - a > 1$ எனில் குவிகிறது மற்றும் $b - a < 1$ எனில் விலகுகிறது
i.e. $b < 1 + a$.

$b - a$ எனில், காஸ் சோதனையின் படி

$$\begin{aligned}
 \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{b+n}{a+n} = \frac{a+1+n}{a+n} \\
 &= \frac{a+1+n}{a+n} = \frac{n \left(1 + \frac{a+1}{n}\right)}{n \left(1 + \frac{a}{n}\right)} \\
 &= \left[1 + \left(\frac{a+1}{n}\right)\right] \left[1 - \left(\frac{a}{n}\right) + \left(\frac{a}{n}\right)^2 + \dots\right] \\
 &= 1 + \left(\frac{a+1}{n}\right) - \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
 &= 1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)
 \end{aligned}$$

காஸ் சோதனையின் படி, $\sum a_n x = 1$ எனில், விலகுகிறது $b - a = 1$.

எனவே, தொடர் $x < 1$ எனில் குவிகிறது மற்றும் $x > 1$ எனில் விலகுகிறது.

$x = 1$ எனும்போது $b - a > 1$ எனில் குவிகிறது மற்றும் $b - a \leq 1$ எனில் விலகுகிறது.

பயிற்சி 3.8

கீழ்க்காணும் குவிதல் அல்லது விலகுதல் தொடரை சரிப்பார்க்க:

1. $\frac{1^2}{4^2} + \frac{1^2 \cdot 5^2}{4^2 \cdot 8^2} + \frac{1^2 \cdot 5^2 \cdot 9^2}{4^2 \cdot 8^2 \cdot 12^2} + \dots \infty$
2. $\frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} x + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} x^2 + \dots \infty$
3. $1 + \frac{2x}{2!} + \frac{3^2 x^2}{3!} + \frac{4^3 x^3}{4!} + \dots \infty$
4. $\frac{a}{b} + \frac{a(a+d)x}{b(b+d)} + \frac{a(a+d)(a+2d)x^2}{b(b+d)(b+2d)} + \dots$
5. $1 + \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \dots$
6. $\frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^3}{3.4} + \frac{x^4}{4.5} + \dots \infty$
7. $\sum \frac{4.7.10 \dots (3n+1)x^n}{1.2.3 \dots n}$
8. $\frac{1}{2}x + x^2 + \frac{9x^3}{8} + x^4 \frac{25x^5}{32} + \dots \infty$
9. $\frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} + \frac{1.3.5}{2.4.6} + \dots$
10. $\frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} x + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} x^2 + \dots$
11. $\frac{x}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots$
12. $1 + \frac{x}{2} + \frac{2!}{3^2} x^2 + \frac{3!}{4^3} x^3 + \frac{4!}{5^4} x^4 + \dots$
13. $\frac{a+x}{1!} + \frac{(a+2x)^2}{2!} + \frac{(a+3x)^3}{3!} + \dots$
14. $x^2 (\log 2)^q + x^3 (\log 3)^q + x^4 (\log 4)^q + \dots$

15. $1 + \frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3 + \dots$
16. $1 + \frac{2}{3}x + \frac{2.3}{3.5}x^2 + \frac{2.3.4}{3.5.7}x^3 + \dots$
17. $1 + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^2.4^2}{3^2.4^2}x^2 + \frac{2^2.4^2.6^2}{3^2.5^2.7^2}x^3 + \dots \infty$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$
19. $\sum \frac{n^2 (n+1)^2}{n!}$
20. $\frac{1}{(\log 2)^k} + \frac{1}{(\log 3)^k} + \frac{1}{(\log 4)^k} + \dots \infty$

விடைகள்

1. குவிகிறது
2. $x < a$ எனில் குவிகிறது, $x \geq 1$, எனில் விலகுகிறது.
3. $x \leq \frac{1}{e}$ எனில் குவிகிறது, $x > \frac{1}{e}$ எனில் விலகுகிறது
4. $x < 1$ எனில் குவிகிறது, அல்லது $x = 1$ மற்றும், $b > a + d$, $x > 1$ அல்லது $x = 1$ மற்றும் $b \leq a + d$ எனில் விலகுகிறது
5. $x < 1$ எனில் குவிகிறது, $x \geq 1$ எனில் விலகுகிறது.
6. $x \leq 1$ எனில் குவிகிறது, $x > 1$ எனில் விலகுகிறது.
7. $x < \frac{1}{3}$ எனில் குவிகிறது, $x \geq \frac{1}{3}$ எனில் விலகுகிறது
8. $x < 2$ எனில் குவிகிறது, $x \geq 2$ எனில் விலகுகிறது.
9. விலகுகிறது.
10. விலகுகிறது.
11. $x^2 \leq 1$ எனில் குவிகிறது மற்றும், $x^2 > 1$ எனில் விலகுகிறது.
12. $x < e$ எனில் குவிகிறது மற்றும் $x \geq e$ எனில் விலகுகிறது.
13. $x < \frac{1}{e}$ எனில் குவிகிறது மற்றும் $x \geq \frac{1}{e}$ எனில் விலகுகிறது
14. $x < 1$ எனில் குவிகிறது மற்றும் $x \geq 1$ எனில் விலகுகிறது.
15. $x < 1$ எனில் குவிகிறது மற்றும் $x > 1$ எனில் விலகுகிறது,
 $x = 1$ எனில் குவிகிறது, $\gamma > \alpha + \beta$ & $\gamma \leq \alpha + \beta$ எனில் விலகுகிறது
16. $x < 2$ எனில் குவிகிறது, $x \geq 2$ எனில் விலகுகிறது.
17. $x < 1$ எனில் குவிகிறது, $x \geq 1$ எனில் விலகுகிறது.
18. $x < \frac{1}{4}$ எனில் குவிகிறது, $x \geq \frac{1}{4}$ எனில் விலகுகிறது
19. குவிகிறது
20. விலகுகிறது

3.3.11 காஷி தொகையீட்டு சோதனை (Cauchy's Integral Test)

$f(x)$ என்பது $x \geq 1$ இன் எதிர்மறை அல்லாத, ஒரே மாதிரியாக குறைந்து மற்றும் ஒருங்கிணைந்த செயல்பாடாக இருந்தால் $f(n) = a_n$, " $n \in N$ பின்னர் தொடர் $\sum a_n$ மற்றும் ஒருங்கிணைந்த $\int_1^\infty f(x)$ குவிகிறது அல்லது ஒன்றாக வேறுபடுகிறது.

குறிப்பு : $x \geq k$ என்றால், $\sum a_n$ மற்றும் $\int_k^\infty f(x) dx$ குவிகிறது அல்லது ஒன்றாக வேறுபடுகிறது.

சில தீர்க்கப்பட்ட உதாரணங்கள்

எடுத்துக்காட்டு 3.59 : தொகையீட்டு சோதனையின் மூலம் கீழ்க்கண்ட குவிதல் தொடரை விவாதிக்க:

i. $\sum \frac{1}{2n+3}$

ii. $\sum \frac{1}{n(n+1)}$

iii. $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$

iv. $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$

v. $\sum \frac{2n^3}{n^4+3}$

vi. $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$

தீர்வு : i. $\sum \frac{1}{2n+3}$

இங்கு $a_n = \frac{1}{2n+3} = f(n)$

$f(x) = \frac{1}{2x+3}$, $x > 1$, $f(x)$ ஒரு (+)ve மற்றும் ஒத்திசைவாக குறைகிறது.

$\therefore$ காஷி தொகையீட்டு சோதனை பொருந்துகிறது.

$$= \int_1^\infty f(x) dx = \int_1^\infty \frac{1}{2x+3} dx$$

$$= \frac{1}{2} [\log (2x+3)]_1^\infty$$

$$= \frac{1}{2} [\log \infty - \log 5] = \infty$$

$\therefore$ விலகுகிறது.

ii. $\sum \frac{1}{n(n+1)}$

இங்கு $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = f(n)$

$f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$, $x \geq 1$, $f(x)$ ஒரு (+)ve மற்றும் ஒத்திசைவாக குறைகிறது

$\therefore$ காஷி தொகையீட்டு சோதனையின் படி,

$$= \int_1^\infty f(x) dx = \int_1^\infty \frac{1}{x(x+1)} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_1^{\infty} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right] dx = [\log x - \log(1+x)]_1^{\infty} \\
&= \left[\log \left(\frac{x}{x+1} \right) \right]_1^{\infty} = \left[\log \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \right) \right]_1^{\infty} \\
&= \log 1 - \log \frac{1}{2} = \log 1 - \log 1 + \log 2 \\
&= \log 2 \text{ (முடிவுறு), எனவே } \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ குவிகிறது மற்றும்}
\end{aligned}$$

∴ கொடுக்கப்பட்ட தொடர் குவிகிறது.

iii. $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$

தீர்வு : நீங்களாகவே முயற்சி செய்யுங்கள்.

விடை : விலகுகிறது.

iv. $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$

தீர்வு : நீங்களாகவே முயற்சி செய்யுங்கள்.

விடை : குவிகிறது

v. $\sum \frac{2n^3}{n^4+3}$

தீர்வு : நீங்களாகவே முயற்சி செய்யுங்கள்.

விடை : விலகுகிறது

vi. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$

தீர்வு : இங்கு $a_n = \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}} = f(n)$

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, x \geq 2, f(x) \text{ ஒரு (+)ve மற்றும் ஒத்திசைவாக குறைகிறது.}$$

∴ காவதி தொகையீட்டு சோதனை பொருந்துகிறது.

$$\begin{aligned}
\int_2^{\infty} f(x) dx &= \int_2^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = [\sec^{-1} x]_2^{\infty} \\
&= \left[\cos^{-1} \frac{1}{x} \right]_2^{\infty} = \left[\cos^{-1} 0 - \cos^{-1} \frac{1}{2} \right]_2^{\infty} \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} \text{ (முடிவுறு)}
\end{aligned}$$

∴ $\int_2^{\infty} f(x) dx$ குவிகிறது மற்றும் எனவே $\sum a_n$ -ம் குவிகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3.60 : கீழ்க்காணும் வரிசை குவிகிறதா என தொகையீட்டு சோதனையின் மூலம் விவாதிக்க:

i. $\sum n \cdot e^{-n^2}$

ii. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log n (\log \log n)^p}, p > 0$

iii. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\log n)^2}$

iv. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \log (n+1)}$

தீர்வு : i. $\sum n \cdot e^{-n^2}$

இங்கு $a_n = n e^{-n^2} = f(n)$

$f(x) = x e^{-x^2}, x \geq 1, f(x)$ ஒரு (+)ve மற்றும் ஒத்திசைவாக குறைகிறது

$\therefore$ காணி தொகையீட்டு சோதனை பொருந்துகிறது.

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} x e^{-x^2} dx$$

$x^2 = t$, பிரதியிட $2x dx = dt$, எனில் $x dx = \frac{dt}{2}$

$$= \frac{1}{2} \int_1^{\infty} e^{-t} dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{e^{-t}}{-1} \right]_1^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2} \left[e^{-\infty} - \frac{1}{e} \right] = \frac{1}{2e} \text{ (முடிவறு)}$$

$\therefore \int_1^{\infty} f(x) dx$ குவிகிறது மற்றும் எனவே $\sum a_n$ ம் குவிகிறது.

ii. **தீர்வு :** $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log n (\log \log n)^p}, p > 0$

இங்கு $a_n = \frac{1}{n \cdot \log n (\log \log n)^p} = f(n)$

$f(x) = \frac{1}{x \cdot \log x (\log \log x)^p}, x \geq 3, p > 0$

$f(x)$ ஒரு (+)ve மற்றும் ஒத்திசைவாக குறைகிறது

$\therefore$ காணி தொகையீட்டு சோதனை பொருந்துகிறது.

வகை i : $p > 1$ எனில் $I_n = \int_3^n \frac{1}{x \cdot \log x (\log \log x)^p} dx, n \rightarrow \infty$ எனும்போது

இங்கு $\log (\log x) = t$

$$\frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x} dx = dt$$

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_1^n \frac{1}{t^p} dt = \left[\frac{t^{-p+1}}{-p+1} \right]_1^n = \left[\frac{(\log(\log x))^{-p+1}}{-p+1} \right]_3^n \\
&= \frac{1}{-p+1} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} (\log(\log n))^{-p+1} - (\log(\log 3))^{-p+1} \right] \\
&= \frac{1}{1-p} \left[(\log(\log \infty))^{-p+1} - (\log(\log 3))^{-p+1} \right] \\
&= \frac{1}{1-p} \left[(\infty)^{(-)ve} - \frac{1}{(\log(\log 3))^{p-1}} \right] \\
&= \frac{-1}{1-p} \left[\frac{1}{(\log(\log 3))^{p-1}} \right] \quad (\text{முடிவறு})
\end{aligned}$$

$\therefore p > 1$ எனும்போது குவிகிறது.

வகை ii : $p < 1$ எனும்போது $I_n = \frac{1}{1-p} \left[(\infty)^{(+ve)} - \frac{1}{(\log(\log 3))^{p-1}} \right] = \infty$

$\therefore p < 1$ எனும்போது விலகுகிறது.

வகை iii : $p = 1$, $I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_3^n \frac{1}{x \cdot \log x (\log \log x)^p} dx$

இங்கு

$$\begin{aligned}
&\log(\log x) \quad t = t \\
&\frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x} dx = dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_t^t \frac{1}{t} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \log t \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} [\log \log \log x]_3^n \\
&= \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \log \log \log n - \log \log \log x \right] = \infty
\end{aligned}$$

$\therefore$ விலகுகிறது.

$\therefore t > 1$ வரிசை குவிகிறது மற்றும் $0 < p < 1$ எனும்போது விலகுகிறது.

iii. **தீர்வு :** நீங்களாகவே முயற்சி செய்யுங்கள்.

விடை : குவிகிறது

iv. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \log(n+1)}$

இங்கு $a_n = \frac{1}{(n+1) \log(n+1)} = f(n)$

$$f(x) = \frac{1}{(x+1) \log(x+1)}$$

$x \geq 1$ எனும்போது $f(x)$ ஒரு (+)ve மற்றும் ஒத்திசைவாக குறைகிறது

$\therefore$ காவதி தொகையீட்டு சோதனை பொருந்துகிறது.

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{(x+1) \log(x+1)} dx &= [\log \log(x+1)]_1^{\infty} \\ &= \log \log(\infty + 1) - \log \log(2) = \infty \end{aligned}$$

$\therefore$ விலகுகிறது.

$$\int_1^{\infty} f(x) dx \text{ விலகுகிறது மற்றும் எனவே } \sum a_n \text{ ம் விலகுகிறது.}$$

பயிற்சி 3.9

தொகையீட்டு சோதனைமூலம், கீழ்க்காணும் வரிசை குவிகிறதா அல்லது விலகுகிறதா என சோதிக்க:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2 + 1)^2}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$
4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}, p > 0$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8 \tan^{-1} n}{1 + n^2}$

விடைகள்

1. குவிகிறது
2. குவிகிறது
3. $p > 1$ வரிசை குவிகிறது மற்றும் $0 < p < 1$ எனும்போது விலகுகிறது.
4. $p > 1$ வரிசை குவிகிறது மற்றும் $0 < 1 < p$ எனும்போது விலகுகிறது.
5. குவிகிறது

3.3.12 மாற்று வரிசை

ஒரு வரிசையின் வடிவம் $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots a_n > 0$ எனும்போது $n \in N$ எனில், மாற்று வரிசை என

அழைக்கப்படும். இவை $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ என குறிக்கப்படுகிறது.

உதாரணமாக :

$$1. \quad 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$2. \quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}$$

3.3.11.1 மாற்று வரிசைக்கான லிபினிட்ஸ் சோதனை (Leibnitz's Test for Convergence of Alternating Series)

ஒரு மாற்று வரிசை $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$ ($a_n > 0 \forall n$) குவிகிறது எனில்

i. $a_{n+1} < a_n$ n -ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும்.

ii. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

குறிப்புகள் :

a. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ எனில், $\sum (-1)^n \cdot a_n$ என்ற வரிசை அலைவுறுகிறது.

b. ஒரு மாற்று வரிசை குவியவில்லை எனில் மேற்கண்ட இரு நிபந்தனையை நிறைவு செய்யவில்லை.

சில தீர்க்கப்பட்ட உதாரணங்கள்

எடுத்துக்காட்டு 3.61 : கீழ்க்காணும் வரிசை குவிகிறதா என விவாதிக்க :

a. $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots \infty$

b. $\frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log 3} + \frac{1}{\log 4} - \frac{1}{\log 5} + \dots \infty$

c. $\frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{4}+1} - \frac{1}{\sqrt{5}+1} + \dots \infty$

தீர்வு :

a. $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots \infty$

இங்கு $\sum (-1)^{n-1} a_n = \sum (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$a_n - a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$= \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n} \sqrt{n+1}}$$

அல்லது $\sqrt{n} < \sqrt{n+1}$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$a_{n+1} < a_n$, n -ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் இதை காண்பிக்கிறது.

மேலும், $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\infty} = 0$ எனவே லிபினிட்ஸ்க்கான இரு சோதனைகளையும் நிறைவு செய்கிறது.

எனவே கொடுக்கப்பட்ட வரிசை குவிகிறது.

b. $\frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log 3} + \frac{1}{\log 4} - \frac{1}{\log 5} + \dots \infty$

இங்கு $\sum (-1)^{n-1} a_n = \sum (-1)^{n-1} \frac{1}{\log(n+1)}$

$$a_n = \frac{1}{\log(n+1)}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{\log(n+2)}$$

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= \frac{1}{\log(n+1)} - \frac{1}{\log(n+2)} \\ &= \frac{\log(n+2) - \log(n+1)}{\log(n+1) \log(n+2)} > 0 \end{aligned}$$

அதாவது $\log(n+2) > \log(n+1)$

$a_n - a_{n+1} > 0$, $a_{n+1} < a_n$, n -ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் இதை காண்பிக்கிறது.

மேலும் $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log(n+1)} = \frac{1}{\infty} = 0$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட வரிசை லிபினிட்ஸ் சோதனை மூலம் குவிகிறது.

c. $\frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{4}+1} - \frac{1}{\sqrt{5}+1} + \dots \infty$

இங்கு $\sum (-1)^{n-1} a_n = \sum (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n+1}+1}$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+1}$$

$$n+2 > n+1 \quad \forall n$$

$$\sqrt{n+2} > \sqrt{n+1} \quad n\text{-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும்.}$$

$$\sqrt{n+2}+1 > \sqrt{n+1}+1 \quad n\text{-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும்}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n+2} + 1} < \frac{1}{\sqrt{n+1} + 1} \quad n\text{-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும்}$$

$a_{n+1} < a_n$, n -ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும்.

மேலும்
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + 1} = \frac{1}{\infty} = 0$$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட வரிசை லிமினிட்ஸ் சோதனை மூலம் குவிகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3.62 : கீழ்க்காணும் வரிசை குவிகிறதா என விவாதிக்க:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} - \frac{1}{a+3b} + \dots \infty \quad (a > 0, b > 0)$$

தீர்வு :

இங்கு
$$\sum (-1)^{n-1} a_n = \sum (-1)^{n-1} \frac{1}{a+(n-1)b}$$

$$a_n = \frac{1}{a+(n-1)b}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{a + nb}$$

$nb > (n-1)b$, n -ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும்.

$a + nb > a + (n-1)b$, n -ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும்.

$$\frac{1}{a + nb} < \frac{1}{a+(n-1)b}, \quad n\text{-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும்.}$$

$a_{n+1} < a_n$, n -ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும்

மேலும்
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a+(n-1)b} = \frac{1}{\infty} = 0$$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட வரிசை லிமினிட்ஸ் சோதனை மூலம் குவிகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3.63 : குவிகிறதா என சோதிக்க. $\frac{x}{1+x} + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^3}{1+x^3} - \frac{x^4}{1+x^4} + \dots \infty \quad (0 < x < 1)$

தீர்வு : நீங்களாகவே முயற்சி செய்யுங்கள்.

விடை : குவிகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3.64 : கொடுக்கப்பட்ட வரிசை குவிகிறதா என சோதிக்க. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-2}$

தீர்வு : நீங்களாகவே முயற்சி செய்யுங்கள்.

விடை : குவிகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3.65 : கொடுக்கப்பட்ட வரிசை குவிகிறதா என சோதிக்க $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^{n-1}}{5^n}$

தீர்வு :

இங்கு
$$a_n = \frac{n}{5^n}, \quad a_{n+1} = \frac{n+1}{5^{n+1}}$$

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n}{5^n} - \frac{n+1}{5^{n+1}} = \frac{5n-n-1}{5^{n+1}} = \frac{4n-1}{5^{n+1}} > 0, " n \geq 1$$

$$a_n > a_{n+1}$$

$a_{n+1} > a_n$, n -ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும்.

$$\text{மேலும் } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{5^n}$$

1) ஹாஸ்பிட்டல் விதியை பயன்படுத்த

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5^n \log 5} = \frac{1}{\infty} = 0$$

எனவே லிமினிட்ஸ்க்கான இரு சோதனைகளையும் நிறைவு செய்கிறது.

$\therefore$ எனவே கொடுக்கப்பட்ட வரிசை குவிகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3.66 : கொடுக்கப்பட்ட வரிசை குவிகிறது என சோதிக்க. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n^2 + 1}$

$$\text{தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட வரிசை } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n^2 + 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$$

$$= \sum (-1)^n \cdot a_n$$

$$a_n = \frac{1}{n^2 + 1} \cdot a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2 + 1}$$

$$n + 1 > n$$

$$(n+1)^2 > n^2$$

$$\frac{1}{(n+1)^2 + 1} < \frac{1}{n^2 + 1}$$

$a_{n+1} < a_n$, n -ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும்.

$$\text{மேலும் } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 + 1} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$\therefore$ எனவே கொடுக்கப்பட்ட வரிசை லிமினிட்ஸ் சோதனை மூலம் குவிகிறது.

பயிற்சி 3.10

கீழ்க்கண்ட குவிதல் அல்லது விலகுதல் தொடரை விவாதிக்க:

1. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

2. $2 - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \dots$

3. $\frac{1}{2^3} - \frac{1}{3^3} (1+2) + \frac{1}{4^3} (1+2+3) - \frac{1}{5^3} (1+2+3+4) + \dots$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot n}{2n-1}$

5. $\frac{\log 2}{2^2} - \frac{\log 3}{3^2} + \frac{\log 4}{4^2} - \dots \infty$

6. $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots \infty$

7. $\frac{1}{6} - \frac{2}{11} + \frac{3}{16} - \frac{4}{21} + \dots \infty$

8. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^n}{n(n-1)}, 0 < x < 1$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+1}$

10. $\log\left(\frac{1}{2}\right) - \log\left(\frac{2}{3}\right) + \log\left(\frac{3}{4}\right) - \log\left(\frac{4}{5}\right) + \dots \infty$

விடைகள்

1. குவிகிறது	2. குவியவில்லை	3. குவிகிறது	4. குவியவில்லை
5. குவிகிறது	6. குவிகிறது	7. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(-1)^{n-1}}{5n+1}$, குவியவில்லை	
8. குவிகிறது	9. குவிகிறது	10. குவிகிறது	

3.3.13 ஒரு தொடரின் முழுமையான ஒருங்கிணைப்பு

ஒரு தொடர் $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ஒன்றிணைந்தால் அந்த தொடர் $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ முற்றிலும் ஒருங்கிணைந்ததாக இருக்கும்.

அல்லது

விதிமுறைகள் அனைத்தும் நேர்மறையாக இல்லாத ஒரு ஒருங்கிணைந்த தொடர், அதன் அனைத்து விதிமுறைகளும் நேர்மறையானதாக இருக்கும் போது ஒன்றிணைந்ததாக இருந்தால், அது முற்றிலும் ஒருங்கிணைந்த தொடர் என்று அழைக்கப்படுகிறது.

உதாரணத்திற்கு :

- தொடர் $\sum a_n = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$ என்பது முற்றிலும் ஒன்றிணைந்தது, ஏனெனில் $\sum |a_n| = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$ என்பது p -சோதனை மூலம் ஒருங்கிணைந்த தொடராகும்.
- தொடர் $\sum a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$ என்பது முற்றிலும் ஒன்றிணைந்தது, ஏனெனில் $\sum |a_n| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$ என்பது பொதுவிகிதம் $\frac{1}{2} < 1$ கொண்ட ஒரு பெருக்குத் தொடர் ஆகும்.

3.3.14 நிபந்தனை ஒருங்கிணைப்பு

ஒரு தொடர் $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ நிபந்தனைக்குட்பட்ட ஒன்றிணைப்பு என்றால்,

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ஒன்றுபட்டால், ஆனால்
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ என்பது முற்றிலும் ஒன்றிணைவதில்லை.

(அதாவது) ஒரு தொடர் ஒன்றிணைந்தாலும் நிபந்தனையற்ற ஒன்றிணைப்பு என்று கூறப்படுகிறது, ஆனால் அது முற்றிலும் ஒன்றிணைவதில்லை.

உதாரணத்திற்கு :

ஒரு தொடர் $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ என்பது நிபந்தனையுடன் ஒன்றிணைக்கும் தொடர் ஆகும், ஏனெனில் $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$ லீப்னிட்ஸ் (Leibnitz's Test) சோதனையால் ஒன்றிணைக்கப் படுகிறது, அங்கு $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ என்பது p -சோதனை மூலம் வேறுபடுகிறது.

எனவே $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ என்பது நிபந்தனையுடன் ஒன்றிணைந்த தொடர்.

ஒரு முக்கியமான கவனிப்பு : ஒவ்வொரு முற்றிலும் குவிந்த தொடரும் ஒன்றிணைந்தது, ஆனால் மறுதலை உண்மையாக இருக்க வேண்டியதில்லை.

குறிப்புகள் :

- (a) $\sum |a_n|$ இன் வேறுபாடு $\sum a_n$ இன் வேறுபாட்டைக் குறிக்கவில்லை. உதாரணத்திற்கு, $\sum \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum \frac{1}{n}$ வேறுபட்டது, இங்கு $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ஒன்றுபட்டுள்ளது.
- (b) $\sum |a_n|$ என்பது நேர்மறை சொற்களின் தொடர் என்பதால், எனவே, நேர்மறை காலத் தொடரின் ஒருங்கிணைப்பைச் சோதிக்கப் பயன்படுத்தப்படும் அனைத்து சோதனைகளும் மாற்றுத் தொடரின் முழுமையான ஒருங்கிணைப்பைச் சோதிக்கவும் பொருந்தும். எனினும் இந்த சோதனைகள் மாற்றுத் தொடரின் ஒருங்கிணைப்பு பற்றிய எந்த தகவலையும் கொடுக்க முடியாது.

சில தீர்க்கப்பட்ட உதாரணங்கள்

எடுத்துக்காட்டு 3.67 : பின்வரும் தொடரின் ஒருங்கிணைப்பு மற்றும் முழுமையான ஒருங்கிணைப்பை சோதிக்கவும்.

i. $\frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$

ii. $1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \dots$ ($p > 0$)

iii. $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n-1} \sin \frac{1}{n}$

iv. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot n}{5n-7}$

v. $1 - \frac{1}{4 \cdot 3} + \frac{1}{4^2 \cdot 5} - \frac{1}{4^3 \cdot 7} + \dots$

தீர்வு : i. $\frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$

கொடுக்கப்பட்ட தொடர் என்பது தொடர்ச்சியான தொடர் மற்றும் ஒவ்வொரு காலமும் முந்தைய காலத்தை விட குறைவாக உள்ளது.

$$\sum a_n = \sum (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2n+3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+3} = \frac{1}{\infty} = 0$$

லீப்னிட்ஸ் சோதனை மூலம் கொடுக்கப்பட்ட தொடர் ஒருங்கிணைந்த தொடராகும்.

$$\sum |a_n| = \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

$$a_n = \frac{1}{2n+3} = f(n)$$

$$f(x) = \frac{1}{2x+3}$$

இங்கு $x \geq 1$, $f(x)$ -க்கு (+) நேர்மறை மற்றும் சலிப்பான குறைவு.

∴ கோச்சி (Cauchy) தொகையிடல் (integral) சோதனைபொருந்தும்

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} f(x) dx &= \int_1^{\infty} \frac{1}{2x+3} dx \\ &= \frac{1}{2} [\log(2x+3)]_1^{\infty} \\ &= \frac{1}{2} [\log \infty - \log 5] = \infty \end{aligned}$$

தொகையிடல் (integral) சோதனையின் மூலம் தொடர் $\sum |a_n|$ வேறுபட்டது.

எனவே கொடுக்கப்பட்ட தொடர் நிபந்தனையுடன் ஒன்றிணைந்தது.

ii. $1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \dots$ ($p > 0$)

தீர்வு : நீங்கள் முயற்சி செய்யுங்கள்.

விடை : இங்கு $p > 1$ எனில் கொடுக்கப்பட்ட தொடர் முற்றிலும் ஒன்றிணைந்தது மற்றும் $0 < p < 1$ எனில் கொடுக்கப்பட்ட தொடர் நிபந்தனையுடன் ஒன்றிணைந்தது.

iii. $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n-1} \sin \frac{1}{n}$

தீர்வு : நீங்கள் முயற்சி செய்யுங்கள்.

விடை : கொடுக்கப்பட்ட தொடர் நிபந்தனையுடன் ஒன்றிணைந்தது.

iv. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot n}{5n-7}$

தீர்வு : நீங்கள் முயற்சி செய்யுங்கள்.

விடை : கொடுக்கப்பட்ட தொடர் முற்றிலும் ஒன்றிணைந்தது.

v. $1 - \frac{1}{4 \cdot 3} + \frac{1}{4^2 \cdot 5} - \frac{1}{4^3 \cdot 7} + \dots$

தீர்வு : நீங்கள் முயற்சி செய்யுங்கள்.

விடை : கொடுக்கப்பட்ட தொடர் முற்றிலும் ஒன்றிணைந்தது.

எடுத்துக்காட்டு 3.68 : தொடரின்ஒருங்கிணைப்பை சோதிக்கவும் :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+2}{2^n + 5}$$

தீர்வு : நீங்கள் முயற்சி செய்யுங்கள்.

விடை : கொடுக்கப்பட்ட தொடர் முற்றிலும் ஒன்றிணைந்தது.

எடுத்துக்காட்டு 3.69 : தொடர் $1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} - \frac{1}{8^2} + \dots$ ஒன்றிணைந்ததா இல்லையா என்பதை சோதிக்கவும்.

தீர்வு : நீங்கள் முயற்சி செய்யுங்கள்.

விடை : கொடுக்கப்பட்ட தொடர் முற்றிலும் ஒன்றிணைந்தது.

எடுத்துக்காட்டு 3.70 : பின்வரும் தொடர் முற்றிலும் ஒன்றிணைகிறது என்பதை நிரூபிக்கவும்:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin n\alpha}{n^2}, \alpha \text{ என்பது மெய் (இயல்)}.$$

தீர்வு : நீங்கள் முயற்சி செய்யுங்கள்.

விடை : கொடுக்கப்பட்ட தொடர் முற்றிலும் ஒன்றிணைந்தது.

எடுத்துக்காட்டு 3.71 : தொடர் $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cos^2 n\alpha}{n\sqrt{n}}, \alpha$ என்பது மெய் எனில் கொடுக்கப்பட்ட தொடரின்

ஒருங்கிணைப்பை சரிபார்க்கவும்.

$$\begin{aligned} \text{தீர்வு : } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cos^2 n\alpha}{n\sqrt{n}} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \\ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cos^2 n\alpha}{n\sqrt{n}} \\ |\cos^2 n\alpha| &< 1 \\ \left| \frac{(-1)^{n-1} \cos^2 n\alpha}{n\sqrt{n}} \right| &< \frac{1}{n^{3/2}} \end{aligned}$$

இப்போது, $\frac{1}{n^{3/2}}$ ஒத்திசைவானது.

($\because p = \frac{3}{2} > 1$)

தொடர் $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cos^2 n\alpha}{n\sqrt{n}}$ முற்றிலும் ஒன்றிணைந்தது.

எடுத்துக்காட்டு 3.72 : பின்வரும் தொடர் ஒன்றிணைந்தது என்பதை நிரூபிக்கவும்:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^3}{(n+1)!}$$

தீர்வு : $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^3}{(n+1)!}$

$$|a_n| = \frac{n^3}{(n+1)!}$$

$$|a_{n+1}| = \frac{(n+1)^3}{(n+2)!}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| &= \frac{n^3}{(n+1)!} \times \frac{(n+2)!}{(n+1)^3} \\ &= \frac{n^3}{(n+1)!} \times \frac{(n+2)(n+1)!}{n^3 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3} = \frac{(n+2)}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \infty$$

$\therefore$ டி அலெம்பெர்ட்டெஸ்ட் (D' Alembert test) மூலம் $|a_n|$ ஒன்றிணைக்கப் படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3.73 : x -இன் எந்த மதிப்புகளுக்கு பின்வரும் தொடர் ஒருங்கிணைப்பு ஆகும்:

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2(1-x)^2} + \frac{1}{3(1-x)^3} + \dots$$

தீர்வு :

$$a_n = \frac{1}{n(1-x)^n} \text{ என்க.}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(1-x)^{n+1}}$$

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{n}{n+1} \left| \frac{(1-x)^n}{(1-x)^{n+1}} \right|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{|1-x|}$$

$$\begin{cases} \because \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 & \Rightarrow \text{(வரையறுக்கப்பட்ட)} \\ l < 1 & \Rightarrow \text{ஒருங்கிணைந்தது} \\ l > 1 & \Rightarrow \text{மாறுபட்ட} \\ \frac{1}{|l-x|} > 1 & \Rightarrow |l-x| < -1 \end{cases}$$

விகித சோதனை மூலம் $\frac{1}{|1-x|}$ எனில் $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

அதாவது $|1-x| > 1$

அல்லது $(1-x) > 1$ அல்லது $(1-x) < -1$

எனவே $x < 0$ அல்லது $x > 2$ எனில் தொடர்முற்றிலும் ஒன்றிணைந்தது.

மேலும் $x = 2$ எனில் தொடர் $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots$ ஒரு ஒருங்கிணைந்ததொடர்.

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

$$a_n > a_{n+1}$$

$\Rightarrow$

$$a_{n+1} < a_n$$

மேலும் $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

எனவே லிப்னிட்ஸ் சோதனை (Leibnitz Test) மூலம் $\sum a_n$ ஒன்றிணைந்தது.

பயிற்சி 3.11

தொடரின் ஒருங்கிணைப்பு மற்றும் முழுமையான ஒருங்கிணைப்பை சோதிக்கவும் (1-10):

1. $1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \dots$

2. $\frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{4}+1} - \frac{1}{\sqrt{5}+1} + \dots$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot n}{n^2+1}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot 2^n}{n!}$

5. $1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{4\sqrt{4}} + \dots$

6. $1 - \frac{1}{2^3}(1+2) + \frac{1}{3^3}(1+2+3) - \frac{1}{4^3}(1+2+3+4) + \dots$

7. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\log n)^2}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot n}{5^n}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \right]$

10. $\frac{1}{2(\log 2)^p} - \frac{1}{3(\log 3)^p} + \frac{1}{4(\log 4)^p} - \dots \infty$

11. தொடர் $\frac{\sin x}{1^3} - \frac{\sin 2x}{2^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} - \dots$ முற்றிலும் இணைகிறது என்பதை நிரூபிக்கவும்
12. x -இன் அனைத்து மதிப்புக்கும் தொடர் $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$ இன் ஒருங்கிணைப்பைப் பற்றி விவாதிக்கவும்.
13. $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$ தொடரின் ஒருங்கிணைப்பு மற்றும் முழுமையான ஒருங்கிணைப்பு பற்றி விவாதிக்கவும். இங்கு x ஒரு மெய்யெண்.
14. x -இன் எந்தந்த மதிப்புகள் தொடர் ஒருங்கிணைப்பைப் பின்பற்றுகின்றன.
 (a) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$ (b) $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6} + \dots$
15. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\tan^{-1} n}{1+n^2}$ என்ற தொடரின் ஒருங்கிணைப்பு பற்றி விவாதிக்கவும்

விடைகள்

1. முற்றிலும் ஒருங்கிணைந்தது
2. நிபந்தனையுடன் ஒன்றிணைந்தது
3. நிபந்தனையுடன் ஒன்றிணைந்தது
4. முற்றிலும் ஒருங்கிணைந்தது
5. முற்றிலும் ஒருங்கிணைந்தது
6. நிபந்தனையுடன் ஒன்றிணைந்தது
7. முற்றிலும் ஒருங்கிணைந்தது
8. முற்றிலும் ஒருங்கிணைந்தது
9. முற்றிலும் ஒருங்கிணைந்தது
10. $p > 1$ எனில் தொடர் முற்றிலும் ஒருங்கிணைந்தது மற்றும் $0 < p < 1$ எனில் தொடர் நிபந்தனையுடன் ஒன்றிணைந்தது
11. x -இன் எல்லா மதிப்பிற்கும் தொடர் முற்றிலும் ஒருங்கிணைந்தது
12. x -இன் எல்லா மதிப்பிற்கும் தொடர் ஒருங்கிணைந்தது
13. $-1 \leq x \leq 1$ எனில் தொடர் ஒருங்கிணைந்தது
14. அ. $-1 < x < 1$ ஆ. $-1 < x < 1$
15. தொடர் ஒருங்கிணைந்தது.

3.4 டெய்லர்ஸின் முடிவில்லா தொடர் (Taylor's Inkbtw Tupir)

$f(x)$ என்ற சார்பானது $[a, a + h]$ என்ற இடைவெளியில் அனைத்து வரிசைகளிலும் வகையிடத்தக்கது, ஒவ்வொரு முழுஎண் h சிறியதாக இருந்தாலும், லெக்ராஞ்சியின் மீதியை பயன்படுத்தி டெய்லர்ஸ் விரிவாக்கம் அதாவது

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \frac{h^3}{3!}f'''(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a) + \frac{h^n}{n!}f^n(a+ph)$$

இங்கு $0 < p < 1$

அல்லது $f(a+h) = S_n + R_n$

$$\text{இங்கு } S_n = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \frac{h^3}{3!}f'''(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)$$

$$\text{மற்றும் } R_n = \frac{h^n}{n!}f^n(a+ph)$$

கருத்தில் கொள்க $R_n \rightarrow 0$, இங்கு $n \rightarrow \infty$ எனில் $S_n = f(a+h)$ இங்கு $n \rightarrow \infty$.

எனவே $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \frac{h^3}{3!}f'''(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a) + \dots$ ஒன்றிணைந்தது.

எவ்வாறு என்றால்

- $f(x)$ என்ற சார்பானது $[a, a+h]$ என்ற இடைவெளியில் அனைத்து வரிசைகளிலும் வகையிடத்தக்கது.
- $n \rightarrow \infty$ எனில் $R_n = \frac{h^n}{n!}f^n(a+ph)$ பூஜ்ஜியத்திற்கு முனைகிறது, இங்கு $0 < p < 1$ பிறகு

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \frac{h^3}{3!}f'''(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a) + \frac{h^n}{n!}f^n(a) + \dots \quad \dots(i)$$

எனவே இது h இன் ஏறும் மதிப்புகளின் ஒருங்கிணைந்த எல்லையற்ற தொடராக $f(a+h)$ இன் விரிவாக்கம் மற்றும் டெய்லர்ஸ் எல்லையற்ற தொடர் என்று அழைக்கப்படுகிறது.

குறிப்பு : $f(x)$ -ஐ $(x - a)$ -இன் ஏறும் மதிப்புகளில் அமைக்க, $(a + h)$ -ஐ x ஆக மாற்றுக. அதாவது $h = x - a$ என (i) இல் பிரதியிட, $f(x) = f[a + (x - a)]$ என மாற்ற, நாம் பெறுவது

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^n(a) + \dots$$

3.4.1 எல்லையற்ற டெய்லர்ஸ்தொடராகவிரிவாக்கத்திற்கானவழி முறை

$f(a+h)$ -ஐ டெய்லர்ஸ் தொடராக விரிவாக்க, நாம் பின்வரும் வழிமுறைகளை பின்பற்றுகிறோம்.

படி I: $f(a + h)$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட சார்பு என்க

படி II: $h = 0$ எனில் மற்றும் $f(x)$ -ஐ காண்க

படி III: $f(x)$ - ஐ பல முறை வகையிட மற்றும் நாம் பெறுவது

$f'(x), f''(x), f'''(x), \dots$

படி IV: $f'(x), f''(x), f'''(x), \dots$ இன் மதிப்புகளை பிரதியிட

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^n(x) + \dots$$

டெய்லர்ஸ் தொடரின் தோல்வி (FAILURE OF TAYLOR'S TUPIR)

பின்வரும் வழிமுறைகளில் எல்லையற்ற டெய்லர்ஸ் விரிவாக்கம் $f(a+h)$.

தோல்வியடைய காரணம் :

- $f'(x), f''(x), f'''(x), \dots$ சார்பில் ஏதோ ஒன்று எல்லையற்றது அல்லது மதிப்பிட முடியவில்லை எனில் அதாவது பரிசீலனையில் உள்ள இடைவெளியில் ∞ இன் எந்த மதிப்பிற்கும் உறுதியற்ற வடிவம்.
- R_n -இல் அதாவது $n \rightarrow \infty$ எனும்போது n -வது மதிப்பு பூஜ்ஜியத்திற்கு முனையவில்லை.

சில தீர்க்கப்பட்ட உதாரணங்கள்

எடுத்துக்காட்டு 3.74 : டெய்லர்ஸ் தொடரைப் பயன்படுத்தி, நிரூபிக்கவும்

$$e^{x+h} = e^x \left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + \dots \right)$$

தீர்வு : இங்கு

$$f(x+h) = e^{x+h}$$

$$h = 0 \text{ பிரதியிட, நாம் பெறுவது } f(x) = e^x$$

$$f'(x) = e^x, f''(x) = e^x, f'''(x) = e^x$$

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \dots$$

$$\text{இதனால், } e^{x+h} = e^x + e^x \cdot h + e^x \frac{h^2}{2!} + e^x \cdot \frac{h^3}{3!} + \dots$$

$$= e^x \left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + \dots \right) \text{ என நிரூபிக்கப்பட்டது.}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.75 : $a^{x+h} = a^x \left[1 + h \log a + \frac{h^2}{2!}(\log a)^2 + \frac{h^3}{3!}(\log a)^3 + \dots \right]$

தீர்வு : இங்கு

$$f(x+h) = a^{x+h}$$

$x = 0$ பிரதியிட, நாம் பெறுவது

$$f(x) = a^x, f'(x) = a^x (\log a), f''(x) = a^x (\log a)^2, f'''(x) = a^x (\log a)^3$$

$$\text{டெய்லர்ஸ் தொடர்படி, } f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \dots$$

$$\text{இதனால், } f(x+h) = a^{x+h} + h a^x (\log a) + \frac{h^2}{2!}a^x (\log a)^2 + \frac{h^3}{3!}a^x (\log a)^3 + \dots$$

$$= a^x \left[1 + h \log a + \frac{h^2}{2!}(\log a)^2 + \frac{h^3}{3!}(\log a)^3 + \dots \right] \text{ என நிரூபிக்கப்பட்டது.}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.76 : நிறுவுக

$$\log \cos(x+h) = \log \cos x - h \tan x - \frac{h^2}{2} \sec^2 x - \frac{h^3}{3} \sec^2 x \cdot \tan x + \dots$$

தீர்வு : நீங்கள் முயற்சி செய்யுங்கள்.

எடுத்துக்காட்டு 3.77 : நிறுவுக.

$$\sin^{-1}(x+h) = \sin^{-1} x + \frac{h}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} \cdot \frac{h^2}{2!} + \dots$$

தீர்வு : நீங்கள் முயற்சி செய்யுங்கள்.

எடுத்துக்காட்டு 3.78 : நிறுவுக.

$$\tan^{-1}(x+h) = \tan^{-1} x + \frac{h}{1+x^2} - \frac{x h^2}{(1+x^2)^2} + \dots$$

தீர்வு : இங்கு $f(x+h) = \tan^{-1}(x+h)$

$h = 0$ பிரதியிட, நாம் பெறுவது

$$f(x) = \tan^{-1} x, f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1}$$

$$f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = (-1)(1+x^2)^{-2} \cdot (2x)$$

டெய்லர்ஸ் தொடர்பின்படி,

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots$$

$$\tan^{-1}(x+h) = \tan^{-1} x + \frac{h}{1+x^2} - \frac{x h^2}{(1+x^2)^2} + \dots$$

எடுத்துக்காட்டு 3.79 : நிறுவுக.

$$\tan(x+h) = \tan x + h \sec^2 x + h^2 \sec^2 x \tan x + \frac{h^3}{3} (1+3 \tan^2 x) \sec^2 x + \dots$$

தீர்வு : இங்கு $f(x) = \tan(x+h)$

$h = 0$ பிரதியிட, நாம் பெறுவது

$$f(x) = \tan x, f'(x) = \sec^2 x$$

$$f''(x) = 2 \sec x \cdot \sec x \tan x = 2 \sec^2 x \tan x$$

$$f'''(x) = 2(\sec^2 x \cdot \sec^2 x + \tan x \cdot 2 \sec x \cdot \sec x \tan x)$$

$$= 2(\sec^2 x \cdot \sec^2 x + 2 \sec^2 x \cdot \tan^2 x)$$

$$= 2 \sec^2 x (\sec^2 x + 2 \tan^2 x)$$

$$= 2 \sec^2 x (1 + \tan^2 x + 2 \tan^2 x)$$

$$= 2 \sec^2 x (1 + 3 \tan^2 x)$$

.....

.....

டெய்லர்ஸ் தொடரின் படி,

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots \\ \tan(x+h) &= \tan x + h \sec^2 x + h^2 \sec^2 x \tan x + \frac{h^3}{3} (1+3 \tan^2 x) \sec^2 x + \dots \\ &= \tan x + h \sec^2 x + h^2 \sec^2 x \tan x + \frac{h^3}{3} (1+3 \tan^2 x) \sec^2 x + \dots \end{aligned}$$

என நிரூபிக்கப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு 3.80 : நிரூபிக்கவும்.

$$\frac{f(x+h) + f(x-h)}{2} = f(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(x) + \dots$$

தீர்வு : நீங்கள் முயற்சி செய்யுங்கள்.

எடுத்துக்காட்டு 3.81 : h -இன் அடுக்குகளில் $\sin(x+h)$ ஐ விரிவாக்குக மற்றும்

$$\sin(x+h) = \sin x \cosh + \cos x \sin h \text{ ஐ கணக்கிடு.}$$

தீர்வு : நீங்கள் முயற்சி செய்யுங்கள்.

எடுத்துக்காட்டு 3.82 : டெய்லர்ஸ் தொடரைப் பயன்படுத்தி, $(x-2)$ -இன் அடுக்குகளில் e^x -ஐ விரிவாக்குக.

தீர்வு :

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x = e^{2+(x-2)} \\ &= e^{2+h} \quad h = x - 2 \end{aligned}$$

$$f(2) = e^2$$

$$f'(x) = e^x, f'(2) = e^2$$

$$f''(x) = e^x, f''(2) = e^2$$

$$f'''(x) = e^x, f'''(2) = e^2$$

டெய்லர்ஸ்தொடரின்படி,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a) + \dots \\ &= e^2 + (x-2) \cdot e^2 + \frac{(x-a)^2}{2!} \cdot e^2 + \frac{(x-a)^3}{3!} \cdot e^2 + \dots \\ &= e^2 \left[1 + (x-2) + \frac{(x-a)^2}{2!} + \frac{(x-a)^3}{3!} + \dots \right] \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.83 : $(x - \pi/2)$ இன் அடுக்குகளில் $\sin x$ -ஐ விரிவாக்கவும். மேலும் $\sin 91^\circ$ ஐ 4 இட தசம நிலைகளுக்கு மதிப்பீடு செய்யவும்.

தீர்வு :

$$f(x) = \sin x \text{ அல்லது } = \sin \left[\frac{\pi}{2} + \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

$$= \sin \left[\frac{\pi}{2} + h \right], h = \left(x - \frac{\pi}{2} \right)$$

டெய்லர்ஸ் தொடரின் படி,

$$= f\left(\frac{\pi}{2}\right) + h f'\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{h^2}{2!} f''\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{h^3}{3!} f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) + \dots$$

$$f(x) = \sin x, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$f(x) = \cos x, f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$f''(x) = -\sin x, f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$f'''(x) = -\cos x, f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$f^{iv}(x) = \sin x, f^{iv}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$f(x) = 1 + h \cdot 0 + \frac{h^2}{2!} (-1) + \frac{h^3}{3!} (0) + \frac{h^4}{4!} (1) + \dots \text{ [மதிப்புகளை பிரதியிட்ட பிறகு]}$$

$$\sin x = 1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} - \dots$$

$$= 1 - \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4}{4!} - \dots \text{ பகுதி I நிரூபிக்கப்பட்டது.}$$

பகுதி II : $\sin 91^\circ$ -இன் மதிப்பைக் கண்டறியவும்

தீர்வு : டெய்லர்ஸ் தொடரின் படி

$$f(x) = \sin x \text{ எனில்,}$$

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots$$

இங்கு $x = 90^\circ$, $h = 1^\circ$ எனில்

$$\sin(x+h) = \sin x + 1^\circ \cos x + \frac{1^2}{2!} (-\sin x) + \frac{1^3}{3!} (-\cos x) + \dots$$

$$\sin 91^\circ = \sin 90^\circ + \left(\frac{\pi}{180}\right) \cos 90^\circ + \left(\frac{\pi}{180}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} (-\sin 90^\circ) + \left(\frac{\pi}{180}\right)^3 \cdot \frac{1}{3!} (-\cos 90^\circ) + \dots$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{180}\right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi}{180}\right)^4 - \dots$$

$$= 1 - 0.00015 + 0.000000039$$

$$= 1 - 0.00015 = 0.9985 \text{ விடை}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.84 : $(x - 1)$ -இன் அடுக்குகளில் $\log_e x$ -ஐ விரிவாக்கவும். எனவே $\log_e 1.1$ ஐ 4 இட தசம நிலைகளுக்கு மதிப்பீடு செய்யவும்.

தீர்வு :

$$\text{விடை : } \log_e x = (x - 1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots \text{ பகுதி I நிரூபிக்கப்பட்டது.}$$

$$\text{விடை : பகுதி II } 0.9985.$$

எடுத்துக்காட்டு 3.85 : $(x - \pi/4)$ -இன் அடுக்குகளில் $\tan x$ -ஐ விரிவாக்கவும்.

தீர்வு : நீங்கள் முயற்சி செய்யுங்கள்.

எடுத்துக்காட்டு 3.86 : $(x - 1)$ -இன் அடுக்குகளில் $\tan^{-1} x$ -ஐ விரிவாக்கவும்

தீர்வு :

$$f(x) = \tan^{-1} [1 + (x - 1)]$$

$$= \tan^{-1} [x + h], h = x - 1$$

$$= f(x + h) \quad x = 1$$

$$h = 0 \text{ பிரதியிட,}$$

$$f(x) = \tan^{-1} x \text{ இப்போது, நாம் பெறுவது } f(1) = \frac{\pi}{4},$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} f'(1) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = -2x(1+x^2)^{-2} f''(1) = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$f'''(x) = -2 [x \cdot (-2)(1+x^2)^{-3}(2x) + (1+x^2)^{-2}(1)]$$

$$= f'''(1) = \frac{8}{8} - \frac{2}{4} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$= 8x^2(1+x^2)^{-3} - 2(1+x^2)^{-2}$$

மேற்கண்ட மதிப்புகளை டெய்லர்ஸ் தொடரில் பிரதியிட, நாம் பெறுவது

$$f(x) = f(1) + hf'(1) + \frac{h^2}{2!} f''(1) + \frac{h^3}{3!} f'''(1) + \dots$$

$$= \frac{\pi}{4} + (x-1) \cdot \frac{1}{2} + \frac{(x-1)^2}{2!} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) + \frac{(x-1)^3}{3!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + \dots$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(x-1)^3}{12} \dots \text{ விடை.}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.87 : $(x - 1)$ -இன் அடுக்குகளில் $2 + x^2 - 3x^5 + 7x^6$ -ஐ விரிவாக்கவும்

தீர்வு :

$$f(x) = f(1 + (x - 1)) = f(x + h)$$

$$h = 0 \text{ பிரதியிட, } h = x - 1, \text{ நாம் பெறுவது } x = 1$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 2 + x^2 - 3x^5 + 7x^6 & f(1) &= 2 + 1 - 3 + 7 = 7 \\
 f'(x) &= 2x - 15x^4 + 42x^5 & f'(1) &= 2 - 15 + 42 = 29 \\
 f''(x) &= 2 - 60x^3 + 210x^4 & f''(1) &= 2 - 60 + 210 = 152 \\
 f'''(x) &= -180x^2 + 840x^3 & f'''(1) &= -180 + 840 = 660 \\
 f^{iv}(x) &= -360x + 2520x^2 & f^{iv}(1) &= -360 + 2520 = 2160 \\
 f^v(x) &= -360 + 5040x & f^v(1) &= -360 + 5040 = 4068 \\
 f^{vi}(x) &= 5040
 \end{aligned}$$

மேற்கண்ட மதிப்புகளை டெய்லர்ஸ் தொடரில் பிரதியிட, நாம் பெறுவது

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f(1) + hf'(1) + \frac{h^2}{2!} f''(1) + \frac{h^3}{3!} f'''(1) + \dots \\
 &= 7 + (x-1) \cdot 29 + \frac{(x-1)^2}{2!} \cdot (152) + \frac{(x-1)^3}{3!} \cdot (660) + \dots \text{ விடை.}
 \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.88 : $\frac{\pi}{3}$ இன் மதிப்புகளில் $\log \cos x$ -ஐ விரிவாக்கவும்.

தீர்வு : $f(x) = \log \cos \left(\frac{\pi}{3} + \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \right)$

$$= \log \cos (x + h) = f(x+h), \text{ இங்கே } h = x - \pi/3, x = \pi/3$$

$$f(x) = \log \cos x \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \log \cos \frac{\pi}{3}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos x} (-\sin x) = -\tan x \quad f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

$$f''(x) = -\sec^2 x \quad f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sec^2 \frac{\pi}{3} = -4$$

$$f'''(x) = -2 \sec x \cdot \sec x \cdot \tan x \quad f'''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sec^2 \frac{\pi}{3} \tan \frac{\pi}{3}$$

$$= -2 \sec^2 x \cdot \tan x = -2 (-4) (-\sqrt{3}) = -8\sqrt{3}$$

$$f(x) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) + hf'\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{h^2}{2!} f''\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{h^3}{3!} f'''\left(\frac{\pi}{3}\right) + \dots$$

$$= \log \cos \frac{\pi}{3} + \left(x - \frac{\pi}{3} \right) (-\sqrt{3}) + \frac{\left(x - \frac{\pi}{3} \right)^2}{2!} (-4) + \frac{\left(x - \frac{\pi}{3} \right)^3}{3!} (-8\sqrt{3}) + \dots$$

$$= \log (0.5) - \sqrt{3} \left(x - \frac{\pi}{3} \right) - 2 \left(x - \frac{\pi}{3} \right)^2 - \frac{4\sqrt{3}}{3} \left(x - \frac{\pi}{3} \right)^3 + \dots \text{ விடை}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.89 : டெய்லர்ஸ் தொடரைப் பயன்படுத்தி, $\sin 31^\circ$ -இன் மதிப்பை நான்கு தசம இடங்களுக்கு கணக்கிடுங்கள்.

தீர்வு : நீங்கள் முயற்சி செய்யுங்கள்.

விடை : 0.5151

எடுத்துக்காட்டு 3.90 : $f(x) = x^3 + 8x^2 + 15x - 24$ என்றால், டெய்லர்ஸ் தொடரைப் பயன்படுத்தி

$f\left(\frac{11}{10}\right)$ இன்மதிப்பை கணக்கிடுங்கள்

தீர்வு : நீங்கள் முயற்சி செய்யுங்கள்.

விடை : 3.511

எடுத்துக்காட்டு 3.91 : டெய்லர்ஸ் விரிவாக்கத்தின் முதல் நான்கு மதிப்பை எடுத்துக் கொள்வதன் மூலம் $\sqrt{17}$ இன் மதிப்பை தோராயமாக நான்கு தசம இடங்களில் கணக்கிடுங்கள்.

தீர்வு : நீங்கள் முயற்சி செய்யுங்கள்.

விடை : 4.123

எடுத்துக்காட்டு 3.92 :

- $f(ax) = f(x) + (a-1)x f'(x) + \frac{(a-1)^2 x^2}{2!} f''(x) + \dots$
- $f\left(\frac{x^2}{1+x}\right) = f(x) - \frac{x}{1+x} f'(x) + \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 \frac{f''(x)}{2!} - \left(\frac{x}{1+x}\right)^3 \frac{f'''(x)}{3!} + \dots$

தீர்வு : டெய்லர்ஸ் தொடரின் படி,

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots$$

- நம்மிடம் உள்ளது $f(ax) f(x + (a-1)x)$

$$= f(x+h), h = (a-1)x, x = x$$

$$f(ax) = f(x) + (a-1)x f'(x) + \frac{(a-1)^2 x^2}{2!} f''(x) + \frac{(a-1)^3 x^3}{3!} f'''(x) + \dots \text{ என நிரூபிக்கப்பட்டது.}$$

- நிரூபிக்கவும். $f\left(\frac{x^2}{1+x}\right) = f(x) - \frac{x}{1+x} f'(x) + \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 \frac{f''(x)}{2!} - \left(\frac{x}{1+x}\right)^3 \frac{f'''(x)}{3!} + \dots$

$$f\left(\frac{x^2}{1+x}\right) = f\left(x - \frac{x}{1+x}\right)$$

$$= f(a+h),$$

$$x = x, h = -\frac{x}{1+x} \text{ மதிப்புகளை டெய்லர்ஸ் தொடரில் பிரதியிட}$$

$$f\left(\frac{x^2}{1+x}\right) = f(x) - \frac{x}{1+x} f'(x) + \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 \frac{f''(x)}{2!} - \left(\frac{x}{1+x}\right)^3 \frac{f'''(x)}{3!} + \dots \text{ என நிரூபிக்கப்பட்டது.}$$

பயிற்சி 3.12

- டெய்லர்ஸ் தொடரைப் பயன்படுத்தி, நிரூபிக்கவும்
 - $\frac{1}{x+h} = \frac{1}{x} - \frac{h}{x^2} + \frac{h^2}{x^3} - \frac{h^3}{x^4} + \dots$
 - $\sec^{-1}(x+h) = \sec^{-1}x + \frac{h}{x\sqrt{x^2-1}} - \frac{2x^2-1}{x^2(x^2-1)^{3/2}} \cdot \frac{h^2}{2!} + \dots$
- $f\left(\frac{21}{20}\right)$ இன் மதிப்பைக் கண்டறியவும், இங்கு $f(x) = x^3 - 6x^2 + 7$
 - டெய்லர்ஸ் விரிவாக்கத்தின் முதல் மூன்று மதிப்பை எடுத்துக் கொள்வதன் மூலம் $\sqrt{10}$ மற்றும் $\sqrt{26}$ இன் மதிப்பை தோராயமாக நான்கு தசம இடங்களில் கணக்கிடுங்கள்.
 - $f(x+h)$ -க்கான டெய்லர்ஸ் தொடரின் பயன்பாட்டின் மூலம் $f\left(\frac{9}{10}\right)$ இன் மதிப்பை கணக்கிடுங்கள், இங்கு $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 11$.
- $\log \sin x$ -ஐ $(x-3)$ -இன் ஏறுவரிசை அடுக்குகளில் விரிவாக்குக.
- டெய்லர்ஸ் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $\log_{10} 404$ -இன் மதிப்பை தோராயமாக கணக்கிடுங்கள். இங்கு $\log_{10} 4 = 0.6021$
- டெய்லர்ஸ் தொடரைப் பயன்படுத்தி, $\cos 32^\circ$ இன் மதிப்பைக் கணக்கிடு.
- டெய்லர்ஸ் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $2x^3 + 7x^2 + x - 6$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையை $(x-2)$ -இன் அடுக்குகளில் விரிவாக்கவும்.
- டெய்லர்ஸ் தொடரைப் பயன்படுத்துவதன் மூலம் $\log \sin(x+h)$ -இன் விரிவாக்கத்தைக் கண்டறியவும்.

விடைகள்

- 2.1623
 - 8.849
- $\log \sin(3) + (x-3) \cot(3) - \frac{(x-3)^2}{2} \operatorname{cosec}^2(3) + \frac{(x-3)^3}{3} \operatorname{cosec}^2(3) \cot(3) + \dots$
- $\log_{10} 404 = 2.6064$ 5. 0.8461 6. $40 + 53(x-2) + 19(x-2)^2 + 2(x-2)^3$
- $\log \sin x + h \cot x - \frac{h^2}{2} \operatorname{cosec}^2 x + \frac{h^3}{3} \operatorname{cosec}^2 x \cot x + \dots$

3.5 மெக்லாரின்ஸ் எல்லையற்ற தொடர்

எல்லையற்ற டெய்லர்ஸ் தொடரில் $a = 0$ மற்றும் $h = x$ பிரதியிட,

- $f(x)$ என்ற சார்பானது $[0, x]$ என்ற இடைவெளியில் அனைத்து வரிசைகளிலும் வகையிடத்தக்கது மற்றும்

- ii. லெக்ராஞ்சியின் மீதி $R_n = \frac{h^n}{n!} f^n(a + ph)$ கருத்தில் கொள்க $R_n \rightarrow 0$, இங்கு $n \rightarrow \infty$ எனில்

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^n(0) + \dots$$

இது மேக்லாரின்ஸ் எல்லையற்ற தொடர் என்று அழைக்கப்படுகிறது.

குறிப்பு : சார்பு $f(x)$ என்பது y -யால் குறிப்பிடப்பட்டால், மேக்லாரின்ஸ் எல்லையற்ற தொடர் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதப்படலாம்.

$$y = y(0) + x y_1(0) + \frac{x^2}{2!} y_2(0) + \frac{x^3}{3!} y_3(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} y_n(0) + \dots$$

இங்கு $y(0), y_1(0), y_2(0), y_3(0) \dots y_n(0)$ எக்ஸ்ட்ரா $x = 0$ -க்கு $y, y_1, y_2, y_3, \dots y_n$ இன் மதிப்புகளை முறையே குறிக்கும்.

3.5.1 மேக்லாரின்ஸ் தொடராக விரிவாக்கத்திற்கான படிமுறை

படி I : $f(x) =$ கொடுக்கப்பட்ட சார்பு

படி II : $f(x)$ -ஐ பல முறை வகையிட மற்றும் நாம் பெறுவது $f'(x), f''(x), f'''(x), \dots$ மற்றும் பல

படி III : $x = 0$ என படி II பிரதியிட மற்றும் கண்டுபிடிக்கவும் $f(0), f'(0), f''(0), f'''(0), \dots$ மற்றும் பல.

படி IV : மேக்லாரின்ஸ் தொடரில் $f(0), f'(0), f''(0), f'''(0), \dots$ மதிப்புகளை மாற்றினால், நமக்கு கிடைக்கும்

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^n(0) + \dots$$

மேக்லாரின்ஸ் தொடர் தோல்வி

மேக்லாரின்ஸ் தொடர் பின்வரும் சூழ்நிலையில் எல்லையற்ற தொடரில் $f(x)$ -ஐ விரிவாக்க முடியவில்லை

(a) $f(x), f'(x), f''(x), f'''(x), \dots$ ஏதாவது எல்லையற்றதாக இருந்தால் அல்லது மூடப்பட்ட இடைவெளி $[0, x]$ இல்லாவிட்டால்

(b) R_n இல் அதாவது $n \rightarrow \infty$ எனும் போது.

சில பயனுள்ள விரிவாக்கங்கள்

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \dots \quad (x < 1)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$a^x = 1 + x (\log a) + \frac{x^2}{2!} (\log a)^2 + \frac{x^3}{3!} (\log a)^3 + \dots \quad (a > 0)$$

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{2x^5}{15} + \dots$$

$$\sin hx = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos hx = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\sin^{-1} x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{12} + \dots$$

$$\cos^{-1} x = 1 + x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \dots$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

சில தீர்க்கப்பட்ட உதாரணங்கள்

எடுத்துக்காட்டு 3.93 : மேக்லாரின்ஸ் தொடரைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் செயல்பாட்டை விரிவாக்குங்கள்.

i. $f(x) = e^x, f(0) = e^0 = 1$

$$f'(x) = e^x, f'(0) = 1$$

$$f''(x) = e^x, f''(0) = 1$$

$$f'''(x) = e^x, f'''(0) = 1$$

$$f^{iv}(x) = e^x, f^{iv}(0) = 1$$

தீர்வு : மேக்லாரின்ஸ் தொடரைப் பயன்படுத்த

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \text{ விடை}$$

ii. $f(x) = a^x, a > 0, f(0) = a^0 = 1$

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டது,

$$f'(x) = a^x \log a, f'(0) = \log a$$

$$f''(x) = a^x (\log a)^2, f''(0) = (\log a)^2$$

$$f'''(x) = a^x (\log a)^3, f'''(0) = (\log a)^3$$

$$f^{iv}(x) = a^x (\log a)^4, f^{iv}(0) = (\log a)^4$$

மேக்லாரின்ஸ்தொடரைப்பயன்படுத்த

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots \\ &= 1 + x \cdot \log a + \frac{x^2}{2!} (\log a)^2 + \frac{x^3}{3!} (\log a)^3 + \dots \text{விடை} \end{aligned}$$

iii. $f(x) = \sin x, f(0) = 0$

$$f'(x) = \cos x, f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\sin x, f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x, f'''(0) = -1$$

$$f^{iv}(x) = \sin x, f^{iv}(0) = 0$$

தீர்வு : மேக்லாரின்ஸ்தொடரைப் பயன்படுத்த,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots \\ &= 0 + x + \frac{x^2}{2!} (0) + \frac{x^3}{3!} (-1) + \frac{x^4}{4!} (0) + \dots \\ \text{விடை : } \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \end{aligned}$$

iv. $f(x) = \cos x$

தீர்வு : நீங்கள் முயற்சி செய்யுங்கள்.

$$\text{விடை : } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

v. $f(x) = \sec x$

தீர்வு : நீங்கள் முயற்சி செய்யுங்கள்.

$$\text{விடை : } \sec x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{5x^4}{4!} + \dots$$

vi. $f(x) = \sin hx, f(0) = 0$

$$f'(x) = \cos hx, f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \sin hx, f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = \cos hx, f'''(0) = 1$$

$$f^{iv}(x) = \sin hx, f^{iv}(0) = 0$$

$$f^v(x) = \cos hx, f^v(0) = 1$$

தீர்வு : மேக்லாரின்ஸ்தொடரின் படி,

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots$$

$$\text{விடை : } \sin hx = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

vii. $f(x) = \cos hx$

தீர்வு : நீங்கள் முயற்சி செய்யுங்கள்.

$$\text{விடை : } \cos hx = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

viii. $f(x) = \log(1 - x), f(0) = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)} (-1), f'(0) = -1$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(1-x)^2}, f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} (-1) = \frac{-2}{(1-x)^3}, f'''(0) = -2$$

$$f^{iv}(x) = \frac{6}{(1-x)^4} (-1) = \frac{-6}{(1-x)^4}, f^{iv}(0) = -6$$

தீர்வு : மேக்லாரின்ஸ் தொடரின் படி,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots \\ &= 0 + x(-1) + \frac{x^2}{2!}(-1) + \frac{x^3}{3!}(-2) + \frac{x^4}{4!}(-6) + \dots \\ &= -x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} - \dots \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.94 : நிரூபிக்கவும்.

i. $e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \dots$

தீர்வு : $f(x) = e^{\sin x}$

$$f'(x) = e^{\sin x} \cdot \cos x$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^{\sin x} (-\sin x) + \cos x \cdot e^{\sin x} \cdot \cos x \\ &= e^{\sin x} (\cos^2 x - \sin x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= e^{\sin x} [2\cos x (-\sin x) - \cos x] + (\cos^2 x + \sin x) \cdot e^{\sin x} \cdot \cos x \\ &= e^{\sin x} [-2\sin x \cos x - \cos x + \cos^3 x - \sin x \cos x] \end{aligned}$$

.....

$$f(0) = 1, f'(0) = 1, f''(0) = 1, f'''(0) = 0, f^{iv}(0) = -3,$$

மேக்லாரின்ஸ் தொடரின் படி,

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!}(-3) + \dots$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \dots \text{ என நிரூபிக்கப்பட்டது.}$$

ii. நிரூபிக்கவும். $e^{x \cos x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \dots$

தீர்வு : நீங்கள் முயற்சி செய்யுங்கள்.

iii. நிரூபிக்கவும். $\frac{x}{\sin x} = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360} + \dots$

தீர்வு : நீங்கள் முயற்சி செய்யுங்கள்.

iv. நிரூபிக்கவும். $\frac{e^x}{\cos x} = 1 + x + \frac{2x^2}{2!} + \frac{4x^3}{3!}$

தீர்வு : நீங்கள் முயற்சி செய்யுங்கள்.

v. நிரூபிக்கவும். $\log \sec x = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{45} + \dots$

தீர்வு : $f(x) = \log \sec x$

$$f'(x) = \frac{1}{\sec x} \sec x \cdot \tan x = \tan x$$

$$f''(x) = \sec^2 x$$

$$f'''(x) = 2 \sec^2 x \cdot \tan x$$

$$f^{iv}(x) = 4 \sec^2 x \cdot \tan^2 x + 2 \sec^4 x$$

$$f^v(x) = 4 \sec^2 x \cdot \tan x + 12 \tan x \cdot \sec^4 x + 6 \tan^3 x (2 \sec^2 x)$$

$$= 4 \sec^2 x \cdot \tan x + 12 \tan x \cdot \sec^4 x + 12 \tan^3 x \sec^2 x$$

$$f^{vi}(x) = 8 \sec^2 x \cdot \tan^2 x + 4 \sec^4 x + 12 \sec^6 x + 48 \tan^2 x \cdot \sec^4 x + 36 \tan^2 x \cdot \sec^4 x + 24 \tan^4 x \cdot \sec^2 x$$

$$\text{Now, } f(0) = \log \sec 0 = 0$$

$$f'(0) = \tan 0 = 0$$

$$f''(0) = \sec^2(0) = 1$$

$$f'''(0) = 0$$

$$f^{iv}(0) = 2$$

$$f^v(0) = 0$$

$$f^{iv}(0) = 16$$

மேக்லாரின்ஸ் தொடரைப் பயன்படுத்த

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots$$

$$\begin{aligned} \log \sec x &= \frac{x^2}{2!} + (2) \frac{x^4}{4!} + (16) \frac{x^6}{6!} + \dots \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{45} + \dots \text{ என நிரூபிக்கப்பட்டது.} \end{aligned}$$

vi. நிரூபிக்கவும். $\cos^2 x = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} - \dots$

தீர்வு : $f(x) = \cos^2 x$ $f(x) = \cos^2(0) = 1$

$$f'(x) = -2 \cos x \sin x = -\sin 2x \quad f'(0) = -\sin 2(0) = 0$$

$$f''(x) = -2 \cos 2x \quad f''(x) = -2 \cos 2(0) = -2$$

$$f'''(x) = 4 \sin 2x \quad f'''(x) = 4 \sin 2(0) = 0$$

$$f^{iv}(x) = 8 \cos 2x \quad f^{iv}(x) = 8 \cos 2(0) = 8$$

$$f^v(x) = -16 \sin 2x \quad f^v(x) = -16 \sin 2(0) = 0$$

மேக்லாரின்ஸ் தொடரைப் பயன்படுத்த, நாம் பெறுகிறோம்

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= 1 - \frac{2x^2}{2!} + \frac{8x^4}{4!} - \dots \\ &= 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} - \dots \text{ என நிரூபிக்கப்பட்டது.} \end{aligned}$$

vii. நிரூபிக்கவும். $\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$

தீர்வு : நீங்கள் முயற்சி செய்யுங்கள்.

viii. நிரூபிக்கவும். $\tan^{-1} (1 + x) = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + \dots$

தீர்வு : $f(x) = \tan^{-1} (1 + x)$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (1 + x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-1 \cdot 2(1 + x)}{[1 + (1 + x)^2]^2}$$

$$f'''(x) = \frac{-2 [1 + (1 + x)^2] (1) - (1 + x) \cdot 2(1 + (1 + x)^2) \cdot 2(1 + x)}{[1 + (1 + x)^2]^4}$$

⋮

$$f(0) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$f''(0) = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$f'''(0) = \frac{1}{2}$$

∴

மேக்லாரின்ஸ் தொடரைப் பயன்படுத்த

$$\begin{aligned} \tan^{-1}(1+x) &= \frac{\pi}{4} + x\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{x^2}{2!}\left(\frac{-1}{2}\right) + \frac{x^3}{3!}\left(\frac{1}{2}\right) + \dots \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + \dots \text{ என நிரூபிக்கப்பட்டது.} \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.95 :

i. நிரூபிக்கவும். $\log(1 + \sin x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \dots$

தீர்வு : நீங்கள் முயற்சி செய்யுங்கள்.

ii. நிரூபிக்கவும். $\log(1 + e^x) = \log 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{192} + \dots$

தீர்வு : நீங்கள் முயற்சி செய்யுங்கள்.

iii. நிரூபிக்கவும். $\frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x^3}{48} + \dots$

தீர்வு : நீங்கள் முயற்சி செய்யுங்கள்.

எடுத்துக்காட்டு 3.96 :

i. நிரூபிக்கவும். $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = 2\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots\right)$

தீர்வு : நீங்கள் முயற்சி செய்யுங்கள்.

பின் குறிப்பு : $x = \tan \theta$ என்க

ii. நிரூபிக்கவும். $\tan^{-1} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots\right)$

தீர்வு : நீங்கள் முயற்சி செய்யுங்கள்.

பின் குறிப்பு: $x = \tan \theta$ என்க

iii. நிரூபிக்கவும். $\tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{1^2}{3!}x^3 + \frac{1^2 \cdot 3^2}{5!}x^5 + \dots$

தீர்வு : நீங்கள் முயற்சி செய்யுங்கள்.

பின் குறிப்பு: $x = \sin \theta$ என்க

iv. நிரூபிக்கவும். $\sin^{-1}(3x-4x^3) = 3\left(x + \frac{x^3}{2} + \frac{3x^5}{40} + \dots\right)$

தீர்வு : நீங்கள் முயற்சி செய்யுங்கள்.

பின் குறிப்பு: $x = \sin \theta$ என்க

3.6 பவர்த் தொடர்

பவர் சீரிஸ் என்பது ஒரு மாறியை உள்ளடக்கிய ஒரு வகை தொடர் ஆகும். இன்னும் குறிப்பாக, மாறி x என்றால், தொடரின் அனைத்து விதிமுறைகளும் x இன் சக்திகளை உள்ளடக்கியது. இதன் விளைவாக, ஒரு சக்தி தொடர் ஒரு எல்லையற்ற பல்லுறுப்புக்கோவையாக கருதப்படலாம். பவர் தொடர் பொதுவான செயல்பாடுகளை பிரதிநிதித்துவப்படுத்தவும் புதிய செயல்பாடுகளை வரையறுக்கவும் பயன்படுத்தப்படுகிறது. இந்த பிரிவில் நாம் பவர் தொடரை வரையறுக்கிறோம் மற்றும் ஒரு பவர் தொடரின் ஒருங்கிணைப்பு மற்றும் வேறுபாட்டை எவ்வாறு தீர்மானிப்பது என்பதைக் காண்பிப்போம். பவர் தொடரைப் பயன்படுத்தி சில செயல்பாடுகளை எவ்வாறு பிரதிநிதித்துவப்படுத்துவது என்பதையும் நாங்கள் காண்பிக்கிறோம்.

3.6.1 பவர் தொடரின் எல்லையற்ற வடிவம்

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + c_3 (x-a)^3 + \dots \quad \dots(1)$$

குணகம் $c_0, c_1, c_2, c_3, \dots$ மற்றும் மாறி x மற்றும் ' a ' அனைத்தும் மெய் எண்கள். நிலையான ' a ' பவர் தொடரின் மையம் என்று அழைக்கப்படுகிறது.

குறிப்பாக, மையம் ' a ' பூஜ்ஜியமாக இருக்கும்போது, பவர் தொடர் வடிவத்தில் இருக்கும்

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots \quad \dots(2)$$

3.6.2 பவர் தொடரின் குவிதல்

$X = 0$ -க்கு, ஒவ்வொரு பவர் தொடரும் ஒருங்கிணைந்தவை, குணகங்களின் மதிப்புகளிலிருந்து சுயாதீனமானது என்பது தெளிவாகிறது. ஒரு பவர் தொடரின் ஒருங்கிணைப்பு பற்றி இப்போது மூன்று சாத்தியமான வழக்குகளை தருகிறோம்.

- தொடர் $x = 0$ தவிர x இன் மதிப்புகள் இல்லாமல் குவிகிறது (இது ஒன்றிணைக்கும் அற்பமான புள்ளி), பின்னர் அது "எங்கும் குவிவதில்லை" என்று அழைக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு : தொடர் $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ $x = 0$ தவிர x இன் மதிப்பில் குவிவதில்லை எனவே, எங்கும் குவிந்த தொடர் அல்ல

- இந்த தொடர் x இன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் இணைகிறது, பின்னர் அது "எல்லா இடங்களிலும் குவிந்தது" என்று அழைக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு : தொடர் $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ மற்றும் $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$ எல்லா இடங்களிலும் குவிந்தவை.

- தொடர் x இன் சில மதிப்புகளுக்கு குவிகிறது மற்றும் மற்றவற்றுக்கு வேறுபடுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு : தொடர் $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ $x \leq 1$ க்கு குவிகிறது மற்றும் $x > 1$ -க்கு வேறுபடுகிறது.

தொடர் குவிந்திருக்கும் x புள்ளிகளின் தொகுப்பு அதன் "ஒருங்கிணைந்த பகுதி" என்று அழைக்கப்படுகிறது

3.6.3 குவிதல் ஆரம் (Radius of Convergence)

ஒவ்வொரு பவர் தொடருக்கும் $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, (எல்லா இடங்களிலும் ஒன்றிணைந்த அல்லது எங்கும் ஒன்றிணைந்தவற்றைத் தவிர), ஒரு வரையறுக்கப்பட்ட நேர்மறை எண் R உள்ளது, அதாவது இந்தத் தொடர் ஒவ்வொரு $|x| < R$ -க்கு குவிகிறது மற்றும் ஒவ்வொரு $|x| > R$ -க்கும் வேறுபடுகிறது. இந்த எண் R ஆனது கொடுக்கப்பட்ட பவர் தொடரின் குவிதல் ஆரம் என்று அழைக்கப்படுகிறது.

3.6.4 குவிதல் இடைவெளி (Interval of convergence)

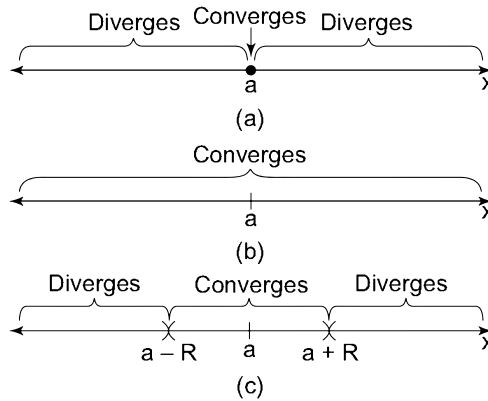
R என்பது ஒரு பவர் தொடரின் $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ குவிதல் ஆரம், திறந்த இடைவெளி $(-R, R)$ கொடுக்கப்பட்ட பவர் தொடரின் குவிதல் இடைவெளி என்று அழைக்கப்படுகிறது.

பயனுள்ள முடிவுகள்

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ ஒரு பவர் தொடராக இருக்கட்டும் $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = \frac{1}{R}$ குவிதல் ஆரம் கொண்ட குவிதல் R .
2. பவர் வரிசைக்கு $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ குவிதல் ஆரம் $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$, வரம்பு உள்ளது.

3.6.5 பவர் தொடரின் வரைகலை பிரதிநிதித்துவம்

ஒரு தொடருக்கு $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x - a)^n$ வரைபடம் (a) $R = 0$, இல் குவிதல் ஆரத்தைக் காட்டுகிறது. வரைபடம் (b) $R = \infty$ இல் குவிதல் ஆரத்தைக் காட்டுகிறது. வரைபடம் (c) $x = a + R$ மற்றும் $x = a - R$ என்ற இறுதிப் புள்ளியில் இந்தத் தொடர் ஒன்று சேரலாம் அல்லது இல்லாமல் இருக்கலாம் என்பதை நாங்கள் கவனிக்கிறோம்.



படம் 3.4

i. $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ ii. $\sum_{n=0}^{\infty} (2n-1) x^n$

i. $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ என்ற பவர் தொடரை கருத்தில் கொள்ளுங்கள்

$\therefore$ இங்கு $a_n = n!$ மையும் 0.

$\therefore$ ஒருங்கிணைப்பு ஆரம் $R = 0$

ii. இங்கு $\sum_{n=0}^{\infty} (2n - 1) x^n$ மையம் 0.

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2n-1}{2n+1} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1 - \frac{1}{2n}}{1 + \frac{1}{2n}} \right| = 1 \end{aligned}$$

$\therefore$ ஒருங்கிணைப்பு ஆரம் $R = 1$

i. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!}$ ii. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)^n (x-4)^n$

தீர்வு : i. இங்கு $a_n = \frac{1}{n!}$ மையம் 2.

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} |n+1| = \infty \end{aligned}$$

$\therefore$ ஒருங்கிணைப்பு ஆரம் $R = \infty$

ii. இங்கு $a_n = (n + 2)^n$, மையம் 4

$$\begin{aligned}\frac{1}{R} &= \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} |(n + 2)^n|^{1/n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} |(n + 2)| = \infty\end{aligned}$$

$\therefore$ ஒருங்கிணைப்பு ஆரம் $R = 0$

எடுத்துக்காட்டு 3.99 : பவர் தொடரின் ஒருங்கிணைப்பு மற்றும் இடைவெளியின் ஆரம் தீர்மானிக்கவும்

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} x^{3n}.$$

தீர்வு : இங்கு $a_n = 3^{-n}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{R} &= \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3^{-1} = \frac{1}{3} \\ R &= 3^{1/3}\end{aligned}$$

மற்றும் ஒருங்கிணைப்பின் இடைவெளி $(-3^{1/3}, 3^{1/3})$

$$\begin{aligned}x = -3^{1/3} \text{ இல், } \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} [(-3)^{1/3}]^{3n} &= \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} (-3)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} (-1)^n (-3)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \begin{cases} 0, & \text{If } n \text{ is even} \\ -1, & \text{If } n \text{ is odd} \end{cases}\end{aligned}$$

$\Rightarrow x = (-3)^{1/3}$ இல் தொடர் ஒன்றிணைவதில்லை

$x = 3^{1/3}$ இல், $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} [(3)^{1/3}]^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} (3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n+n} = 1$ இது வேறுபட்டது எனவே ஒன்றிணைப்பின் இடைவெளி $(-3^{1/3}, 3^{1/3})$.

எடுத்துக்காட்டு 3.100 : பவர் தொடரின் ஆரம் மற்றும் இடைவெளியைத் தீர்மானிக்கவும் $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n x^n}{(n+1)^2}$

தீர்வு : இங்கு $a_n = \frac{n}{(n+1)^2}$ மையம் 0 உடையது

$$\begin{aligned}R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n(n+2)^2}{(n+1)(n+1)^2} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(\frac{n}{n+1} \right) \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^2 \right|\end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \left(\frac{1 + 2/n}{1 + 1/n} \right)^2 \right| = 1$$

∴ ஒருங்கிணைப்பு ஆரம் = 1 மற்றும் தொடர் $|x - 0| < 1$ இடைவெளியில் ஒன்றிணைந்தது. அது $-1 < x < 1$.

$x = -1$ இல் பவர் தொடர் ஆனது

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^2} (-1)^n$ இது ஒரு மாற்று தொடர் மற்றும் லீப்னிட்ஸ் சோதனை மூலம் ஒன்றிணைந்தது

$a_n > a_{n+1}$ மற்றும் $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+1)^2} = 0$

$x = 1$ இல் பவர் தொடர் $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+1)^2}$ ஆக மாறும், இது நேர்மறைத் தொடர் மற்றும் வேறுபட்டது

$$a_n = \frac{n}{(n+1)^2} = \frac{1}{n \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2}$$

அதனால் $b_n = \frac{1}{n}$ எனில்

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^2} = 1 \text{ (non-zero, முடிவறு)}$$

∴ $\sum a_n$ மற்றும் $\sum b_n$ ஆகியவை ஒன்றிணைந்து வேறுபடுகின்றன.

ஆனால் p -சோதனையின் (p -test) மூலம் தொடர் $\sum b_n = \sum \frac{1}{n}$ வேறுபட்டது.

∴ $\sum a_n = \sum \frac{n}{(n+1)^2}$ வேறுபட்டது.

எனவே பவர் தொடரின் ஒருங்கிணைப்பின் இடைவெளி $[-1, 1)$.

எடுத்துக்காட்டு 3.101 : பவர் தொடர் $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x - 1)^n$ இன் ஒருங்கிணைப்பின் ஆரத்தை தீர்மானிக்கவும். மேலும் பவர் தொடரின் ஒருங்கிணைப்பின் இடைவெளியையும் கண்டறியவும்.

தீர்வு : இங்கே $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ பவர் தொடரின் மையத்துடன் 1 ஆகும்

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} (n+1)}{n (-1)^{n+2}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)}{n (-1)} \right| = 1 \end{aligned}$$

∴ ஒருங்கிணைப்பு ஆரம் = 1 மற்றும் தொடர் இடைவெளி $|x - 1| < 1$ உள்ளே இணைகிறது $|x - 1| < 1$ அது $-1 < (x - 1) < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$.

$x = 2$ -இல், பவர்த்தொடர் ஆனது, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ இது $a_n = \frac{1}{n}$, $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$ ஒரு மாற்று தொடர் மற்றும் லீப்னிட்ஸ் சோதனையின் (Leibnitz's test) மூலம் ஒன்றிணைந்தது தெளிவாக, $a_n > a_{n+1}$ மற்றும் $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$

∴ பவர் தொடர் $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x - 1)^n = 0$ என்பது $x = 2$ -இல் ஒன்று சேர்கிறது.

$x = 0$ -இல், பவர்த்தொடர் ஆனது.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (-1)^n}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n} (-1)}{n}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{n}$ இது p -மூலம்வேறுபட்டது ($p = 1$)

∴ பவர் தொடரின் ஒருங்கிணைப்பு இடைவெளி = $(0, 2]$.

பயிற்சி 3.13

1. பின்வரும் பவர்த் தொடர்கள் ஒவ்வொன்றின் ஒன்றிணைப்பின் ஆரம் மற்றும் இடைவெளியின் இடைவெளியைத் தீர்மானிக்கவும் :

i. $\sum \frac{(n+1)x^n}{(n+2)(n+3)}$

ii. $\sum \frac{2^n x^n}{n!}$

iii. $\sum \frac{(n!)^2 x^{2n}}{(2n)!}$

iv. $\sum \frac{(-1)^n x^{2n}}{(n!)^2 2^{2n}}$

v. $\sum \frac{(x-1)^n}{2n}$

vi. $\sum \frac{n! (x+2)^n}{n^n}$

vii. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{\log n}$

viii. $\sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

2. பவர் தொடர் $1 + \frac{a \cdot b}{1 \cdot c} x + \frac{a(a+1) \cdot b(b+1)}{1 \cdot 2 \cdot c(c+1)} x^2 + \dots$ ஒன்றிணைப்பு ஆரம் ஒன்று உள்ளது என்பதை நிரூபிக்கவும்.

3. பின்வரும் பவர் தொடரின் ஒருங்கிணைப்பின் ஆரம் தீர்மானிக்கவும்

i. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} (x-1)^{2n}$

ii. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n!}$

iii. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot x^{2n}$

iv. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)! (x-a)^n$

v. $\sum_{n=0}^{\infty} n^n (x-5)^{2n}$

விடைகள்

1. i. $R = 1, [-1, 1)$	ii. $R = \infty, \mathbb{R}$	iii. $R = 2, (-2, 2)$
iv. $R = \infty, \mathbb{R}$	v. $R = 2, (-1, 3)$	vi. $R = e, (-2-e, -2+e)$
vii. $R = 1, [-3, -1)$	viii. $R = \sqrt{2}, (-\mathbb{R}, \mathbb{R})$	
3. i. $\sqrt{2}$	ii. ∞	iii. $\sqrt{\frac{3}{2}}$
iv. 0	v. 0	

3.7 ஃபோரியர் தொடர்

பல பொறியியல் மற்றும் உடல் ரீதியான பிரச்சனைகள் அவற்றின் தீர்வுக்கான படிப்பை உள்ளடக்கியது ஃபோரியர் தொடர்; உதாரணம், வெப்ப கடத்தல், மின்னாற்றல் மற்றும் இயந்திர அதிர்வுகள். இவற்றை சார்புகளின் சைன் மற்றும் கொசைன் தொடர்களில் வெளிப்படுத்துவது அவசியம். சின்களின் வரிசையில் செயல்படுகிறது. பயன்பாட்டுகணிதத்தில் நிகழும் பெரும்பாலான ஒற்றை மதிப்புள்ள சார்புகளை, மாறியின் மதிப்புகளின் விரும்பிய வரம்பிற்குள்

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots$$

என்ற வடிவத்தில் வெளிப்படுத்தலாம். அத்தகைய தொடர் ஃபோரியர் தொடர் என்று அழைக்கப்படுகிறது. சில முக்கியமான முடிவுறு தொகையிடல்கள், பின்வருமாறு:

- $\int_c^{c+2\pi} \sin mx \, dx = 0$
- $\int_c^{c+2\pi} \cos mx \, dx = 0$
- $\int_c^{c+2\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0, m \neq n$
- $\int_c^{c+2\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0, m \neq n$
- $\int_c^{c+2\pi} \sin^2 mx \, dx = 0, m \neq 0$
- $\int_c^{c+2\pi} \cos^2 mx \, dx = 0, m \neq 0$
- $\int_c^{c+2\pi} \cos mx \cos nx \, dx = 0, m \neq n$
- $\int_c^{c+2\pi} \sin mx \sin nx \, dx = 0, m \neq n$

3.7.1 ஃபோரியர் தொடருக்கான டிரிசுலெட்டின் நிபந்தனைகள்

$c \leq x \leq c + 2$ என்ற இடைவெளியில் ஒரு சார்பு $f(x)$ வரையறுக்கப்பட்டால், கொடுக்கப்பட்ட இடைவெளியில்,

- முடிவுற்றது, ஒற்றை மதிப்புடையது
- முடிவுற்ற எண்ணிக்கையிலான தனித்தன்மைகள் கொண்டுள்ளது.
- குறிப்பிட்ட இடைவெளிகளுடன் மறுபடியும் மறுபடியும் நிகழ் உள்ளது.
- முடிவுற்ற எண்ணிக்கையிலான எண்ணிக்கையிலான பெருமம் மற்றும் குறுமம் உள்ளது.

பின்னர் $f(x)$ சார்பிற்கான ஃபோரியர் தொடர் என பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_c^{c+2\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_c^{c+2\pi} f(x) \cos nx dx \text{ \& } b_n$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_c^{c+2\pi} f(x) \sin nx dx$$

a_0, a_n, b_n ஆகியவை யூலரின் சூத்திரங்கள் என்று அழைக்கப்படுகின்றன.

மேற்கூறிய நான்கு நிபந்தனைகள், டிரிச்சுலெட்டின் நிபந்தனைகள் என அழைக்கப்படுகிறது.

குறிப்பு 1 : ஃபோரியர் விரிவாக்கம் எல்லா நிலையிலும் செல்லுபடியாகாது என்பதை கவனத்தில் கொள்ள வேண்டும்.

குறிப்பு 2 : யூலரின் சூத்திரங்கள் a_0, a_n, b_n பின்வருமாறு பெறப்படுகின்றன,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad \dots(1)$$

(1)-ன் இருபுறமும் c மற்றும் $c + 2\pi$ என்ற எல்லைகளுக்கு இடையில் தொகையிட,

$$\int_c^{c+2\pi} f(x) dx = \int_c^{c+2\pi} \frac{a_0}{2} dx + \int_c^{c+2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx dx + \int_c^{c+2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx dx$$

$$= \int_c^{c+2\pi} f(x) dx \frac{a_0}{2} 2\pi + a_n \times 0 + b_n \times 0 = a_0 \pi$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_c^{c+2\pi} f(x) dx$$

ஏனெனில் $\int_c^{c+2\pi} \sin mx dx = 0$ மற்றும் $\int_c^{c+2\pi} \cos mx dx = 0$

(1)-ன் இருபுறமும் $\cos nx$ மற்றும் $(c, c+2\pi)$ என்ற எல்லைகளுக்கு இடையில் தொகையிட,

$$\int_c^{c+2\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$= \int_c^{c+2\pi} \frac{a_0}{2} \cos nx dx + \int_c^{c+2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \right) \cos nx dx$$

$$+ \int_c^{c+2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \right) \cos nx dx$$

$$= \frac{a_0}{2} \times 0 + a_n \pi + 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_c^{c+2\pi} f(x) \cos nx \, dx \begin{cases} \int_c^{c+2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \right) \cos nx \, dx \\ = \int_c^{c+2\pi} (a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx) \cos nx \, dx \\ = a_n \pi \begin{cases} \int_c^{c+2\pi} \cos mx \cos nx \, dx = 0, m \neq n \\ = \pi, m = n \end{cases} \end{cases}$$

இதே போல,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_c^{c+2\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

மேலும்

i. $c = 0$ எனில், இடைவெளி $0 \leq x \leq 2\pi$ என ஆகிறது, பின்னர் சமன்பாடு (1)-லிருந்து,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

இங்கு,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

ii. $c = -\pi$ எனில், இடைவெளி $-\pi \leq x \leq \pi$ என ஆகிறது, பின்னர் சமன்பாடு (1) லிருந்து,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

இங்கு,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

சில தீர்க்கப்பட்ட உதாரணங்கள்

எடுத்துக்காட்டு 3.102 : $-\pi$ யிலிருந்து π வரை e^{-ax} க்கான ஃபோரியர் தொடரைக்காண்க. மேலும் $\pi/\sin h\pi$ க்கான தொடரைத் தருவி.

தீர்வு :

$$f(x) = e^{-ax} \text{ என்க}$$

$$e^{-ax} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ax} dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{e^{-ax}}{-a} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{-a\pi} [e^{-a\pi} - e^{a\pi}]$$

$$= \frac{2}{a\pi} [\sin h a\pi]$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ax} \cos nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{e^{-ax}}{a^2 + n^2} [-a \cos nx + n \sin nx] \right\}_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi(a^2 + n^2)} [e^{-a\pi} \{-a \cos n\pi + 0\} - e^{a\pi} \{-a \cos(-n\pi) + 0\}]$$

$$= \frac{1}{\pi(a^2 + n^2)} [-a (-1)^n \{e^{-a\pi} - e^{a\pi}\}]$$

$$a_n = \frac{2a (-1)^n}{\pi(a^2 + n^2)} \sin h a\pi$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ax} \sin nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{e^{-ax}}{a^2 + n^2} [-a \sin nx - n \cos nx] \right\}_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi(a^2 + n^2)} [e^{-a\pi} \{0 - n \cos n\pi\} - e^{a\pi} \{0 - n \cos(-n\pi)\}]$$

$$= \frac{1}{\pi(a^2 + n^2)} [(-1)^n n \{e^{a\pi} - e^{-a\pi}\}]$$

$$b_n = \frac{2(-1)^n n}{\pi(a^2 + n^2)} \sin h a\pi$$

இவ்வாறாக,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin h a\pi}{a\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n n}{\pi(a^2 + n^2)} \sin h a\pi \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n n}{\pi(a^2 + n^2)} \sin h a\pi \sin nx \\ &= \frac{\sin h a\pi}{a\pi} - \frac{2a}{\pi(a^2 + 1^2)} \sin h a\pi \cos x + \frac{2a}{\pi(a^2 + 2^2)} \sin h a\pi \cos 2x \\ &\quad - \frac{2a}{\pi(a^2 + 3^2)} \sin h a\pi \cos 3x + \dots - \frac{2}{\pi(a^2 + 1^2)} \sin h a\pi \sin x \\ &\quad + \frac{2 \times 2}{\pi(a^2 + 2^2)} \sin h a\pi \sin 2x - \frac{2 \times 3}{\pi(a^2 + 3^2)} \sin h a\pi \sin 3x + \dots \end{aligned}$$

மேலே உள்ள சமன்பாட்டில் $x = 0$, $a = 1$ எனப் பிரதியிட, கிடைப்பது

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\sin h \pi}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\pi(n^2 + 1^2)} \\ &= \frac{2 \sin h \pi}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\pi(n^2 + 1^2)} \right] \\ \frac{\pi}{\sin h \pi} &= 2 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{1^2 + 1^2} + \frac{1}{1^2 + 2^2} + \frac{1}{1^2 + 3^2} + \dots \right] \\ &= 2 \left[\frac{1}{1^2 + 2^2} + \frac{1}{1^2 + 3^2} + \frac{1}{1^2 + 4^2} + \dots \right] \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.103 : $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$, $-\pi < x < \pi$ என நிறுவுக. மேலும்

$$\begin{aligned} 1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{\pi^2}{6} & 2. \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots &= \frac{\pi^2}{12} \\ 3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} &= \frac{\pi^2}{8} & 4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} &= \frac{\pi^4}{90} \text{ என நிறுவுக.} \end{aligned}$$

தீர்வு :

$$f(x) = x^2 \text{ என்க}$$

$$x^2 = f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \, dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[(x^2) \left(\frac{\sin nx}{n} \right) - (2x) \left(-\frac{\cos nx}{n^2} \right) + 2 \left(-\frac{\sin nx}{n^3} \right) \right]_0^{\pi} \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{2x}{n^2} \cos nx \right]_0^{\pi} \text{ ஏனெனில் } 0 \text{ மற்றும் } \pi\text{-க்கு இடைப்பட்ட இடைவெளியில் } nx = 0 \\
 &= \frac{4}{\pi n^2} [\pi \cos n\pi - 0 \times \cos(0)] \\
 &= \frac{4(-1)^n}{n^2}
 \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx \, dx = 0 \text{ ஏனெனில் } x^2 \sin nx \text{-ஆனது ஒற்றைச் சார்பு.}$$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx \quad \dots(1)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\pi^2}{3} + 4 \left[-\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} - \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 4x}{4^2} - \dots \right] \\
 &= \frac{\pi^2}{3} - 4 \left[\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \frac{\cos 4x}{4^2} + \dots \right]
 \end{aligned}$$

$x = \pi$ என (1)-ல் பிரதியிட

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

$$\frac{2\pi^2}{3} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^n}{n^2}$$

$$= 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ [பகுதி (1) நிரூபிக்கப்பட்டது]} \quad \dots(2)$$

இவ்வாறாக, $\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$

$x = 0$ என (1)-ல் பிரதியிட, கிடைப்பது,

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

$$= \frac{\pi^2}{3} + 4 \left[-\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \dots \right]$$

$$\frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots \text{ [பகுதி (2) நிரூபிக்கப்பட்டது]} \quad \dots(3)$$

(2) மற்றும் (3) ஐக் கூட்ட கிடைப்பது,

$$\frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{12} = 2 \left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \dots \right]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \text{ [பகுதி (3) நிரூபிக்கப்பட்டது]}$$

$$(1) \Rightarrow x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

இருபுறமும் x^2 ஆல் பெருக்க கிடைப்பது

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi^2}{3} x^2 dx + 4 \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} x^2 \cos nx dx$$

$$\frac{2\pi^5}{5} = \frac{1}{9} (2\pi^5) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx dx$$

$$= \frac{2}{9} \pi^5 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} 2 \left[(x^2) \left(\frac{\sin nx}{n} \right) - (2x) \left(-\frac{\cos nx}{n^2} \right) + 2 \left(-\frac{\sin nx}{n^3} \right) \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{9} \pi^5 + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \left(\frac{2\pi \cos n\pi}{n^2} \right)$$

$$= \frac{2}{9} \pi^5 + 16\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^n}{n^4}$$

$$= \frac{2}{9} \pi^5 + 16\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

$$16\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{2\pi^5}{5} - \frac{2}{9} \pi^5 = \frac{8}{45} \pi^5$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \text{ [பகுதி (4) நிரூபிக்கப்பட்டது]}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.104 : $-\pi < x < \pi$ என்ற இடைவெளியில் $f(x) = x + x^2$ -க்கான ஃபோரியர் தொடரைக்

காண்க. மேலும் $\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$ என்ற தொடரைத் தருவி.

தீர்வு : நீங்கள் முயற்சிக்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.105 : $f(x) = x \sin x$, $0 < x < 2\pi$ -க்கான ஃபோரியர் தொடரைக் காண்க.

மேலும் $\frac{\pi-2}{4} = \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} - \dots$ என்ற தொடரைத் தருவி.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டது $f(x) = x \sin x$

$$x \sin x = f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \text{ என்க}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin x \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} [x(-\cos x) - (-\sin x)]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} [-2\pi] = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin x \cos nx \, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x [\sin (n+1)x - \sin (n-1)x] \, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[x \left(\frac{-\cos (n+1)x}{n+1} + \frac{\cos (n-1)x}{n-1} \right) - \left(\frac{-\sin (n+1)x}{(n+1)^2} + \frac{\sin (n-1)x}{(n-1)^2} \right) \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[2\pi \left(\frac{\cos 2(n+1)\pi}{(n+1)} + \frac{\cos 2(n-1)\pi}{(n-1)} \right) \right] \end{aligned}$$

எல்லைகளை பிரதியிடும் போது தொகையிடலின் 2வது பகுதி பூஜ்ஜியம் ஆகும்

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \left[2\pi \left(\frac{-1}{(n+1)} + \frac{1}{(n-1)} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[2\pi \left(\frac{2}{n^2-1} \right) \right], \quad n \neq \pm 1 \\ a_n &= \frac{2}{n^2-1} \end{aligned}$$

$n = 1$ எனும்போது,

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin x \cos x \, dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x \sin 2x \, dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[(2x) \left(\frac{-\cos 2x}{2} \right) - (1) \left(\frac{-\sin 2x}{4} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} [-\pi] = \frac{-1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin x \sin nx \, dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x [\cos (n-1)x - \cos (n+1)x] \, dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[x \left(\frac{\sin (n-1)x}{(n-1)} - \frac{\sin (n+1)x}{(n+1)} \right) - \left(\frac{-\cos (n-1)x}{(n-1)^2} - \frac{-\cos (n+1)x}{(n+1)^2} \right) \right]_0^{2\pi} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\cos 2(n-1)\pi}{(n-1)^2} - \frac{\cos 2(n+1)\pi}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) - \left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \right] \\
 &= 0, n \neq \pm 1
 \end{aligned}$$

$n = 1$ எனும் போது,

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin^2 x \, dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x (1 - \cos 2x) \, dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[x \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right) - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{\cos 2x}{4} \right) \right]_0^{2\pi} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[x^2 - \frac{x^2}{2} - \frac{\cos 2x}{4} - \frac{x \sin 2x}{2} \right]_0^{2\pi} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{4\pi^2}{2} - \frac{1}{4} \right) - \left(-\frac{1}{4} \right) \right] = \frac{1}{2\pi} \times 2\pi^2 = \pi
 \end{aligned}$$

இவ்வாறாக,

$$x \sin x = -1 - \frac{1}{2} \cos x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{(n^2 - 1)} \cos nx + \pi \sin x + \sum_{n=2}^{\infty} 0 \sin nx \quad \dots(1)$$

$$x \sin x = -1 - \frac{1}{2} \cos x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{(n^2 - 1)} \cos nx + \pi \sin x \quad \dots(2)$$

$x = \frac{\pi}{2}$ என (1)-ல் பிரதியிட, கிடைப்பது,

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= -1 + \pi + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{(n^2 - 1)} \cos \frac{n\pi}{2} \\ &= -1 + \pi + 2 \left[\frac{1}{2^2 - 1} \cos \pi + \frac{1}{3^2 - 1} \cos \frac{3\pi}{2} + \frac{1}{4^2 - 1} \cos 2\pi + \dots \right] \\ -\pi + \frac{\pi}{2} &= -1 - 2 \left[\frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} - \dots \right] \\ 1 - \frac{\pi}{2} &= -2 \left[\frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} - \dots \right] \\ \frac{\pi - 2}{4} &= \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} - \dots \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.106 : $f(x) = \left(\frac{\pi - 2}{4}\right)^2$ -ஐ $0 < x < 2\pi$ -என்ற இடைவெளியில்

$$f(x) = \frac{\pi^2}{48} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \text{ என நிறுவுக.}$$

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டது $f(x) = \left(\frac{\pi - 2}{4}\right)^2$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\pi - 2}{4}\right)^2 &= f(x) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \text{ என்க} \end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi - 2}{4}\right)^2 dx = \frac{\pi^2}{24}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi - 2}{4}\right)^2 \cos nx dx \\ &= \frac{1}{16\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x)^2 \cos nx dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{16\pi} \left[(\pi - x)^2 \left(\frac{\sin nx}{n} \right) - 2(\pi - x) (-1) \left(-\frac{\cos nx}{n^2} \right) + 2(-1)^2 \left(-\frac{\sin nx}{n^3} \right) \right]_0^{2\pi} \\
 &= \frac{1}{16\pi} \left[(\pi - x)^2 \left(\frac{\sin nx}{n} \right) + 2(\pi - x) \left(-\frac{\cos nx}{n^2} \right) - \frac{2\sin nx}{n^3} \right]_0^{2\pi} \\
 &= \frac{1}{16\pi} \left[-2(\pi - x) \left(-\frac{\cos nx}{n^2} \right) \right]_0^{2\pi} \\
 &= \frac{1}{16\pi} \left[2\pi \frac{\cos 2n\pi}{n^2} + 2\pi \frac{1}{n^2} \right] \\
 &= \frac{\pi}{16\pi} \left[\frac{2}{n^2} + \frac{2}{n^2} \right] = \frac{1}{16} \left[\frac{4}{n^2} \right] = \frac{1}{4n^2}
 \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi - 2}{4} \right)^2 \sin nx \, dx = 0$$

இவ்வாறாக, $\left(\frac{\pi - 2}{4} \right)^2 = \frac{\pi^2}{48} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$

எடுத்துக்காட்டு 3.107 : $-\pi < x < \pi$ என்ற

இடைவெளியில் $\cos h ax = \frac{2a^2}{\pi} \sin a\pi \left\{ \frac{1}{2a^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} \cos nx \right\}$ என நிறுவுக.

தீர்வு : நீங்கள் முயற்சிக்கவும்.

பயிற்சி 3.14

1. $f(x) = x \cos x$, $0 < x < 2\pi$ என்ற சார்புக்கு ஃபோரியர் தொடரைக் காண்க.
2. $f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 < x < \pi \end{cases}$ க்கு ஃபோரியர் தொடரைக் காண்க.
3. $f(x) = \sin ax$ ஐ $-\pi < x < \pi$ என்ற இடைவெளியில் ஃபோரியர் தொடரை விரிவுப்படுத்துக.
4. $f(x) = x - x^2$ ஐ $-\pi < x < \pi$ என்ற இடைவெளியில் ஃபோரியர் தொடரை விரிவுப்படுத்துக.
5. $f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{2x}{\pi}, & -\pi < x < 0 \\ 1 - \frac{2x}{\pi}, & 0 < x < \pi \end{cases}$ என்ற சார்புக்கு ஃபோரியர் தொடரைக் காண்க.
6. $f(x) = |\sin x|$, $-\pi < x < \pi$ என்ற சார்புக்கு ஃபோரியர் தொடரைக் காண்க.
7. $f(x+2\pi) = f(x)$ எனும் போது, $f(x) = \begin{cases} x+\pi, & 0 \leq x \leq \pi \\ -x+\pi, & \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$ என்ற சார்புக்கு ஃபோரியர் தொடரைக் காண்க.

8. ஒரு மாற்று மின்னோட்டம், ஒரு திருத்தி வழியாகச் சென்ற பிறகு கொடுக்கப்பட்ட வடிவத்தைக் கொண்டுள்ளது, அங்கு I_0 அதிகப்பட்சம் மின்னோட்டம் மற்றும் காலம் 2π ஆகும். i - ஐஃபோரியர் தொடராக வெளிப்படுத்து. $i = \begin{cases} I_0 \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$
9. $f(x) = |\cos x|$ ஐ $-\pi < x < \pi$ என்ற இடைவெளியில் ஃபோரியர் தொடரை விரிவுப்படுத்துக.
10. $f(x) = \sqrt{1 - \cos x}$ ஐ $(0, 2\pi)$ என்ற இடைவெளியில் ஃபோரியர் தொடரை விரிவுப்படுத்துக.

விடைகள்

- $x \cos x = -\frac{1}{2} \sin x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n^2 - 1)} \sin nx$
- $f(x) = -\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right]$
- $\sin ax = \frac{2 \sin a\pi}{\pi} \left[\frac{\sin x}{1^2 - a^2} - \frac{2 \sin 2x}{2^2 - a^2} + \frac{3 \sin 3x}{3^2 - a^2} - \dots \right]$
- $x - x^2 = -\frac{\pi^2}{3} + 4 \left[\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots \right]$
- $f(x) = \frac{8}{\pi^2} \left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right]$
- $|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left[\frac{\cos 2x}{3} + \frac{\cos 4x}{15} + \dots \right]$
- $f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right]$
- $i = \frac{t_0}{2} + \frac{t_0}{2} \sin x - \frac{2 t_0}{\pi} \left[\frac{\cos 2x}{2^2 - 1} + \frac{\cos 4x}{4^2 - 1} + \frac{\cos 6x}{6^2 - 1} + \dots \right]$
- $|\cos x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \left[\frac{\cos 2x}{3} + \frac{\cos 4x}{15} + \dots \right]$
- $\sqrt{1 - \cos x} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} - \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)}$

3.7.2 இரட்டை மற்றும் ஒற்றைப் படை சார்புகள்

$f(-x) = f(x)$ எனில் சார்பு $f(x)$ ஆனது ஒரு இரட்டைப் படை சார்பு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு x^2 , $\cos x$

$f(-x) = -f(x)$ எனில் சார்பு $f(x)$ ஆனது ஒருஒற்றைப் படை சார்பு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு $x, \sin x$

$f(x)$ ஆனது ஒரு இரட்டைப் படை சார்பு எனும் போது,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = 0$$

(ஒற்றைப் படை சார்பு $\times$ இரட்டைப் படை சார்பு) = ஒற்றைப் படை சார்பு

$f(x)$ ஆனது ஒரு ஒற்றைப் படை சார்பு எனும் போது,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

(ஒற்றைப் படை சார்பு $\times$ இரட்டைப் படை சார்பு) = ஒற்றைப் படை சார்பு

3.7.3 தொடர்ச்சியற்ற சார்புகளுக்கான ஃபோரியர் தொடர்

$f(x)$ ஆனது $x = x_0$ -ல் தொடர்ச்சியற்றது என்க.

$$\Rightarrow f(x_0 - 0) < f(x_0) \text{ மற்றும் } f(x_0 + 0) < f(x_0)$$

இரண்டு எல்லைகள் $f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$ பெறப்பட்டு, சமமாக இல்லையெனில் தொடர்ச்சியற்ற ஒரு

புள்ளியில் சார்பின் மதிப்பு $f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$ -ன் சராசரி ஆகும்

$$\text{அதாவது, } f(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}$$

தீர்க்கப்பட்ட சில எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 3.108 : $f(x) = \begin{cases} -\pi, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 < x < \pi \end{cases}$ -க்கு ஃபோரியர் தொடரைக் காண்க. மேலும்

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8} \text{ என்ற தொடரைத் தருவி.}$$

தீர்வு :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \text{ என்க}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 -\pi dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx \\ &= \frac{1}{\pi} [-\pi x]_{-\pi}^0 + \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[0 - \pi^2 + \frac{\pi^2}{2} - 0 \right] = -\frac{\pi^2}{2} \left(\frac{1}{\pi} \right) \end{aligned}$$

$$a_0 = -\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-\pi) \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\pi \sin nx}{n} \right]_{-\pi}^0 + \frac{1}{\pi} \left[x \frac{(\sin nx)}{n} - \frac{(-\cos nx)}{n^2} \right]_{-\pi}^0 \\ &= \frac{1}{\pi} [-\pi \times 0] + \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos n\pi}{n^2} + \left(-\frac{1}{n^2} \right) \right] \\ &= \frac{\cos n\pi - 1}{n^2} = \frac{(-1)^n - 1}{n^2} = \begin{cases} 0, & n \text{ ஒரு இரட்டை எண்} \\ -\frac{2}{\pi n^2}, & n \text{ ஒரு ஒற்றை எண்} \end{cases} \end{aligned}$$

$$a_1 = -\frac{2}{1^2 \pi}, a_2 = 0, a_3 = -\frac{2}{3^2 \pi}, a_4 = 0, a_5 = -\frac{2}{5^2 \pi} \dots$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-\pi) \sin nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[(-\pi) \frac{-\cos nx}{n} \right]_{-\pi}^0 + \frac{1}{\pi} \left[x \frac{(-\cos nx)}{n} - \frac{(-\sin nx)}{n^2} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[(\pi) \frac{\cos nx}{n} \right]_{-\pi}^0 + \frac{1}{\pi} \left[-x \frac{\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} \right]_0^{\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\pi} \left[\pi \left(\frac{1}{n} \right) - \pi \left(\frac{\cos nx}{n} \right) \right] + \frac{1}{\pi} \left[-\pi \frac{\cos nx}{n} \right] \\
 &= \frac{\pi}{\pi} \left[\frac{1}{n} - \frac{2(-1)^n}{n} \right] \\
 &= \frac{1}{n} - \frac{2(-1)^n}{n} = \frac{1}{n} [1 - 2(-1)^n] \\
 b_1 &= 3, b_2 = -\frac{1}{2}, b_3 = 1, b_4 = -\frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

இவ்வாறாக,

$$\begin{aligned}
 f(x) &= -\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right] \\
 &\quad + \left[3 \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{3 \sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots \right] \quad \dots(1)
 \end{aligned}$$

$x = 0$ என (1) ல் பிரதியிட, கிடைப்பது,

$$f(0) = -\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left[1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right] \quad \dots(2)$$

$x = 0$ என்ற புள்ளியில் சார்பு தொடர்ச்சியற்றது,

$$f(0) = \frac{f(0-0) + f(0+0)}{2} = \frac{-\pi + 0}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

$$(2) \Rightarrow -\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left[1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right]$$

$$-\frac{\pi}{4} = -\frac{2}{\pi} \left[1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right]$$

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.109 : $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \sin x, & 0 < x < \pi \end{cases}$ எனில் $f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{\sin x}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2mx}{4m^2 - 1}$

மேலும் $\frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} - \dots = \frac{\pi - 2}{4}$ என்ற தொடரைத் தருவி.

தீர்வு :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin mx \text{ என்க}$$

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 0 dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx \\
 &= \frac{1}{\pi} [-\cos x]_0^{\pi} \\
 &= \frac{1}{\pi} [1 + 1] = \frac{2}{\pi}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (0) \cos nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos nx \, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin x \cos nx \, dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [\sin (1+n)x + \sin (1-n)x] \, dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [\sin (1+n)x - \sin (1-n)x] \, dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{-\cos(n+1)x}{(n+1)} - \frac{-\cos(n-1)x}{(n-1)} \right]_0^{\pi}, \quad n \neq 1 \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{-\cos(n+1)\pi}{(n+1)} + \frac{\cos(n-1)\pi}{(n-1)} \right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{-(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{(-1)^{n-1}}{n-1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1} \right]
\end{aligned}$$

n இரட்டை எண் எனில் $n+1, n-1$ ஒரு ஒற்றை எண்

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1} \right] \\
&= \frac{2}{2\pi} \left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1} \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{2}{n^2-1} \right], \quad n \neq 1
\end{aligned}$$

n ஒற்றை எண் எனில் $n+1, n-1$ ஒரு இரட்டை எண்

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1} \right] = 0, \quad n \neq 1$$

$n = 1$ எனும் போது $a_1 = 0$ (மாணவர்கள் சரிபார்த்துக் கொள்ளவும்)

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 0 \cdot \sin nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cdot \sin nx \, dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \sin nx \, dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} 2 \sin nx \sin x \, dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [\cos(n-1)x - \cos(n+1)x] \, dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin(n-1)x}{(n-1)} - \frac{\sin(n+1)x}{(n+1)} \right]_0^{\pi} = 0, \, n \neq 1
 \end{aligned}$$

$$n = 1 \text{ எனும்போது } b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \sin x \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \text{ (மாணவர்கள் சரிபார்த்துக் கொள்ளவும்)}$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-2}{n^2 - 1} \cos nx + \frac{1}{2} \sin x$$

$n = 2m$ எனப் பிரதியிட,

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{\sin x}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2mx}{4m^2 - 1}$$

$$\text{மேலும் } \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} - \dots = \frac{\pi - 2}{4}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.110 : கொடுக்கப்பட்ட சார்பு $f(x) = \begin{cases} -x^2, & -\pi < x < 0 \\ x^2, & 0 < x < \pi \end{cases}$ க்கு ஃபோரியர் தொடரைக் காண்க.

தீர்வு :

எப்பொழுது $-\pi \leq x \leq 0$ அல்லது $0 \leq x \leq \pi$

$$\Rightarrow f(-x) = (-x)^2 = x^2 = -f(x)$$

எப்பொழுது $0 \leq x \leq \pi$ அல்லது $-\pi \leq x \leq 0$

$$\Rightarrow f(-x) = -(-x)^2 = -x^2 = -f(x)$$

$\Rightarrow [-\pi, \pi]$ -ல் உள்ள x -க்கு $f(x)$ என்பது ஒற்றைப்படை சார்பாகும். மேலும் மேலே உள்ள சார்பின் வரைபடம் ஆதியைப் பொறுத்து சமச்சீராக உள்ளது

$$a_0 = 0 = a_n$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \text{ என்க}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 -x^2 \sin nx \, dx + \int_0^{\pi} x^2 \sin nx \, dx \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{-x^2(-\cos nx)}{n} - \frac{(-2x)(-\sin nx)}{n^2} + \frac{(-2)(\cos nx)}{n^2} \right]_{-\pi}^0 \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2(-\cos nx)}{n} - \frac{(2x)(-\sin nx)}{n^2} + \frac{(2)(\cos nx)}{n^2} \right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\left(-\frac{2}{n^3} \right) - \left\{ \frac{-\pi^2(-\cos n\pi)}{n} + \frac{(-2)(\cos n\pi)}{n^3} \right\} \right] + \frac{1}{\pi} \left[\left(\frac{-\pi^2(\cos n\pi)}{n} + \frac{(2)(\cos n\pi)}{n^3} \right) - \left(\frac{2}{n^3} \right) \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{2}{n^3} - \frac{\pi^2(-1)^n}{n} + \frac{2(-1)^n}{n^3} + \frac{\pi^2(-1)^n}{n} + \frac{2(-1)^n}{n^3} - \frac{2}{n^3} \right] \\
b_n &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{4}{n^3} - \frac{2\pi^2(-1)^n}{n} + \frac{4(-1)^n}{n^3} \right] \\
b_1 &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{4}{1^3} - \frac{2\pi^2}{1} + \frac{4}{1^3} \right] = \frac{1}{\pi} \left[\frac{2\pi^2}{1} - \frac{8}{1^3} \right] \\
b_2 &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{4}{2^3} - \frac{2\pi^2}{2} + \frac{4}{2^3} \right] = -\pi \\
b_3 &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{4}{3^3} - \frac{2\pi^2}{3} + \frac{4}{3^3} \right] = \frac{1}{\pi} \left[\frac{2\pi^2}{3} - \frac{8}{3^3} \right] \\
b_4 &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{4}{4^3} - \frac{2\pi^2}{4} + \frac{4}{4^3} \right] = -\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

$$f(x) = \left(\frac{2\pi^2}{1} - \frac{8}{1^3} \right) \sin x - \pi \sin 2x + \left(\frac{2\pi^2}{3} - \frac{8}{3^3} \right) \sin 3x - \frac{\pi}{2} \sin 4x + \dots$$

எடுத்துக்காட்டு 3.111 : $-\pi < x < \pi$ என்ற இடைவெளியில்

$$\sin ax = \frac{2 \sin a\pi}{\pi} \left[\frac{\sin x}{1^2 - a^2} - \frac{2 \sin 2x}{2^2 - a^2} + \frac{3 \sin 3x}{3^2 - a^2} - \dots \right] \text{ என நிறுவுக.}$$

தீர்வு :

$$f(x) = \sin ax \text{ என்க}$$

$$\sin ax = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

நமக்கு $f(-x) = \sin(-ax) = -\sin ax = -f(x)$ எனத் தெரியும்

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட சார்பு $f(x)$ ஒரு ஒற்றைப்படை சார்பு,

$$a_0 = 0, a_n = 0$$

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin ax \sin nx \, dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin ax \sin nx \, dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos(n-a)x - \cos(n+a)x] \, dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(n-a)x}{(n-a)} - \frac{\sin(n+a)x}{(n+a)} \right]_0^{\pi} \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(n-a)\pi}{(n-a)} - \frac{\sin(n+a)\pi}{(n+a)} \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{(-1)^{n+1} \sin a\pi}{(n-a)} - \frac{(-1)^{n+1} \sin a\pi}{(n+a)} \right] \\
 &= \frac{(-1)^{n+1}}{\pi} \left[\frac{2n \sin a\pi}{n^2 - a^2} \right], n \neq a \\
 &= \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi(n^2 - a^2)} n \sin a\pi \\
 \sin ax &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi(n^2 - a^2)} n \sin a\pi \sin nx \\
 &= \frac{2 \sin a\pi}{\pi} \left[\frac{\sin x}{1^2 - a^2} - \frac{2 \sin 2x}{2^2 - a^2} + \frac{3 \sin 3x}{3^2 - a^2} - \dots \right]
 \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.112 : $f(x)$ என்ற சார்பு வரையறுக்கப்பட்டால் $f(x) = |x|$, $-\pi < x < \pi$ -க்கு ஃபோரியர்

தொடரைக் காண்க. மேலும் $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$ என்ற தொடரைத் தருவி.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட சார்பு

$$f(x) = |x|$$

$$f(x) = |x| = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad \dots(1)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-x) \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{-x^2}{2} \right]_{-\pi}^0 + \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} \\
 &= \frac{1}{2\pi} [(0 + \pi^2) + (\pi^2 + 0)] \\
 &= \frac{2\pi^2}{2\pi} = \pi \\
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx \, dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[(x) \left(\frac{\sin nx}{n} \right) - (1) \left(-\frac{\cos nx}{n^2} \right) \right]_0^{\pi} \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\cos n\pi}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right] \\
 &= \frac{2}{\pi n^2} [(-1)^n - 1]
 \end{aligned}$$

நிலை I : n ஒரு இரட்டை எண் எனில் $a_n = 0$

நிலை II : n ஒரு ஒற்றை எண் எனில் $a_n = \frac{-4}{\pi n^2}$

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-x) \sin nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (x) \sin nx \, dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[(-x) \left(\frac{-\cos nx}{n} \right) - (-1) \left(-\frac{\sin nx}{n^2} \right) \right]_{-\pi}^0 + \frac{1}{\pi} \left[(x) \left(\frac{-\cos nx}{n} \right) - (1) \left(-\frac{\sin nx}{n^2} \right) \right]_0^{\pi} \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[x \left(\frac{\cos nx}{n} \right) - \left(\frac{\sin nx}{n^2} \right) \right]_{-\pi}^0 + \frac{1}{\pi} \left[-x \left(\frac{\cos nx}{n} \right) + \left(\frac{\sin nx}{n^2} \right) \right]_0^{\pi} \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[-\left(-\frac{\pi (-1)^n}{n} \right) + \left(-\frac{\pi (-1)^n}{n} \right) \right] = \frac{1}{\pi} (0) = 0
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |x| = f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\frac{1}{1^2} \cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \dots \right] \quad \dots(1)$$

$x = 0$ என (1)-ல் பிரதியிட கிடைப்பது,

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right)$$

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

குறிப்பு : $|x|$ ஒரு இரட்டைப் படை சார்பு என்பதால் $|x| = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ என விரிவாக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.113 : $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \pi \\ 2\pi - x, & \pi < x < 2\pi \end{cases}$ என்ற சார்புக்கு ஃபோரியர் தொடரைக் காண்க.

மேலும் $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$ என்ற தொடரைத் தருவி.

தீர்வு : நீங்கள் முயற்சிக்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.114 : $f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{2x}{\pi}, & -\pi < x < 0 \\ 1 - \frac{2x}{\pi}, & 0 < x < \pi \end{cases}$ என்ற சார்புக்கு ஃபோரியர் தொடரைக் காண்க.

மேலும் $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$ என்ற தொடரைத் தருவி.

தீர்வு : நீங்கள் முயற்சிக்கவும்.

3.7.4 இடைவெளி மாற்றம் (அளவின் மாற்றம்)

நாம் இதுவரை 2π நீளத்தின் இடைவெளியை மட்டுமே கருத்தில் கொண்டோம், அதாவது $(-\pi, \pi)$ அல்லது $(0, 2\pi)$, ஆனால் பெரும்பாலான நடைமுறை பிரச்சினைகள் ' $2l$ ' என்று வெவ்வேறு காலங்களைக் கொண்ட சார்புகளைப் பயன்படுத்துவதை உள்ளடக்கியது. இதுபோன்ற சந்தர்ப்பங்களில், மாறியின் மாற்றம், தன்னிச்சையான நீளத்தின் இடைவெளி அதாவது ' $2l$ ' லிருந்து நீளம் 2π ஆக நாம் எளிமையாக மாற்றுகிறோம். பின்னர் ஃபோரியர் தொடரை தீர்மானிக்கவும்.

$(-l, l)$ அதாவது $-l < x < l$ என்ற இடைவெளியில் வரையறுக்கப்பட்ட சார்புக்கு $-\pi < x < \pi$ என மாற்ற

வேண்டும். அதற்கு $z = \frac{\pi x}{l}$ அல்லது $x = \frac{lz}{\pi}$ எனப் பிரதியிட வேண்டும்.

$$\therefore f(x) = f\left(\frac{lz}{\pi}\right) = F(z)$$

$$x = -l$$

$$\Rightarrow z = -\pi$$

$$\text{மற்றும் } x = l$$

$$\Rightarrow z = \pi$$

$(-\pi, \pi)$ என்ற இடைவெளியில் $F(z)$ வரையறுக்கப்படுகிறது,

$$F(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nz + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nz$$

இங்கு,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(z) dz$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(z) \cos nz dz$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(z) \sin nz dz$$

தலைகீழ் மாற்றத்தின் மூலம், கிடைப்பது,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

இங்கு,

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

3.7.5 அரை வீச்சு தொடர்

அரை இடைவெளியில் வரையறுக்கப்பட்ட $f(x)$ என்ற சார்பிற்கான ஃபோரியர் தொடரை நாங்கள் கண்டுபிடிக்க விரும்புகிறோம் என்று வைத்துக் கொள்வோம்

$0 \leq x \leq \pi$ அல்லது $0 \leq x \leq l$ என்ற இடைவெளியில் $F(x)$ என்ற சார்பை $-l \leq x \leq l$ -ல் வரையறுப்பதன் மூலம் இதைச் செய்யலாம்

$0 \leq x \leq l$ என்ற இடைவெளியில் $F(x) : f(x)$

இப்போது $-l \leq x \leq l$ இல் $F(x)$ ஐ வரையறுத்தால், $F(x)$ என்ற தொடரைப் பெறலாம். $F(x)$, $-l < x < l$ இல் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு, பின்வரும் இரண்டு வழிகளில் ஒன்று தேர்ந்தெடுக்கலாம்.

1. அரை வீச்சு கொசைன் தொடர்

$-l < x < l$ இல் $F(x)$ இரட்டைப் படை சார்பு என்றால் $0 < x < l$ இல் $F(x) = f(x)$ என்க, கிடைப்பது

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) dx = \frac{2}{l} \int_0^l F(x) dx = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 0$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

2. அரை வீச்சு சைன் தொடர்

$-l < x < l$ இல் $F(x)$ ஒற்றைப் படை சார்பு என்க, கிடைப்பது

$$a_0 = 0, a_n = 0$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$= \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

அல்லது

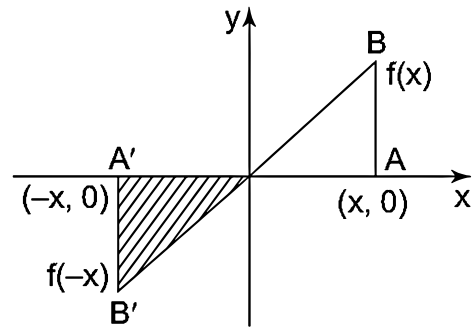
1. அரை வீச்சு சைன் தொடர்

$f(x)$ என்ற சார்பை இடைவெளி $0 < x < l$ -ல் ஒரு சைன் தொடராக விரிவாக்க வேண்டும் என்றால், ஆதியைப் பொறுத்து பிரதிபலிப்பதன் மூலம் சார்பை $-l < x < l$ வரை நீட்டிக்கிறோம், அதனால் $f(-x) = -f(x)$ இதற்காக $a_0 = a_n = 0$.

பின்னர் சார்பு $f(x)$ ஒரு ஒற்றைப்படை சார்பு மற்றும் எனவே, நமக்கு கிடைப்பது,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$\text{இங்கு, } b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

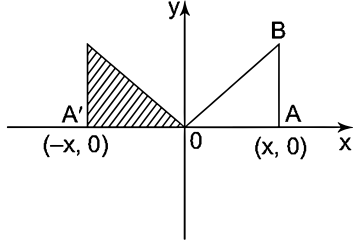


படம் 3.5

2. அரை வீச்சு கொசைன் தொடர்

$f(x)$ என்ற சார்பை இடைவெளி $0 < x < l$ -ல் ஒரு கொசைன் தொடராக விரிவாக்க வேண்டும் என்றால், y -அச்சைப் பொறுத்து பிரதிபலிப்பதன் மூலம் சார்பை $-l < x < l$ வரை நீட்டிக்கிறோம், அதனால் $f(-x) = f(x)$ இதற்காக $b_n = 0$.

பின்னர் சார்பு $f(x)$ ஒரு இரட்டைப்படை சார்பு மற்றும் எனவே, நமக்குகிடைக்கும் ஃபோரியர் தொடரானது,



படம் 3.6

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

இங்கு, $a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$$

குறிப்பு : $l = \pi$ எனில் $0 < x < \pi$ மற்றும் அரை வீச்சு சைன் தொடரானது

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

$$a_0 = 0, a_n = 0$$

இங்கு, $b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$

மற்றும் அரை வீச்சு கொசைன் தொடரானது

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

இங்கு, $a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx,$$

$$b_n = 0$$

சில தீர்க்கப்பட்ட உதாரணங்கள்

எடுத்துக்காட்டு 3.115: $f(x) = e^{-x}$ ஐ $(-l, l)$ என்ற இடைவெளியில் ஃபோரியர் தொடரை விரிவுப்படுத்துக.

தீர்வு :

$f(x) = e^{-x}$ என்க

$$e^{-x} = f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n \pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n \pi x}{l}$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx = \frac{1}{l} \int_{-l}^l e^{-x} dx$$

$$= \frac{1}{l} [e^l - e^{-l}]$$

$$= \frac{2}{l} [\sin hl]$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l e^{-x} \cos \frac{n \pi x}{l} dx$$

$$= \frac{1}{l} \left[\frac{e^{-x}}{\frac{n^2 \pi^2}{l^2} + 1} \left\{ -\cos \frac{n \pi x}{l} + \frac{n \pi}{l} \sin \frac{n \pi x}{l} \right\} \right]_{-l}^l$$

$$\left[\because \int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \cos bx + b \sin bx] \right]$$

$$= \frac{2l(-1)^n}{l^2 + n^2 \pi^2} \sin hl$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l e^{-x} \sin \frac{n \pi x}{l} dx$$

$$= \frac{1}{l} \left[\frac{e^{-x}}{\frac{n^2 \pi^2}{l^2} + 1} \left\{ -\sin \frac{n \pi x}{l} - \frac{n \pi}{l} \cos \frac{n \pi x}{l} \right\} \right]_{-l}^l$$

$$= \frac{2 n \pi l (-1)^n}{l^2 + n^2 \pi^2} \sin hl$$

இவ்வாறாக, $e^{-x} = \frac{\sin hl}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2l(-1)^n}{l^2 + n^2 \pi^2} \sin hl \cos \frac{n \pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 n \pi l (-1)^n}{l^2 + n^2 \pi^2} \sin hl \sin \frac{n \pi x}{l}$

எடுத்துக்காட்டு 3.116 : $f(x) = \begin{cases} \pi x, & 0 < x < 1 \\ \pi(2-x), & 1 < x < 2 \end{cases}$ ஐ ஃபோரியர் தொடரை விரிவுபடுத்துக.

தீர்வு :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n \pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n \pi x}{l} \text{ என்க, } l = 1$$

$$a_0 = \frac{1}{1} \int_0^2 f(x) dx$$

$$= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$$

$$= \int_0^1 \pi x dx + \int_1^2 \pi(2-x) dx = \pi$$

$$a_n = \int_0^2 f(x) \cos \frac{n \pi x}{1} dx$$

$$= \int_0^1 \pi x \cos n\pi x dx + \int_1^2 \pi(2-x) \cos n\pi x dx$$

$$= \pi \left[x \frac{\sin n\pi x}{n\pi} - \frac{(-\cos n\pi x)}{n^2\pi^2} \right]_0^1 + \pi \left[(2-x) \frac{\sin n\pi x}{n\pi} + \frac{(-\cos n\pi x)}{n^2\pi^2} \right]_1^2$$

$$= \pi \left[\frac{(-1)^n}{n^2\pi^2} - \left(\frac{1}{n^2\pi^2} \right) \right] + \pi \left[\frac{-\cos 2n\pi}{n^2\pi^2} - \left(\frac{\cos n\pi}{n^2\pi^2} \right) \right]$$

$$= \pi \left[\frac{(-1)^n}{n^2\pi^2} - \frac{1}{n^2\pi^2} - \frac{1}{n^2\pi^2} + \frac{(-1)^n}{n^2\pi^2} \right]$$

$$= \frac{2\pi}{n^2\pi^2} [(-1)^n - 1]$$

$$= \frac{2}{n^2\pi} [(-1)^n - 1]$$

$$= \begin{cases} \frac{-4}{n^2\pi}, & n\text{-ஒரு ஒற்றை எண்} \\ 0, & n\text{-ஒரு இரட்டை எண்} \end{cases}$$

$$b_n = \int_0^2 f(x) \sin n\pi x dx$$

$$= \int_0^1 \pi x \sin n\pi x dx + \int_1^2 \pi(2-x) \sin n\pi x dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \pi \left[x \frac{-\cos n\pi x}{n\pi} - \frac{(-\sin n\pi x)}{n^2\pi^2} \right]_0^1 + \pi \left[(2-x) \frac{-\cos n\pi x}{n\pi} + \frac{(-\sin n\pi x)}{n^2\pi^2} \right]_1^2 \\
 &= \pi \left[\frac{-\cos n\pi}{n\pi} \right] + \pi \left[\frac{-\sin 2n\pi}{n^2\pi^2} + \frac{\cos n\pi}{n\pi} \right] \\
 &= \pi \left[-\frac{(-1)^n}{n\pi} + \frac{(-1)^n}{n\pi} \right] = 0
 \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\frac{\cos \pi x}{1^2} + \frac{\cos 3\pi x}{3^2} + \frac{\cos 5\pi x}{5^2} + \dots \right] \quad \dots(1)$$

$x = 0$ என (1)-ல் பிரதியிட கிடைப்பது,

$$f(0) = 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right)$$

$$\text{இவ்வாறாக, } \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.117 : $f(x)$ என்ற சார்புக்கு $(-2, 2)$ என்ற இடைவெளியில் ஃபோரியர் தொடரைக் காண்க.

$$\text{இங்கு } f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x < 0 \\ 1, & 0 < x < 2 \end{cases}$$

தீர்வு :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{2} \text{ என்க}$$

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \left[\int_{-2}^0 0 dx + \int_0^2 1 dx \right] = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \cos \frac{n\pi x}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin \frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}} \right]_0^2 = 0$$

$$b_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{-\cos \frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}} \right]_0^2$$

$$= -\frac{1}{n\pi} [\cos n\pi - \cos 0] = \frac{-1}{n\pi} [(-1)^n - 1]$$

$$b_n = \begin{cases} \frac{2}{n\pi}, & n\text{-ஒரு ஒற்றை எண்} \\ 0, & n\text{-ஒரு இரட்டை எண்} \end{cases}$$

$$\Rightarrow b_2 = 0, b_4 = 0$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi x}{2} + \frac{2}{3\pi} \sin \frac{3\pi x}{2} + \frac{2}{5\pi} \sin \frac{5\pi x}{2} + \dots$$

எடுத்துக்காட்டு 3.118 : ஒரு சைனூசாய்டல் மின்னழுத்தம் $E \sin wt$, ஒரு அரை அலை திருத்தியை கடந்து செல்கிறது, இது அலையின் எதிர்மறை பகுதியை கிளிப் செய்கிறது. இதன் விளைவாக

$$\text{உருவாகும் சார்புக்கு } u(t) = \begin{cases} 0, & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ E \sin wt, & 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}, \text{ மற்றும் } T = \frac{2\pi}{w}, \text{ ஃபோரியர் தொடரைக் காண்க.}$$

தீர்வு : நீங்கள் முயற்சிக்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.119 : $f(x) = x$ என்ற சார்புக்கு $0 < x < \pi$ என்ற இடைவெளியில் சைன் மற்றும் கொசைன் தொடரைக் காண்க. மேலும் $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$ என்ற தொடரைத் தருவி.

தீர்வு : சைன் தொடர் :

கொடுக்கப்பட்ட இடைவெளியை $-\pi < x < \pi$ -க்கு நீட்டுவதனால் $f(x)$ ஆதியைப் பொறுத்து $f(-x) = -f(x)$ என மாறுகிறது

$\Rightarrow f(x)$ என்பது ஒற்றைப்படை சார்பாகும்.

$$a_0 = 0 \text{ மற்றும் } a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[(x) \left(\frac{-\cos nx}{n} \right) - (1) \left(-\frac{\sin nx}{n^2} \right) \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[-\pi \left(\frac{\cos n\pi}{n} \right) - 0 \right]$$

$$= -\frac{2(-1)^n}{n} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

$$f(x) = x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

கொசைன் தொடர் :

கொடுக்கப்பட்ட இடைவெளியை $-\pi < x < \pi$ க்கு நீட்டுவதனால் $f(x)$ ஆனது y -அச்சைப் பொறுத்து $f(-x) = f(x)$ என மாறுகிறது.

$\Rightarrow f(x)$ என்பது இரட்டைப்படை சார்பாகும்.

$$\therefore b_n = 0$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x) dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[(x) \left(\frac{\sin nx}{n} \right) - (1) \left(-\frac{\cos nx}{n^2} \right) \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi n^2} [(-1)^n - 1]$$

$$= \begin{cases} \frac{-4}{n^2\pi}, & n\text{-ஒரு ஒற்றை எண்} \\ 0, & n\text{-ஒரு இரட்டை எண்} \end{cases}$$

$$f(x) = x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right] \quad \dots(1)$$

$x = 0$ என (1)-ல் பிரதியிட கிடைப்பது,

$$f(0) = 0$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right)$$

$$\text{இவ்வாறாக, } \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.120 : $0 < x < 1$ என்ற இடைவெளியில் $f(x) = (x-1)^2$ -க்கு அரை வீச்சு கொசைன்

தொடரைக் காண்க. மேலும் $8 = \pi^2 \left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right]$ என்ற தொடரைத் தருவி.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட இடைவெளியை $-1 < x < 1$ -க்கு நீட்டுவதனால் $f(x)$ ஆனது y -அச்சைப் பொறுத்து $f(-x) = f(x)$ என மாறுகிறது.

$\Rightarrow f(x)$ என்பது இரட்டைப்படை சார்பாகும்.

$$\therefore b_n = 0$$

$$a_0 = \frac{2}{1} \int_0^1 (x-1)^2 dx = \left[\frac{(x-1)^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{1} \int_0^1 (x-1)^2 \cos \frac{n\pi x}{1} dx \\ &= \frac{2}{1} \left[(x-1)^2 \left(\frac{\sin n\pi x}{n\pi} \right) - 2(x-1) \left(\frac{-\cos n\pi x}{n^2\pi^2} \right) + 2 \left(\frac{-\sin n\pi x}{n^3\pi^3} \right) \right]_0^1 \\ &= 2 \left[0 + \frac{2}{n^2\pi^2} \right] \\ &= \frac{4}{n^2\pi^2} \end{aligned}$$

$\therefore$ அரை வீச்சு கொசைன் தொடர்,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos n\pi x \\ (x-1)^2 &= \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \left[\frac{\cos \pi x}{1^2} + \frac{\cos 2\pi x}{2^2} + \frac{\cos 3\pi x}{3^2} + \dots \right] \end{aligned}$$

[பகுதி I நிரூபிக்கப்பட்டது]

பகுதி II: நீங்கள் முயற்சிக்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.121 : $(0, \pi)$ என்ற இடைவெளியில் $f(x) = x \sin x$ -க்கு அரை வீச்சு கொசைன்

தொடரைக் காண்க. மேலும் $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots = \frac{\pi-2}{4}$ என்ற தொடரைத் தருவி.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட இடைவெளியை $-1 < x < 1$ க்கு நீட்டுவதனால் $f(x)$ ஆனது y -அச்சைப் பொறுத்து $f(-x) = f(x)$ என மாறுகிறது.

$\Rightarrow f(x)$ என்பது இரட்டைப்படை சார்பாகும்.

$$\therefore b_n = 0$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin x \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} [x(-\cos x) - (-1)(-\sin x)]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi} [-\pi \cos \pi] = 2$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin x \cos nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x [2 \cos nx \sin x] dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x [\sin (n+1)x - \sin (n-1)x] dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[x \left(\frac{-\cos (n+1)x}{(n+1)} + \frac{\cos (n-1)x}{(n-1)} \right) - (1) \left(\frac{-\sin (n+1)x}{(n+1)^2} - \frac{\sin (n-1)x}{(n-1)^2} \right) \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\pi \left(\frac{-\cos (n+1)\pi}{(n+1)} + \frac{\cos (n-1)\pi}{(n-1)} \right) \right], n \neq 1$$

$$= \left[\frac{-(-1)^{n+1}}{(n+1)} + \frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)} \right]$$

$$= (-1)^{n+1} \left[\frac{-1}{(n+1)} + \frac{1}{(n-1)} \right]$$

$$a_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n^2 - 1}, n \neq 1$$

$n = 1$ எனும்போது,

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin 2x \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[(x) \left(\frac{-\cos 2x}{2} \right) - (1) \left(\frac{-\sin 2x}{4} \right) \right]_0^{\pi} = -\frac{1}{2}$$

$$x \sin x = 1 - \frac{1}{2} \cos x - 2 \left[\frac{\cos 2x}{1.3} - \frac{\cos 3x}{2.4} + \frac{\cos 3x}{3.5} - \dots \right]$$

[பகுதி I நிரூபிக்கப்பட்டது]

பகுதி II : நீங்கள் முயற்சிக்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.122 : $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$ எனில்

i. $f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\sin x - \frac{1}{3^2} \sin 3x + \frac{1}{5^2} \sin 5x - \dots \right)$

ii. $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{1^2} \cos 2x + \frac{1}{3^2} \cos 6x + \frac{1}{5^2} \cos 10x - \dots \right)$ என நிறுவுக.

தீர்வு : நீங்கள் முயற்சிக்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.123 : $f(x) = \begin{cases} Kx, & 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \\ K(l-x), & \frac{l}{2} \leq x \leq l \end{cases}$ -க்கு அரை வீச்சு கொசைன் தொடரைக் காண்க.

மேலும் $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$ என்ற தொடரைத் தருவி.

தீர்வு :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \text{ என்க}$$

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx = \frac{2}{l} \left[\int_0^{\frac{l}{2}} Kx dx + \frac{1}{2} \int_{\frac{l}{2}}^l K(l-x) dx \right]$$

$$= \frac{2}{l} \left[K \left(\frac{x^2}{2} \right)_0^{\frac{l}{2}} + K \left(lx - \frac{x^2}{2} \right)_{\frac{l}{2}}^l \right]$$

$$= \frac{2}{l} \left[\frac{K l^2}{8} + K \left(l^2 - \frac{l^2}{2} \right) - K \left(\frac{l^2}{2} - \frac{l^2}{8} \right) \right]$$

$$= \frac{2}{l} \left[\frac{K l^2}{4} \right] = \frac{K l}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$= \frac{2}{l} \left[\int_0^{\frac{l}{2}} Kx \cos \frac{n\pi x}{l} dx + \int_{\frac{l}{2}}^l K(l-x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \right]$$

$$= \frac{2K}{l} \left\{ \left[(x) \left(\frac{\sin \frac{n\pi x}{l}}{\frac{n\pi}{l}} \right) - (1) \left(\frac{-\cos \frac{n\pi x}{l}}{\frac{n^2 \pi^2}{l^2}} \right) \right]_0^{\frac{l}{2}} + \left[(l-x) \left(\frac{\sin \frac{n\pi x}{l}}{\frac{n\pi}{l}} \right) - (-1) \left(\frac{-\cos \frac{n\pi x}{l}}{\frac{n^2 \pi^2}{l^2}} \right) \right]_{\frac{l}{2}}^l \right\}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2K}{l} \left\{ \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n\pi} \right) \left(\sin \frac{n\pi}{2} \right) + \left(\frac{l^2}{n^2\pi^2} \right) \left(\cos \frac{n\pi}{2} \right) - \frac{l^2}{n^2\pi^2} \right] + \left[-\frac{l^2}{n^2\pi^2} \cos n\pi - \frac{l^2}{2n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{l^2}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi}{2} \right] \right\} \\
 &= \frac{2Kl}{n^2\pi^2} \left[2 \cos \frac{n\pi}{2} - 1 - \cos n\pi \right] \\
 &= \frac{2Kl}{n^2\pi^2} \left[2 \cos \frac{n\pi}{2} - 1 - (-1)^n \right]
 \end{aligned}$$

n - ஒரு ஒற்றை எண் எனில் $\cos \frac{n\pi}{2} = 0$, $\cos n\pi = (-1)^n$

$$a_1 = a_3 = a_5 = \dots = 0$$

n - ஒரு இரட்டை எண் எனில்

$$a_n = \frac{2Kl}{n^2\pi^2} \left[2 \cos \frac{n\pi}{2} - 2 \right]$$

$$a_2 = \frac{4Kl}{2^2\pi^2} [-2] = \frac{-8Kl}{2^2\pi^2}$$

$$a_4 = \frac{4Kl}{4^2\pi^2} [2 \cos \pi - 2] = 0$$

$$a_6 = \frac{4Kl}{6^2\pi^2} [-2 \cos 3\pi - 1 - \cos 6\pi] = \frac{-8Kl}{6^2\pi^2}$$

$$f(x) = \frac{Kl}{4} - \frac{8Kl}{\pi^2} \left[\frac{1}{2^2} \cos \frac{2\pi x}{l} + \frac{1}{6^2} \cos \frac{6\pi x}{l} + \dots \right]$$

[பகுதி I நிரூபிக்கப்பட்டது]

பகுதி II: நீங்கள் முயற்சிக்கவும்.

பயிற்சி 3.15

1. $f(x) = x - x^2$, $-1 < x < 1$ என்ற சார்புக்கு ஃபோரியர் தொடரைக்காண்க.
2. $f(x) = e^{-x}$ ஐ $(-1, 1)$ என்ற இடைவெளியில் ஃபோரியர் தொடரை விரிவுப்படுத்துக.
3. $f(x) = 0$, $-2 < x < 0$ மற்றும் $f(x) = 1$, $0 < x < 2$ -க்கு ஃபோரியர் தொடரை விரிவுப்படுத்துக.
4. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < 2 \end{cases}$ க்கு ஃபோரியர் தொடரைக்காண்க.
5. $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x < -1 \\ k, & -1 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < 2 \end{cases}$ க்கு ஃபோரியர் தொடரைக்காண்க.
6. $f(x) = |\cos x|$, $-\pi < x < \pi$ என்ற சார்புக்கு ஃபோரியர் தொடரைக்காண்க.

7. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} - x, & 0 < x < \frac{1}{2} \\ x - \frac{3}{4}, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$ க்கு ஃபோரியர் தொடரைக்காண்க.
8. $0 < x < l$ -ல் $x = \frac{1}{2} - \frac{4l}{\pi^2} \left[\cos \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5^2} \cos \frac{5\pi x}{l} + \dots \right]$ என நிறுவுக. மேலும் $\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots = \frac{\pi^4}{96}$ என்ற தொடரைத் தருவி.
9. a என்ற மாறிலி சார்புக்கு $0 < x < \pi$ என்ற இடைவெளியில் $\frac{4a}{\pi} \left[\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right]$ என விரிவுப்படுத்துக.
10. $0 < x < \pi$ -ல் $x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{\cos 2x}{1^2} + \frac{\cos 4x}{2^2} + \frac{\cos 6x}{3^2} + \dots \right)$ என நிறுவுக.
மேலும் $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ காண்க.
11. ஒன்றுக்கான சைன் ஃபோரியர் தொடரை $0 < x < \pi$ -காண்க. மேலும் $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$ எனக் காட்டுக.
12. $(0, l)$ -ல் $x = \frac{1}{2} - \frac{4l}{\pi^2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos (2n-1) \frac{\pi x}{l} \right]$ என நிறுவுக.
மேலும் $\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots = \frac{\pi^4}{96}$ என்ற தொடரைத் தருவி.
13. $f(t) = 1 - t^2$ -ஐ $-1 < t < 1$ என்ற இடைவெளியில் ஃபோரியர் தொடரை காண்க.
14. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} - x, & 0 < x < \frac{1}{2} \\ x - \frac{3}{4}, & \frac{1}{2} < x < 1 \\ 1, & 1 < x < \frac{3}{2} \\ x - 1, & \frac{3}{2} < x < 2 \end{cases}$ க்கு ஃபோரியர் தொடரைக்காண்க.
15. $0 < x < l$ -ல் $\sin \frac{\pi x}{l}$ -க்கு அரை வீச்சு கொசைன் தொடரைக் காண்க.

விடைகள்

1. $x - x^2 = -\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \left[\frac{\cos \pi x}{1^2} - \frac{\cos 2\pi x}{2^2} + \frac{\cos 3\pi x}{3^2} - \dots \right] + \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin \pi x}{1} + \dots \right]$

$$2. \quad e^{-x} = \sin hl \left[\frac{1}{l} - 2l \left[\frac{1}{l^2 + \pi^2} \cos \frac{\pi x}{l} - \frac{1}{l^2 2^2 \pi^2} \sin \frac{2\pi x}{l} \right] + \frac{1}{l^2 + 3^2 \pi^2} \cos \frac{3\pi x}{l} + \dots \right] \\ - 2\pi \left[\frac{1}{e^2 + \pi^2} \sin \frac{\pi x}{l} - \frac{1}{3^2 + 2^2 \pi^2} \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots \right]$$

$$3. \quad f(x) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \left[\frac{\cos \pi x}{1^2} + \frac{\cos 3\pi x}{3^2} + \frac{\cos 5\pi x}{5^2} + \dots \right]$$

$$4. \quad f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left[\sin \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi x}{2} + \dots \right]$$

$$5. \quad f(t) = \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi} \left[\cos \frac{\pi t}{2} - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi t}{2} + \frac{1}{5} \cos \frac{5\pi t}{2} - \dots \right]$$

$$6. \quad |\cos x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \left[\frac{\cos 2x}{3} - \frac{\cos 4x}{15} + \dots \right]$$

$$7. \quad f(x) = \left(\frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^2} \right) \sin \pi x + \left(\frac{1}{3\pi} - \frac{4}{3^2 \pi^2} \right) \sin 3\pi x - \left(\frac{1}{5\pi} - \frac{4}{5^2 \pi^2} \right) \sin 5\pi x - 1$$

$$11. \quad 1 = \frac{4}{\pi} \left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right]$$

$$13. \quad 1 - t^2 = \frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2} \left[\frac{\cos \pi t}{1^2} - \frac{\cos 2\pi t}{2^2} + \frac{\cos 3\pi t}{3^2} + \dots \right]$$

$$14. \quad f(x) = \frac{7}{16} + \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{4} \right) \cos \pi x - \frac{3}{\pi} \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \right) \sin \pi x$$

$$15. \quad \sin \frac{\pi x}{l} = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left[\frac{\cos \frac{2\pi x}{l}}{1.3} + \frac{\cos \frac{4\pi x}{l}}{3.5} + \frac{\cos \frac{6\pi x}{l}}{5.7} + \dots \right]$$

3.7.6 ஃபோரியர் தொடரில் பார்செவல் தேற்றம்

$f(x)$ என்ற சார்பின் ஃபோரியர் தொடர் $c < x < c + 2l$ என்ற இடைவெளியில் கொடுக்கப்பட்டால்,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

எனில்

$$\frac{1}{2l} \int_c^{c+2l} [f(x)]^2 dx = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

நிரூபணம் : கொடுக்கப்பட்ட இடைவெளி $c < x < c + 2l$ -யில்

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad \dots(i)$$

இங்கு

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_c^{c+2l} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_c^{c+2l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_c^{c+2l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

(i)-ன் இருபுறமும் $f(x)$ -ஆல் பெருக்கக் கிடைப்பது

$$[f(x)]^2 = \frac{a_0}{2} f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n f(x) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

c மற்றும் $c + 2l$ என்ற எல்லைகளுக்கிடையில் இருபுறமும் x -ஐப் பொறுத்துத் தொகையிடக் கிடைப்பது,

$$\int_c^{c+2l} [f(x)]^2 dx = \frac{a_0}{2} \int_c^{c+2l} f(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_c^{c+2l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_c^{c+2l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad \dots(1)$$

$$= \frac{a_0}{2} a_0 l + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (l a_n) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (l b_n)$$

$$= \frac{a_0^2}{2} a_0 l + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 l + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 l$$

நிலை I : $c = 0$ எனில் (1)-லிருந்து,

$$\frac{1}{2l} \int_0^{2l} [f(x)]^2 dx = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

நிலை II : $c = -l$, இடைவெளி $-l < x < l$ கிடைக்கும் எனில்,

i. $f(x)$ என்பது (l, l) -ல் இரட்டைப்படை சார்பு எனில்,

$$\frac{2}{l} \int_0^l [f(x)]^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

ii. $f(x)$ என்பது (l, l) -ல் ஒற்றைப்படை சார்பு எனில்,

$$\frac{2}{l} \int_0^l [f(x)]^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$$

சில தீர்க்கப்பட்ட உதாரணங்கள்

எடுத்துக்காட்டு 3.124 : ஒன்றுக்கான ஃபோரியர் தொடரை $0 < x < \pi$ -இல் கண்டறிந்து அதை

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8} \text{ எனக் காட்டுக.}$$

தீர்வு : $(0, \pi)$ என்ற அரை இடைவெளியில் $f(x) = 1$ க்கு அரை வீச்சு சைன் தொடரைக் காண வேண்டும்.

$$a_0 = 0, a_n = 0, f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{-2}{\pi} \left[\frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n} \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{n} - \frac{(-1)^n}{n} \right]$$

$$= \begin{cases} \frac{4}{n\pi}, & n - \text{ஒரு ஒற்றை எண்} \\ 0, & n - \text{ஒரு இரட்டை எண்} \end{cases}$$

ஃபோரியர் தொடரில் பார்செவல் தேற்றம்

$$\int_c^{c+2l} [f(x)]^2 \, dx = 2l \left[\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right]$$

$$c = 0, 2l = \pi$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} (1)^2 \, dx = \frac{\pi}{2} \left[\frac{16}{\pi^2 1^2} + \frac{16}{\pi^2 3^2} + \frac{16}{\pi^2 5^2} + \dots \right]$$

$$\pi = \frac{8}{\pi} \left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right]$$

இவ்வாறாக,

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.125 : $0 < x < l$ என்ற இடைவெளியில்

$$x = \frac{1}{2} - \frac{4l}{\pi^2} \left[\cos \frac{\pi x}{1} + \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5^2} \cos \frac{5\pi x}{l} + \dots \right] \text{ என நிறுவுக.}$$

$$\text{மேலும் } \frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots = \frac{\pi^4}{96} \text{ என்ற தொடரைத் தருவி.}$$

தீர்வு : $0 < x < l$ என்ற அரை இடைவெளியில் $f(x)$ க்கு அரை வீச்சு கொசைன் தொடரைக் காணக்கிடைப்பது

$$x = f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} \quad \dots(1)$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{l} \int_0^1 f(x) dx = \frac{2}{l} \int_0^1 x dx \\ &= \frac{2}{l} \left(\frac{x^2}{2} \right)_0^1 = \frac{2}{l} \left[\frac{l^2}{2} \right] = l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{l} \int_0^1 f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= \frac{2}{l} \int_0^1 x \cos \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= \frac{2}{l} \left[(x) \left(\frac{\sin \frac{n\pi x}{l}}{\frac{n\pi}{l}} \right) - (1) \left(\frac{-\cos \frac{n\pi x}{l}}{\frac{n^2\pi^2}{l^2}} \right) \right]_0^1 \\ &= \frac{2l}{n^2\pi^2} [(-1)^n - 1] \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \frac{-4l}{n^2\pi^2}, & n\text{-ஒரு ஒற்றை எண்} \\ 0, & n\text{-ஒரு இரட்டை எண்} \end{cases}$$

(1)-லிருந்து,

$$x = \frac{1}{2} - \frac{4l}{\pi^2} \left[\cos \frac{\pi x}{1} + \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5^2} \cos \frac{5\pi x}{l} + \dots \right]$$

$$\int_0^1 [f(x)]^2 dx = \frac{1}{2} \left[\frac{a_0^2}{2} + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \dots \right]$$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{x^3}{3}\right)_0^1 &= \frac{1}{2} \left[\frac{a_0^2}{2} + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \dots \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{l^2}{2} + \frac{16 l^2}{\pi^4 1^4} + \frac{16 l^2}{\pi^4 3^4} + \frac{16 l^2}{\pi^4 5^4} + \dots \right] \\
 \frac{l^3}{3} &= \frac{l^3}{2} \left[\frac{1}{2} + \frac{16}{\pi^4} \left\{ \frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots \right\} \right] \\
 \frac{1}{3} - \frac{1}{2} &= \frac{16}{\pi^4} \left\{ \frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots \right\} \\
 \frac{\pi^4}{12} &= 8 \left\{ \frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots \right\} \\
 \therefore \frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots &= \frac{\pi^4}{96}
 \end{aligned}$$

பயிற்சி 3.16

1. x^2 என்ற சார்புக்கு $(-\pi, \pi)$ என்ற இடைவெளியில் ஃபோரியர் தொடரைக் காண்க. பார்செவல் $\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots = \frac{\pi^4}{96}$ என நிறுவுக.
2. $f(x) = \sum b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$, $(0, l)$ -ல் எனில் $\int_0^l [f(x)]^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ என நிறுவுக.
3. $2l$ என்ற கால இடைவெளியில் $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}$, $(0, l)$ அரை வீச்சு கொசைன் தொடர் எனில் $f(x) = \frac{a_0^2}{2} + \sum a_n^2$ என நிறுவுக. இடைவெளி உள்ள இந்த முடிவை பயன்படுத்தி $(0, 2)$ என்ற கால இடைவெளியில் $f(x) = \begin{cases} \pi x, & 0 < x < 1 \\ \pi(2-x), & 1 < x < 2 \end{cases}$ என்று வரையறுக்கப்பட்ட சார்புக்கு அரை வீச்சு கொசைன் தொடர் $1^{-4} + 3^{-4} + 5^{-4} + \dots$ என காண்க.

விடைகள்

$$1. \quad x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx \quad \frac{\pi^4}{90} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots$$



தகவல் தொடர்பாடல் தொழில்நுட்பத்தின் பயன்பாடு

- ♦ <https://www.youtube.com/watch?v=spUNpyF58BY>

அன்றாட வாழ்விலிருந்து உதாரணம்

$n > 1$ எனும்போது பின்வரும் எளிய சூத்திரத்தின் மூலம் பிபோனச்சி எண்களை எளிதாக பெறலாம்.

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

இது முடிவிலிக்கு செல்லும் பின்வரும் வரிசையை நமக்கு வழங்குகிறது:

1. 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144

இந்த வரிசையின் அழகு இயற்கையுடன் தொடர்புடையது.

உதாரணமாக, இது கூனைப்பு பூக்கும் போது தோன்றும், சில மலர் இதழ்கள், டெய்ஸி, தேனீக்கள் போன்றவை.

சிந்தியுங்கள்: இது விண்மீன் சுழல்களில் கூட நிகழுமா?

2. பூமி மற்றும் சந்திரனின் பரிமாணங்கள் ஃபை உறவில் உள்ளன, மேலும் 1.618 ஐ அடிப்படையாகக் கொண்ட ஒரு முக்கோணத்தை உருவாக்குகிறது என்று இன்னும் ஒரு சுவாரஸ்யமான அவதானிப்பு உள்ளது.

சிந்தியுங்கள்: பை என்றால் என்ன, இது என்ன 1.618?

ஒரு வரிசையில் உள்ள அடுத்தடுத்த இரு எண்களை எடுத்துக் கொண்டால், (X_n / X_{n-1}) என்பதின் விகிதம் 1.618க்கு மிக அருகில் உள்ளது. இதனை தங்க விகிதம் என நாம் அழைக்கலாம்:

$$3/2 = 1.5$$

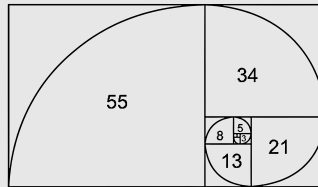
$$13/8 = 1.666$$

$$55/34 = 1.61764$$

$$233/144 = 1.61805$$

... ..

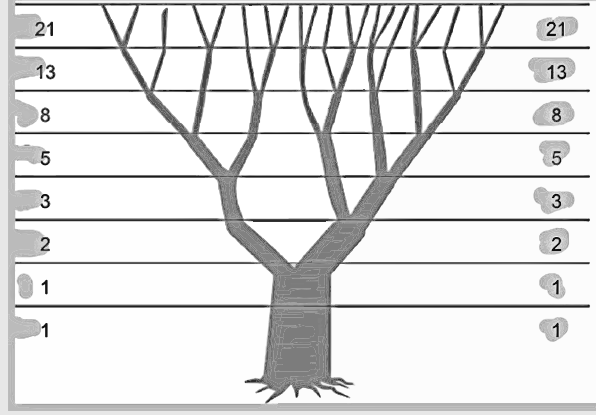
$$377,811 / 196,418 = 1.61803$$



படம் 3.6

முடிவிலியை நெருங்குகிறது, இதன் விகிதம் 1.618-க்கு மிக அருகில், இதற்கு பை (phi) ϕ என்று பெயர்.

- ♦ இது இயற்கையிலேயே அமைந்திருக்கிறது (முன்பு சொன்னது போல). சில மரக்கிளைகள் இதற்கு உதாரணம்.



படம் 3.7

சுவாரஸ்யமான உண்மைகள்

இது அழகைக் குறிக்கும் என்று நம்பப்படுகிறது மற்றும் இந்த நம்பிக்கை நிரூபிக்கப்படவில்லை என்றாலும், நம் மனம் அழகை எப்படி வரையறுக்கிறது என்பதை அறிவது சுவாரஸ்யமாக உள்ளது. உதாரணமாக, முகம் இப்போது, பின்வருவது மிகவும் துல்லியமான ஆராய்ச்சி அல்ல ஆனால் டாக்டர். ஷ்மிட் 10 அளவு விகிதத்தில் 10 மிக உயர்ந்ததாக (மிக அழகாக நபர்) பெரும்பாலான மக்கள் 4 முதல் 6 வரை மதிப்பெண்களைப் பெறுகிறார்கள், அழகு மெட்ரிக் முதலில் முகத்தின் நீளம் மற்றும் அகலத்தால் அளவிடப்படுகிறது, பின்னர் அகலத்தால் பிரிக்கப்படுகிறது. உகந்த முடிவு 1.618 ஆகும். ஒரு அழகான நபரின் முகம் அதன் அகலத்தை விட 1.618 நீளமானது. பின்னர், மற்ற விகிதங்கள் மூக்கின் அடிப்பகுதி முதல் கன்னத்தின் அடிப்பகுதி வரை கணக்கிடப்படுகின்றன. இறுதியாக, மேலும் அழகு அளவீடுகளை சரிபார்க்க சமச்சீர் சோதனைகள் செய்யப்படுகின்றன. காதுகளின் நீளம் மற்ற குணாதிசயங்களுக்கிடையில், சரியான முகத்தில் மூக்கின் நீளத்திற்கு சமமாக இருக்க வேண்டும் என்று டாக்டர் ஷ்மிட் கூறுகிறார்.

- ♦ நம் கையின் முன் விகிதம் தங்க விகிதத்திற்கு சமம் என்று நம்பப்படுகிறது.
- ♦ இது வடிவவியலில் உள்ளது. பல கட்டிடங்கள் மற்றும் கலைப்படைப்புகள் தங்க விகிதத்தில் உள்ளன, ஒரு உதாரணம் கிரேக்கத்தில் பார்த்தீனான்.

பாண்டகிராமில் தங்க விகிதம் உட்பொதிக்கப்பட்டுள்ளது.



படம் 3.8

- ♦ தினம் நவம்பர் 23 ஆகும், ஏனெனில் இது வரிசையின் ஒரு பகுதியாக இருக்கும் "1, 1, 2, 3" இலக்கங்களைக் கொண்டுள்ளது. எனவே அடுத்த நவம்பர் 23 அனைவருக்கும் தெரியப்படுத்துங்கள்.

எடுத்துக்காட்டு 1 : ஒரு பவர்த் தொடர் $\sum a_n x^n$, எனவே $x = b$ -ல் அனைத்து x ன் மதிப்புகளுக்கும் முழுமையாக குவிகிறது அதாவது $|x| < |b|$.

தீர்வு : $\sum a_n b^n$ குவிகிறது,

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n b^n| = 0$$

ஒரு ஒருங்கிணைந்த வரிசை கட்டப்பட்டதால் அங்கு ஒரு M மதிப்பு உள்ளது, எனவே $|a_n b^n| \leq M \cdot n$

$$\left| \frac{x}{b} \right| = r < 1 \text{ என்க}$$

$$\text{மேலும் } |a_n x^n| = |a_n b^n| \cdot \left| \frac{x^n}{b^n} \right| < M r^n$$

எனவே, வடிவியல் வரம்போடு ஒப்பிடுகையில் $\sum M r^n \cdot \sum |a_n x^n|$ குவிகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 2 : கொடுக்கப்பட்ட $n! \geq 2^{n-1}$, $n \geq 1$, n -ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும், ஒரு வரிசை $\langle a_n \rangle$ n -வது உறுப்பானது 3 க்கு மேல் வரம்பில் கட்டப்பட்டுள்ளது என நிறுவுக. அது குவிகிறது என்று நீங்கள் ஏன் யுகிக்க முடியும் என்பதை விளக்கவும்.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட $n! \geq 2^{n-1}$, $n \geq 1$, n -ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும்

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \quad n \geq 1$$

$$\text{ஆகவே, } a_n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$\leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^k}}{1 - \frac{1}{2}} \quad (\text{பெருக்குத் தொடரை கூட்டும் போது})$$

$$= 1 + 2 \left(1 - \frac{1}{2^k} \right) < 3$$

எனவே, $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$ வரிசை கண்டிப்பாக அதிகரித்து வருகிறது மற்றும் அது மேலே

வரம்பிடப்பட்டுள்ளது. ஒத்திசைவு குவிப்பு கோட்பாடு மூலம் அது குவிகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

- a. $\int_0^{\pi/6} \sin^2 x \, dx$ மதிப்பீடு செய்யவும், முதல் மேக்லாரின் தோராயத்தைக் கண்டறிக.
- b. ஒருங்கிணைப்பை சரியாக மதிப்பிட்டு ஒப்பிடுங்கள்

தீர்வு : a. மேக்லாரின்தொடர் $\sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} + \dots$

$$\int_0^{\pi/6} \sin^2 x \, dx = \int_0^{\pi/6} \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} + \dots \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{15} + \frac{2x^7}{315} - \dots \right) \Big|_0^{\pi/6} = 0.0452941$$

b. சரியான தொகையீடு

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/6} \sin^2 x \, dx &= \int_0^{\pi/6} \frac{-\cos 2x}{2} \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \Big|_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{12} - \frac{\sin \left(\frac{\pi}{3} \right)}{4} \\ &= \frac{\pi}{12} - \frac{\sin \left(\frac{\pi}{3} \right)}{4} = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{24} = 0.045293 \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 4 : அலைநீளம், L , அலை காலம், T , மற்றும் நீரின் ஆழம், d ஆகியவற்றுக்கு இடையேயான உறவு நீரில் ஒரு மேற்பரப்பு அலை வழங்கப்படுகிறது.

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tan h \left(\frac{2\pi d}{L} \right)$$

ஒரு குறிப்பிட்ட வழக்கில் அலை காலம் 105 மற்றும் நீரின் ஆழம் 6.1 மீ. செலுத்த வேண்டிய முடுக்கம் ஈர்ப்பு விசைக்கு, g -ன் மதிப்பீடு. $\tan hx$ தொடர் விரிவாக்கத்தைப் பயன்படுத்தி அலைநீளத்தை தீர்மானிக்கவும்.

தீர்வு : அலை காலம், நீர் ஆழம் மற்றும் g -க்கு மாற்றாக, நாம் பெறுகிறோம்

$$L = \frac{9.81 \times 10^2}{2\pi} \tan h \left(\frac{2\pi \times 6.1}{L} \right) = \frac{490.5}{\pi} \tan h \left(\frac{12.2\pi}{L} \right)$$

$\tan hx$ விரிவாக்கம்

$$\tan hx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}$$

$\tan hx$ தொடர் விரிவாக்கத்தைப் பயன்படுத்தி, நாம் சமன்பாட்டை தோராயமாக மதிப்பிடலாம்

$$L = \frac{490.5}{\pi} \left(\frac{12.2\pi}{L} - \frac{1}{3} \left(\frac{12.2\pi}{L} \right)^3 + \dots \right)$$

πL^3 -ஆல் பெருக்கினால், சமன்பாடு

$$\pi L^4 = 490.5 \times 12.2 \pi L^2 - \frac{490.5}{\pi} (12.2 \pi)^2$$

சமன்பாட்டை மீண்டும் எழுதலாம்

$$L^4 - 5984.1 L^2 + 2930198 = 0$$

L^2 இருபடி சமன்பாடாக இதைத் தீர்ப்பது, நாம் பெறுவது $L = 74m$

எடுத்துக்காட்டு 5 :

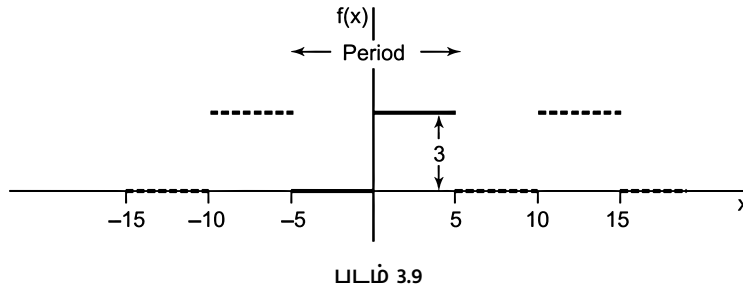
- a. $f(x) = \begin{cases} 0, & -5 < x < 0 \\ 3, & 0 < x < 5 \end{cases}$ $period = 10$ செயல்பாட்டிற்கு தொடர்புடைய ஃபோரியர் குணகங்களைக்

கண்டறியவும்

- b. தொடர்புடைய ஃபோரியர் தொடரை எழுதுங்கள்

- c. $x = -5, x = 0$ -க்கு ஃபோரியர் தொடர் இணையும் வகையில் $f(x)$ -ஐ எப்படி வரையறுக்க வேண்டும்?
 $x = -5, x = 0$, மற்றும் $x = 5$ இல் ஃபோரியர் தொடரை இடைவெளியில் $f(x)$ -க்கு குவிகிறதா?

தீர்வு : a. $f(x)$ இன் வரைபடம் காட்டப்பட்டுள்ளது.



இடைவெளி $= 2L = 10$ மற்றும் $L = 5$. இடைவெளியைத் தேர்வு செய்யவும்

c இருந்து $c + 2L$ அதனால் -5 முதல் 5 வரை, பிறகு $c = -5$.

$$a_n = \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{1}{5} \int_{-5}^5 f(x) \cos \frac{n\pi x}{5} dx$$

$$= \frac{1}{5} \left\{ \int_{-5}^0 (0) \cos \frac{n\pi x}{5} dx = \int_0^5 (3) \cos \frac{n\pi x}{5} dx \right\} = \frac{3}{5} \int_0^5 \cos \frac{n\pi x}{5} dx$$

$$= \frac{3}{5} \left(\frac{5}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{5} \right) \Big|_0^5 = \text{if } n \neq 0$$

$$n = 0, \text{ என்றால் } a_n = a_0 = \frac{3}{5} \int_0^5 \cos \frac{n\pi x}{5} dx = \frac{3}{5} \int_0^5 dx = 3$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{1}{5} \int_{-5}^5 f(x) \sin \frac{n\pi x}{5} dx$$

$$= \frac{1}{5} \left\{ \int_{-5}^0 (0) \sin \frac{n\pi x}{5} dx = \int_0^5 (3) \sin \frac{n\pi x}{5} dx \right\} = \frac{3}{5} \int_0^5 \sin \frac{n\pi x}{5} dx$$

$$= \frac{3}{5} \left(-\frac{5}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{5} \right) \Big|_0^5 = \frac{3(1 - \cos n\pi)}{n\pi}$$

b. தொடர்புடைய ஃபோரியர் தொடர்

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(1 - \cos n\pi)}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{5}$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi} \left(\sin \frac{\pi x}{5} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{5} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi x}{5} + \dots \right)$$

c. $f(x)$ டிரிசுலெட்டின் நிபந்தனைகளை திருப்திப்படுத்துவதால், $f(x)$ தொடரின் தொடர்ச்சியான அனைத்து புள்ளிகளிலும் $f(x)$ க்கும் மற்றும் தொடர்ச்சியற்ற அனைத்து புள்ளிகளிலும் $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ -க்கும் நெருங்கும் என்று நாம் கூறலாம். $x = -5, 0$ மற்றும் 5 -இல், இது இடைநிறுத்தத்தின் புள்ளிகளாக உள்ளது,

இந்த தொடர் வரைபடத்திலிருந்து பார்த்தபடி $\frac{(3+0)}{2} = \frac{3}{2}$ க்கு நெருங்குகிறது. நாம் பின்வருமாறு $f(x)$ -ஐ மறுவரையறை செய்தால்

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}, & x = -5 \\ 0, & -5 < x < 0 \\ \frac{3}{2}, & x = 0 \text{ Period} = 10 \\ 3, & 0 < x < 5 \\ \frac{3}{2}, & x = 5 \end{cases}$$

பின்னர் தொடர் $f(x)$ ஆனது $-5 \leq x \leq 5$ -இல் நெருங்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 6 : $-\pi < x < \pi$ என்ற இடைவெளியில்

$$f(x) = \cos ax - \pi \leq x \leq \pi, a \neq 0, \pm 1 \pm 2 \pm 3 \dots \text{க்கான ஃபோரியர் தொடரைக் காண்க.}$$

தீர்வு : நீங்கள் முயற்சிக்கவும்.

சுருக்கம்

1. $a_1, a_2, \dots, a_n \dots$ போன்ற வரிசைப்படுத்தப்பட்ட எண்களின் தொகுப்பு ஒரு வரிசை என்று அழைக்கப்படுகிறது.
2. ஒரு ஒருங்கிணைந்த வரிசையின் வரம்பு எப்போதும் தனித்துவமானது.
3. ஒரு வரையறுக்கப்பட்ட வரிசை ஒன்றுசேரும் அல்லது ஊசலாடுகிறது.
4. முடிவற்ற தொடர் $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ மற்றும் ஒவ்வொரு முடிவற்ற தொடருக்கும் $\sum u_n$ அதன் பகுதி கூடுதலின் வரிசை $\{S_n\}$ உடன் தொடர்புடையது.
5. ஒரு முடிவற்ற தொடர் அதன் கூட்டுத்தொகையின் வரிசையாக $\{S_n\}$ இணையும்போது, வேறுபடுகிறது அல்லது ஊசலாடுகிறது.
6. **காலியின் ஒருங்கிணைப்பின் பொதுவான கொள்கை:** தொடர் $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ஒருங்கிணைவதற்கு தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனைகள் ஒவ்வொரு $\varepsilon > 0$ -க்கும் ஒரு நேர்மறை முழு எண் m உள்ளது
 $|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_n| < \varepsilon, n \geq m$
7. முடிவற்ற தொடர், அதன் அனைத்து உறுப்புகளும் மிகையானவை எனில் மிகைத் தொடர் என்று அழைக்கப்படுகின்றன
8. முடிவற்ற தொடர் $\frac{1}{n^p}$ ஹார்மோனிக் தொடர் அல்லது 'p-தொடர்' என அழைக்கப்படுகிறது. இந்தத் தொடர் $p > 1$ -இல் நெருங்கும், $p \leq 1$ இல் விரியும்.
9. **டி'அலம்பெர்ட் விகித சோதனை :** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ மிகைஉறுப்புத் தொடர் எனில் $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = l$,
 (i) $l > 1$ க்கு, தொடர் ஒருங்கிணைந்தது
 (ii) $l < 1$ க்கு, தொடர் வேறுபட்டது
 (iii) $l = 1$ க்கு, முடிவு இல்லை (சோதனை தோல்வி)
10. **காலியின் மூலச் சோதனை :** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ மிகை உறுப்புத் தொடர் மற்றும் $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{1/n} = l$ எனில்
 (i) $l < 1$ க்கு, $\sum a_n$ ஒருங்கிணைந்தது
 (ii) $l > 1$ க்கு, $\sum a_n$ வேறுபட்டது
 (iii) $l = 1$ க்கு, சோதனை தோல்வி, ஒருங்கிணைந்தது அல்லது வேறுபட்டதுகாண வேறு சோதனையை முயற்சிக்கவும்.

11. **ராபே சோதனை :** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ மிகை உறுப்புத் தொடர் மற்றும் $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right] = l$
 - (i) $l > 1$ க்கு, தொடர் ஒருங்கிணைந்தது
 - (ii) $l < 1$ க்கு, தொடர் வேறுபட்டது
 - (iii) $l = 1$ க்கு, சோதனை தோல்வி
12. **மடக்கை சோதனை :** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ மிகை உறுப்புத் தொடர் மற்றும் $\lim_{n \rightarrow \infty} n \log \frac{a_n}{a_{n+1}} = l$
 - (i) $l > 1$ க்கு, தொடர் ஒருங்கிணைந்தது
 - (ii) $l < 1$ க்கு, தொடர் வேறுபட்டது
 - (iii) $l = 1$ க்கு, சோதனை தோல்வி
13. **காஸ் சோதனை :** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ மிகை உறுப்புத்தொடர் மற்றும் $\frac{a_n}{a_{n+1}} - \lambda$ -ன் விரிவான வடிவம் $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ $\lambda > 1$ க்கு, தொடர் ஒருங்கிணைந்தது மற்றும் $\lambda \leq 1$ க்கு, தொடர் வேறுபட்டது.
14. **மாற்று தொடர் :** $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$ இங்கு $a_n > 0 \forall n$, என்ற தொடர் மாற்று தொடர் என அழைக்கப்படுகிறது மற்றும் $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது.
15. **மாற்றுத் தொடரின் ஒருங்கிணைப்புக்கான லீப்னிட்ஸ் சோதனை :** மாற்றுத்தொடர் $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$ ($a_n > 0 \forall n$) ஒருங்கிணைந்தது என்றால்
 - i. $a_{n+1} < a_n \forall n$
 - ii. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
16. **முற்றிலும் ஒருங்கிணைந்த தொடர் :** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ முற்றிலும் ஒருங்கிணைந்த தொடர் என்றால் $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ என்ற தொடர் ஒருங்கிணைந்தது.
17. **நிபந்தனை ஒருங்கிணைப்பு தொடர் :** ஒரு தொடர் நிபந்தனை ஒருங்கிணைப்பு தொடர் என்றால் இது ஒருங்கிணைந்தது ஆனால் முற்றிலும் ஒருங்கிணைவதில்லை.
18. **டெய்லரின் முடிவற்ற தொடர் :** $f(x)$ ஆனது $(x - a)$ -ன் ஏறும் படிக்களை உடையது எனில்
$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + \frac{(x - a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(x - a)^3}{3!}f'''(a) + \dots + \frac{(x - a)^n}{n!}f^n(a) + \dots$$
19. **மேக்லாரின் முடிவற்ற தொடர்** ஆனது
$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^n(0) + \dots$$

20. ஃபோரியர் தொடர் ஆனது

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots$$

21. ஃபோரியர் தொடருக்கான டிரிச்லெட்டின் நிபந்தனைகள்

$c \leq x \leq c+2\pi$ என்ற இடைவெளியில் ஒரு சார்பு $f(x)$ வரையறுக்கப்பட்டால், கொடுக்கப்பட்ட இடைவெளியில்,

i. முடிவுற்றது, ஒற்றை மதிப்புடையது

ii. முடிவுற்ற எண்ணிக்கையிலான தனித்தன்மைகள் கொண்டுள்ளது.

iii. குறிப்பிட்ட இடைவெளிகளுடன் மறுபடியும் மறுபடியும் நிகழ்வுள்ளது.

iv. முடிவுற்ற எண்ணிக்கையிலான எண்ணிக்கையிலான பெருமம் மற்றும் குறுமம் உள்ளது.

22. இரட்டை மற்றும் ஒற்றைப் படை சார்புகள்

$f(-x) = f(x)$ எனில் சார்பு $f(x)$ ஆனது ஒரு இரட்டைப் படை சார்பு ஆகும்.

$f(-x) = -f(x)$ எனில் சார்பு $f(x)$ ஆனது ஒரு ஒற்றைப் படை சார்பு ஆகும்.

23. அரை வீச்சு சைன் தொடர் : $f(x)$ -ன் அரை வீச்சு சைன் தொடர் ஆனது

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}, -l < x < l$$

24. அரை வீச்சு கொசைன் தொடர் : $f(x)$ -ன் அரை வீச்சு கொசைன் தொடர் ஆனது

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}, -l < x < l$$

கொள்குறி வினாக்கள்

1. $a_n = \sin n \left(\frac{\pi}{4} \right)$ என்க, வரிசை $a_1, a_2, \dots$ க்கு

a. 0 மற்றும் அது அடையப்பட்டது

b. 0 மற்றும் அது அடையப்படவில்லை

c. 1 மற்றும் அது அடையப்பட்டது

d. 1 மற்றும் அது அடையப்படவில்லை

2. வரிசை $\{x_n\}$, இங்கு $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2^n}$ ஒரு

a. அதிகரிக்கும் ஆனால் வரம்பு இல்லை

b. ஏறும் மற்றும் வரம்புடையது

c. குறையும் மற்றும் வரம்புடையது

d. குறையும் ஆனால் வரம்பு இல்லை

3. வரிசை $= \sqrt{3}, \sqrt{7+\sqrt{7}}, \sqrt{7+\sqrt{7+\sqrt{7}}}$ எதற்கு ஒருங்கிணைந்தது,

a. $\frac{1\sqrt{33}}{2}$

b. $\frac{1\sqrt{32}}{2}$

c. $\frac{1\sqrt{30}}{2}$

d. $\frac{1\sqrt{29}}{2}$

4. பின்வரும் அறிக்கையில் எது உண்மை?

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^{1/2}} = 0$ மற்றும் $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = \infty$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^{1/2}} = \infty$ மற்றும் $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^{1/2}} = 0$ மற்றும் $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$

(d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^{1/2}} = 0$ ஆனால் $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x}$ கிடைக்கவில்லை

5. அறிக்கைகளைக் கருதுங்கள்

A. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(3n)!}{(n!)^3} \right)^{\frac{1}{n}} = 27$

B. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{n^n}{(n+1)(n+2) \dots (n+n)} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{e}{4}$

a. (A) உண்மை ஆனால் (B) தவறானது

b. (A) தவறானது ஆனால் (B) உண்மை

c. (A) மற்றும் (B) இரண்டும் உண்மை

d. (A) மற்றும் (B) உண்மையல்ல

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e + e^{1/2} + e^{1/3} + \dots + e^{1/n}}{n}$ சமமாக உள்ளது

a. 0

b. 1

c. e

d. இவற்றில் ஏதுமில்லை

7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [1 + 2^{1/2} + 3^{1/3} + \dots + n^{1/n}]$ சமமாக உள்ளது

a. 0

b. 1

c. e

d. இவற்றில் ஏதுமில்லை

8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1}} \right)$

a. $\sqrt{2}$

b. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

c. $\sqrt{2} + 1$

d. $\frac{1}{\sqrt{2} + 1}$

9. அறிக்கைகளைக் கருதுங்கள்

A. தொடர் $\sum \sin \frac{1}{n}$ வேறுபட்டது

B. தொடர் $\frac{1}{3^2} \cdot \frac{2}{4^2} + \frac{3}{5^2} \cdot \frac{4}{6^2} + \frac{5}{7^2} \cdot \frac{6}{8^2}$ ஒருங்கிணைந்தது எனில்

a. (A) மற்றும் (B) இரண்டும் உண்மை

b. (A) உண்மை ஆனால் (B) தவறானது

c. (A) தவறானது ஆனால் (B) உண்மை

d. (A) மற்றும் (B) உண்மையல்ல

10. எந்த உண்மையான எண் 't' க்கு முடிவற்றதொடர் $\sum \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n^t}$ ஒருங்கிணைந்தது

a. $t > \frac{1}{3}$

b. $t > \frac{1}{2}$

c. $t > 1$

d. $t > \frac{3}{2}$

11. இங்கு $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $v_n = \sqrt{n^4+1} - n^2$, எனில்,
 a. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ஒருங்கிணைந்தது ஆனால், $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ வேறுபட்டது
 b. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ வேறுபட்டது ஆனால் $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ ஒருங்கிணைந்தது
 c. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ மற்றும் $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ ஒருங்கிணைந்தது
 d. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ மற்றும் $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ வேறுபட்டது
12. இங்கு $b_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}}, & \text{if } n\text{-ஒரு ஒற்றை எண்} \\ \frac{1}{n}, & \text{if } n\text{-ஒரு இரட்டை எண்} \end{cases}$ எனில்,
 a. $\langle b_n \rangle$ மற்றும் $\sum b_n$ ஒருங்கிணைந்தது
 b. $\langle b_n \rangle$ மற்றும் $\sum b_n$ வேறுபட்டது
 c. $\langle b_n \rangle$ ஒருங்கிணைந்தது ஆனால் $\sum b_n$ இல்லை
 d. $\sum b_n$ ஒருங்கிணைந்தது ஆனால் $\langle b_n \rangle$ இல்லை
13. உண்மையைப் பயன்படுத்தி $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ சமம் ஆனது
 a. $\frac{\pi^2}{12}$ b. $\frac{\pi^2}{12} - 1$ c. $\frac{\pi^2}{9}$ d. $\frac{\pi^2}{9} - 1$
14. பின்வருவனவற்றில் எது ஒருங்கிணைந்தது?
 a. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 2^{-n}$ b. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} 2^n$ c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log \left(n + \frac{1}{n} \right)}$
15. பின்வருவனவற்றில் எது முற்றிலும் ஒருங்கிணைந்தது?
 a. $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ b. $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ c. $\sum \frac{1}{\log(n+1)}$ d. $\sum \frac{(-1)^n}{n^{3/2}}$
16. உண்மையைப் பயன்படுத்தி $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ சமம் ஆனது
 a. $1 - 2 \log 2$ b. $1 + \log 2$ c. $(\log 2)^2$ d. $(-\log 2)^2$
17. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \log(n) x^n$ என்ற அடுக்கு தொடரில், $f(x)$ என்ற தொடரின் ஒருங்கிணைப்பு ஆரம்
 a. 0 b. 1 c. 3 d. ∞

18. $f(x)$ என்ற சார்புக்கு மேக்லாரின் விரிவாக்கம் உண்மையாக இருக்க தேவையான நிபந்தனை,
- $f(x)$ தொடர்ச்சியாக இருக்க வேண்டும்
 - $f(x)$ வகைப்படுத்தக்கூடியதாக இருக்க வேண்டும்
 - $f(x)$ ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் இருக்க வேண்டும்
 - $f(x)$ தொடர்ச்சி மற்றும் வகைப்படுத்தக் கூடியதாக இருக்க வேண்டும்
19. $e^x \sin x$ -ன் விரிவாக்கத்தைக் கண்டறியவும்?
- $1 + x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{120} + \dots$
 - $1 + x^2 + \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{120} + \dots$
 - $x + \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{120} + \dots$
 - $x + \frac{x^4}{3} - \frac{x^6}{120} + \dots$
20. கொடுக்கப்பட்டது $f(x) = \ln(\cos(x)) \cdot \ln(\cos(\pi/2))$ -ன்மதிப்பைக் கணக்கிடுங்கள்
- 1.741
 - 1.741
 - 1.563
 - 1.563
21. f என்ற சார்பின் இரண்டாவது வகையிடல் $f''(x) = \sqrt{1+3x}$ எனக் $x = 0$ க்கான டெய்லர் தொடர் f -ல் x^3 இன் கெழு
- 1/12
 - 1/6
 - 1/4
 - 1/2
22. f ஆனது $x = 0$ -ஐ பொறுத்து படி 4-க்கான டெய்லர் பல்லுறுப்புக்கோவை $P(x) = 3 - 3x^2 + 6x^4$ எனக் $f^{iv}(0)$ -ன்மதிப்பைக் கணக்கிடுங்கள்
- 0
 - 1/4
 - 144
 - 164
23. $x = 0$ -ஐ பொறுத்து டெய்லர் தொடர் $\sin^2 x$ -ல் x^2 -இன் கெழுஎன்ன?
- 2
 - 1
 - 0
 - 1
24. கீழ் கண்ட சார்பில், டெய்லர் தொடர் $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$ இன் சார்பு எது?
- $\sin x$
 - $\cos x$
 - e^x
 - e^{-x}
25. பின்வருவனவற்றில் ஃபோரியர் தொடர் விரிவாக்கத்திற்கான டிரிசீலெட்டின் நிபந்தனை இல்லை
- $f(x)$ ஆனது குறிப்பிட்ட இடைவெளிகளுடன் மறுபடியும் மறுபடியும் நிகழ் உள்ளது. ஒற்றை மதிப்புடையது, முடிவுற்றது.
 - $f(x)$ ஆனது ஒரே ஒரு இடைவெளியில், முடிவுற்ற எண்ணிக்கையிலான தொடர்ச்சியற்றதை கொண்டுள்ளது.
 - $f(x)$ ஆனது முடிவுற்ற எண்ணிக்கையிலான பெருமம் மற்றும் குறுமம் உள்ளது.
 - $f(x)$ ஆனது முடிவுற்றது மற்றும் ஒற்றை மதிப்புடையது.

26. $f(x) = x$, $0 < x < 1$ -க்கு அரை வீச்சு ஃபோரியர்கொசைன் தொடரைக்கண்டறிந்து $\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots$ -ன் மதிப்பை காண்க
- a. $\frac{\pi^4}{12}$ b. $\frac{\pi^4}{48}$ c. $\frac{\pi^4}{24}$ d. $\frac{\pi^4}{96}$
27. $(0, 3)$ என்ற இடைவெளியில் $f(x) = x^2$ -க்கு அரை வீச்சு ஃபோரியர்சைன் தொடரில் b_n -ன் மதிப்பை காண்க
- a. $-18 \frac{\cos(n\pi)}{n\pi}$ b. $18 \frac{\cos(n\pi)}{n\pi}$ c. $-18 \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi}$ d. $18 \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi}$
28. $[0, \pi]$ எனும்போது $f(x) = a$, $[\pi, 2\pi]$ எனும்போது $f(x) = 2\pi - x$ ஃபோரியர் தொடர் விரிவாக்கத்தைப் பயன்படுத்தி $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$ ன் மதிப்பை காண்க
- a. $\frac{\pi^2}{8}$ b. $\frac{\pi^2}{4}$ c. $\frac{\pi^2}{16}$ d. $\frac{\pi^2}{2}$
29. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ எனும்போது $f(x) = x$ மற்றும் $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ எனும்போது $f(x) = \pi - x$ அரை வீச்சு ஃபோரியர்சைன் தொடரைக் காண்க
- a. $\frac{8}{\pi} \left[\frac{\sin x}{1^2} - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \frac{\sin 7x}{7^2} + \dots \right]$ b. $\frac{4}{\pi} \left[\frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} + \frac{\sin 7x}{7^2} + \dots \right]$
- c. $\frac{8}{\pi} \left[\frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} + \frac{\sin 7x}{7^2} + \dots \right]$ d. $\frac{4}{\pi} \left[\frac{\sin x}{1^2} - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \frac{\sin 7x}{7^2} + \dots \right]$
30. தொடர் $\frac{1}{2} + \frac{x^2}{3\sqrt{2}} + \frac{x^4}{4\sqrt{3}}$ ஒரு
- a. $x^2 \leq 1$ என்றால் ஒருங்கிணைந்தது; $x^2 > 1$ என்றால் வேறுபட்டது
- b. $x^2 > 1$ என்றால் ஒருங்கிணைந்தது; $x^2 < 1$ என்றால் வேறுபட்டது
- c. $x^2 < 1$ என்றால் ஒருங்கிணைந்தது; $x^2 \geq 1$ என்றால் வேறுபட்டது
- d. $x \leq 1$ என்றால் ஒருங்கிணைந்தது; $x > 1$ என்றால் வேறுபட்டது

விடைகள்

1. c	2. d	3. d	4. c	5. c
6. b	7. b	8. b	9. a	10. b
11. b	12. c	13. d	14. a	15. d

16. a	17. b	18. d	19. b	20. a
21. c	22. c	23. d	24. d	25. a
26. d	27. a	28. b	29. d	30. A

அகநிலை தீர்க்கப்படாத கேள்விகள்

1. $\sum a_n x^n$ -ன் ஒருங்கிணைப்பு ஆரம் r_1 மற்றும் $\sum b_n x^n$ -ன் ஒருங்கிணைப்பு ஆரம் $r_2 > r_1$ என்றால், $\sum (a_n + b_n) x^n$ என்ற கூட்டுத்தொகையின் ஆரம் என்ன?
2. பின்வரும் அடுக்கு தொடர் $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} (4x - 8)^n$ -க்கு ஒருங்கிணைப்பு ஆரம் மற்றும் ஒருங்கிணைப்பு இடைவெளி ஆரம் காண்க
3. $f(x) = \log(1 + x)$ என்ற சார்புக்கு மெக்லோரின் தொடரைக் காண்க. மேலும் $\frac{\log(1+x)}{x}$ -ன் மதிப்பை கணக்கிடுக.
4. எல்லா $k \geq 2$ -க்கும் $k^k > 2^k$ என கொடுக்கப்பட்டது. $\{x_n\}$ என்ற வரிசையின் n -வது உறுப்பு $x_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}$ எனில் மேல் வரம்பு $3/2$ என நிறுவுக.
5. $a_1 > b_1 > 0$ மற்றும் a_n, b_n ஆனது $n \geq 2$ -க்கு $a_n = \frac{a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2}{a_{n-1}^2 - b_{n-1}^2}$, $b_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$ என்றவாறு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. வரிசை $\langle a_n \rangle$ மற்றும் $\langle b_n \rangle$ ஒரே மாதிரியானது, ஒன்று அதிகரிக்கிறது, மற்றொன்று குறைகிறது மற்றும் ஒரே எல்லைக்கு நெருங்குகிறது என நிறுவுக.
6. a. $\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ L, & m = n \end{cases}$
b. $\int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = 0$ நிரூபிக்கவும்
 m மற்றும் n இந்த 1, 2, 3, ... மதிப்புகளில் ஏதேனும் ஒன்றைப் பெறலாம்.
7. $2l$ என்ற இடைவெளியில் $f(x)$ என்ற சார்பு பின்வருமாறு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது மற்றும் ஃபோரியர் தொடரை காண்க. $f(x) = \begin{cases} l-x, & 0 < x < l \\ 0, & l \leq x < 2l \end{cases}$. மேலும் $-\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$ மற்றும் $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$ என நிறுவுக.
8. a. $-\pi < x < \pi$ என்ற இடைவெளியில் $x = 2 \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right)$ என நிறுவுக
b. முடிவு (a) யை தொகையிடக் கிடைப்பது, $-\pi \leq x \leq \pi$ என்ற இடைவெளியில்

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \dots \right) \text{ என நிறுவுக}$$

c. முடிவு (b) யை தொகையிடக் கிடைப்பது, $-\pi \leq x \leq \pi$ என்ற இடைவெளியில்,

$$x(\pi - x)(\pi + x) = 12 \left(\frac{\sin x}{1^3} - \frac{\sin 2x}{2^3} + \dots \right) \text{ என நிறுவுக}$$

9. a. $x = 2$ -ஐ பொறுத்து $\frac{1}{1-x}$ -ன் டெய்லர் விரிவாக்கத்திற்கான தொடரைகாண்க.
b. முடிவு (a)யிலிருந்து பெறப்பட்ட தொடர் $|x - 2| < 1$ -க்கு ஒருங்கிணைந்தது என நிறுவுக.

விடைகள்

1. r_1 2. $R = \frac{1}{8}$ மற்றும் $\frac{15}{8} \leq x \leq \frac{17}{8}$
3. $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$ மற்றும் $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$
7. $f(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=odd}^{\infty} \frac{2l}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi x}{l} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{l}$
9. $(a) - 1 + (x - 2) - (x - 2)^2 + (x - 2)^3 + \dots + (-1)^{n+1} (x - 2)^n + \dots$

திட்டம் / செயல்பாடுகள் / நடைமுறை

திட்டம்

1. பின்வரும் ஒவ்வொரு சார்புகளுக்கும் வரைபடத்தை வரையவும்
a. $(-5, 5)$ என்ற இடைவெளியில் $f(x) = |x - 1| + |x + 1|$
b. $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$ இடைவெளி = 2π
c. $f(x) = \begin{cases} 1, & 2 \leq x \leq 4 \\ 0, & 4 \leq x \leq 6 \end{cases}$ இடைவெளி = 6

செயல்பாடுகள்

1. முடிவிலி வரை எண்களைச் சேர்க்க முடியுமா?
(குறிப்பு : பதில் நீங்கள் கற்பனை செய்வது போல் இல்லை)

நடைமுறை

1. MATLAB ஐப் பயன்படுத்தி, $\sin(x)$ ஐ விரிவாக்க ஒரு குறியீட்டை எழுதுங்கள்.
2. MATLAB ஐப் பயன்படுத்தி ஃபிபோனாச்சிவரிசையின் வரைபடத்தைத் திட்டமிடுங்கள்.

மேலும் தெரிந்து கொள்ள வேண்டியவைகள்

1. $\langle a_n \rangle$ என்ற மெய்யெண்களின் வரிசையில் $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a_{n-1}) = a$ எனில் $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$

a. 1 க்கு ஒருங்கிணைதல். b. வேறுபடுதல்

c. 0 க்கு ஒருங்கிணைதல். d. a க்கு ஒருங்கிணைதல்.
2. $\langle a_n \rangle$ என்ற கொடுக்கப்பட்ட மெய்யெண்களின் வரிசையில் $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - a_{n-1}| < \infty$ ஆனது சரி எனில் $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, $x \in R$ ஒருங்கிணைந்தது

a. R -ல் எங்கும் இல்லை. b. R -ல் எல்லா இடங்களிலும்

c. $(-1, 1)$ கொண்ட சில தொகுப்பில் d. $(-1, 1)$ -ல் மட்டும்
3. $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ என்க. பின்வருவனவற்றில் எது உண்மையானது?

a. எல்லா $n \geq 1$ -க்கும் $S_{2n} \geq \frac{n}{2}$ b. S_n வரிசை வரம்புடையது

c. $n \rightarrow \infty$ எனும் போது $|S_{2n} - S_{2n-1}| \rightarrow 0$ d. $n \rightarrow \infty$ எனும் போது $\frac{S_n}{n} \rightarrow 1$
4. $f(x+1) = f(x)$ எனும்போது கொடுக்கப்பட்ட $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + x, & -\frac{1}{2} < x \leq 0 \\ \frac{1}{2} - x, & 0 < x < \frac{1}{2} \end{cases}$ என்ற சார்புக்கு ஃபோரியர் தொடர்விரிவாக்கம்

a. $\frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos 2n\pi x$ b. $\frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos 2(2n-1)\pi x$

c. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos 4n\pi x$ d. $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos 2(2n-1)\pi x$
5. $f(x) = \begin{cases} -\pi, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 < x < \pi \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0 \end{cases}$ when $f(x+2\pi) = f(x)$ என்ற சார்புக்கு ஃபோரியர் தொடர் விரிவாக்கம் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

a. $-\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{-1 + (-1)^n}{n^2\pi} \right) \cos nx + \left(\frac{1 - 2(-1)^n}{n} \right) \sin nx \right\}$

b. $-\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1 - (-1)^n}{n^2\pi} \right) \cos nx + \left(\frac{1 + 2(-1)^n}{n} \right) \sin nx \right\}$

$$c. -\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{-1 + (-1)^n}{n\pi} \right) \cos nx + \left(\frac{1 + 2(-1)^n}{n} \right) \sin nx \right\}$$

$$d. -\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1 - (-1)^n}{n\pi} \right) \cos nx + \left(\frac{1 - 2(-1)^n}{n} \right) \sin nx \right\}$$

6. பின்வரும் சார்புகளில் எது வேகமாக வளர்கிறது?

a. $x^{1,000,000,000,000}$

b. x^x

c. $x!$

d. $9, 999, 999, 999, 999, 999, 999, 999^x$

7. 3, 15, 75, 375 ... என்ற வடிவியல் வரிசைக்கான வெளிப்படையான சூத்திரம்எது?

a. $2 \times 6! \times 3^{n-1}$

b. $3 \times 5^{n-1}$

c. $3 \times 8^{n-1}$

d. $7 \times 4^{n-1}$

8. $\sum_{n=0}^{\infty} m! (2x - 1)^m$ என்ற அடுக்கு தொடருக்கு ஒருங்கிணைப்பு ஆரம் மற்றும் ஒருங்கிணைப்பு இடைவெளி ஆரம் என்ன?

a. 3, 12

b. 1, 0.87

c. 2, 5.4

d. $0, \frac{1}{2}$

விடைகள்

1. c

2. c

3. a

4. B

5. a

6. b

7. b

8. d

குறிப்புகள் / பரிந்துரைக்கப்பட்ட புத்தகங்கள்

1. Bary, N.K.(1964). *A Treatise on Trigonometric Tupir*, Pergamon Press.
2. Campbell, G.A. and R.M. Foster (1948). *Fourier Integrals for practical Applications*. D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N.J.
3. Carslaw, H.S. (1921). *Theory of Fourier Tupir and Integrals*. St. Martin Press, Inc., New York.
4. Churchill, R.V. and J.W. Brown (1987). *Fourier tupir and Boundary Value Problems*, McGraw Hill, New York.
5. Courant R.(1988). *Differential and Integral Calculus*, Wiley, New York.
6. Dass, H.K. *Advanced Engineering Mathematics*, S. Chand Publications.
7. Garg, Reena (2019). *Engineering Mathematics-I*, 2nd Edition, Khanna Book Publishing Co. (P) Ltd.
8. Grewal, B.S. *Higher Engineering Mathematics*, Khanna Publishers.

9. Jain, R.K.; Iyengar, S.R.K. *Advanced Engineering Mathematics*, 2nd Edition, Narosa.
10. Knoop, K. (1987). *Theory and Applications of InKbTW Tupir*. Blackie & Sons Ltd., Glasgow.
11. Philip, Franklin (1940). *A Treatise on Advanced Calculus*, Wiley, Inc. NewYork.
12. Piskunov, N. (1969) *Differential and Integral Calculus*, MIR Publishers, Moscow.
13. Prasad, Chandrika (1967). *Mathematics for Engineers*, Pothishala Private Ltd.
14. Ram, Babu. *Engineering Mathematics*, Pearson.
15. Thomas, G.B. and Finney, R.L. (1992). *Calculus and Analytic Geometry*, Addison-Wesley, Reading, MA.
16. Tolstov, G.P. (1976). *Dover*, New York.

4

பலமாறி நுண்கணிதம்

அடிப்படைக்கோட்பாடு

கொடுக்கப்பட்ட அலகில் உள்ள ஒவ்வொரு தலைப்புகளும் நமது அன்றாட வாழ்க்கையில் முக்கிய பங்கு வகிக்கின்றன. வெப்பநிலை, முடுக்கம், ஓட்டுதல், ஒரு தொழிற்சாலை இலாபத்தை அதிகபட்சம் வரை நாம் விண்வெளியில் அல்லது விமானத்தில் இருக்கும்போது, ஒவ்வொரு அம்சத்திற்கும் அலகில் குறிப்பிடப்பட்ட தலைப்புகளைப் பயன்படுத்த வேண்டும். கணித ரீதியாக மட்டுமல்லாமல், இந்த தலைப்புகள் வணிகம் மற்றும் பொருளாதாரம், தொழில், உயிரியல் மற்றும் மருத்துவம், கட்டிடக்கலை, இயற்பியல் மற்றும் பொறியியல் மற்றும் பல துறைகளில் பெரும் முக்கியத்துவத்தைக் கொண்டுள்ளன. வரம்புகள் மட்டுமே எல்லையற்றதை சமாளிக்க கணிதத்தில் ஒரே வழி. நுண் கணிதம் கண்டுபிடிக்கப்படுவதற்கு முன்பு, விஞ்ஞானிகள் ஒரு பொருளின் வேகத்தை கணக்கிடுவது குறித்து குழப்பமடைந்தனர், ஏனெனில் அது காலத்திற்கு ஏற்ப மாறிக்கொண்டே இருக்கிறது. நேராக விளிம்புகள் இல்லாத ஒரு பிராந்தியத்தின் பகுதியைக் கண்டறிவது கடினமான பணியாகும். ஓரளவு வகைக்கெழு இரண்டு பொருட்கள் மாற்று அல்லது நிரப்பு என்பதை தீர்மானிப்பதற்கான நிபந்தனையைப் பெற விளிம்பு தேவையில் பயன்படுத்தப்படுகிறது. திசை வகைக்கெழுக்கள் மூலம், எந்த அலகு திசையன் இடத்தையும் அதன் திசைக்கு துருத்தி விவரிக்கலாம். மாக்ஸிமா - மினிமா அதன் உயரம்/வரம்பை அதிகரிக்க ஆரம்ப வேகம் மற்றும் எறிபொருளின் துவக்க கோணம் (வீசப்படும் ஒரு பொருள்) ஆகியவற்றை மதிப்பிடுவதில் ஒரு முக்கியத்துவத்தைக் கொண்டுள்ளது. மொழிப் பெருக்கிகளின் முறை என்பது ஒரு சக்திவாய்ந்த கருவியாகும், இது வெளிப்படையான நிலைமைகளைத் தீர்க்க வேண்டிய அவசியமின்றி பிரச்சினைகளின் வகுப்பைத் தீர்க்கப் பயன்படுகிறது, பின்னர் கூடுதல் மாறிகளை அகற்ற அவற்றைப் பயன்படுத்தலாம். மேலும் வானொலி, தொலைக்காட்சி ஒளிபரப்பு, மின்சார மோட்டார் அல்லது டைனமோ, மேக்ஸ்வெல்லின் சமன்பாடுகளைப் பயன்படுத்தி வடிவமைக்கப்பட்டுள்ளது, இது சாய்வு, வேறுபாடு மற்றும் சுருட்டை அடிப்படையாகக் கொண்டது.

முன்நிபந்தனைகள்

மாணவர்கள் பின்வருவனவற்றை தெரிந்து கொள்ள வேண்டும்.

1. ஒரு மாறியின் சார்புகள், எல்லைகள் மற்றும் தொடர்ச்சி.
2. கொடுக்கப்பட்ட சார்பின் பகுதி வகைக்கெழு
3. பல்வேறு வகையான பாதைகள் பற்றிய அறிவு
4. கொடுக்கப்பட்ட வளைவுக்கான வரைபடத்தை வரைதல்

5. ஒரு மாறியின் பெரும மற்றும் குரும கருத்தியல்
6. 3 - D ஆயத்தொலைவுகள், 3 - D விமானத்தில் இயக்கத்தின் திசை
7. கூட்டல், கழித்தல் போன்ற திசையன்களின் சார்புகள்

அலகு விளைவுகள்

இந்த அலகு முடிந்த பிறகு, மாணவர்கள் பின்வருவனைப்பற்றி தெளிவாக புரிந்திருத்தல் வேண்டும்

U4-01 : வரம்பைக் கணக்கிடுங்கள், தொடர்ச்சியை ஆராயுங்கள் மற்றும் வேறுபாட்டை வடிவியல் ரீதியாக புரிந்து கொள்ளுங்கள்; வரம்பு, தொடர்ச்சி மற்றும் வேறுபாடு ஆகியவற்றுக்கு இடையேயான உறவுகளைக் கற்றுக்கொள்ளுங்கள்; மற்ற துறைகளுடன் வேறுபாட்டை தொடர்புபடுத்தவும்.

U4-02 : நுண்கணிதத்தில் ஒரு மாறியிலிருந்து பல மாறிகள் வரை கருத்தியல் முன்னேற்றத்தைக் கற்றுக்கொள்ளுங்கள்; சங்கிலி விதியைப் பயன்படுத்தி கலப்பு சார்பு களின் வகைக்கெழும்களின் மதிப்பீட்டின் கருத்தைக் கற்றுக்கொள்ளுங்கள்.

U4-03 : சிக்கலை மேம்படுத்துவதில் பல்மாறி நுண்கணிதம் பயன்படுத்துங்கள்; லாக்ரேஞ்சின் பெருக்கி முறையின் உதவியுடன் சிக்கலான சிக்கல்களை உருவாக்கி மதிப்பீடு செய்யவும்.

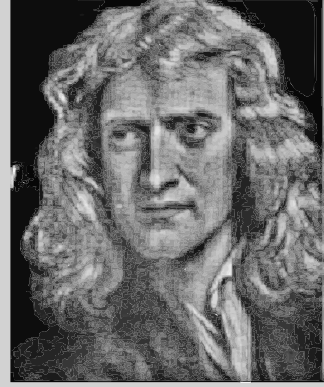
U4-04 : சாய்வு, வேறுபாடு மற்றும் சுருட்டலுடன் திசை சார்ந்த வகைக்கெழுமை பயன்படுத்தவும், இந்த சொற்களின் வடிவியல் அர்த்தத்தை விளக்க வரைபடங்களைப் பயன்படுத்தவும்.

பாடநெறி விளைவுகளுடன் எதிர்பார்க்கப்படும் வரைபடமாக்கல்

பாடப்பகுதி-4 முடிவுகள்	பாடக்கோப்பின் அடைவுகளுடன் எதிர்பார்க்கப்படும் ஒப்புமை (1-பலவீனமான தொடர்பு; 2-நடுத்தர தொடர்பு; 3-வலுவான தொடர்பு)				
	CO-1	CO-2	CO-3	CO-4	CO-5
U4-01	2	-	-	3	-
U4-02	-	2	2	3	1
U4-03	1	-	-	3	1
U4-04	1	1	1	3	-

வரலாறு

நுண் கணிதம் எனப்படும் கணிதத் துறை சார்பகத்தின் புள்ளிகள் மாறும்போது ஒரு சார்பின் மதிப்பில் ஏற்படும் மாற்றத்தைப் பற்றிய ஆய்வைக் கையாள்கிறது. நுண் கணிதம் வரம்புகள், வகைகெழுக்கள் மற்றும் ஒருங்கிணைப்புகளால் ஆனது. ஒரு உள்ளீடு குறிப்பிட்ட ஒன்றை நெருங்கும்போது சில மதிப்பை அணுகும் மதிப்பு சார்பின் வரம்பு என்று அழைக்கப்படுகிறது. கால்குலஸின் பொருள் தற்போதைய நிலைக்கு ஏராளமான விஞ்ஞானிகள் பங்களித்துள்ளனர். சர் ஐசக் நியூட்டன் மற்றும் கோட்பிரைட் வில்ஹெல்ம் லீப்னீஸ் ஆகியோர் சமகால கணிப்புக்கு அடித்தளத்தை அமைத்தனர் (1642–1727). பிரபலமான நம்பிக்கைக்கு மாறாக, சமகால நுண் கணிதம் 1817 இல் பெர்னார்ட் போல்சானோவின் "வரம்பின் எப்சிலோன்-டெல்டா வரையறை" க்கு முந்தையது, இது அகஸ்டின்-லூயி கவுச்சி கருத்தை முன்னோக்கி கொண்டு சென்றது. மேலும், நவீன ஸ்டேமனைக் கண்டு பிடித்தவர் கார்ல் வீர்ஸ்ட்ராஸ். மேலும் நுண் கணிதம் தொடர்பான கருத்துகளில் தொடர்ச்சி (அதாவது வரைபடங்கள் அவற்றின் சார்பகத்தின் முழுவதும் ஒற்றை, உடைக்கப்படாத வளைவாக இருக்கும்), மீப்பெரு, மீச்சிறு (ஒரு சார்பின் மிக உயர்ந்த மற்றும் மிகச்சிறிய மதிப்பு) மற்றும் வேறுபாடு (இது 3-D இல் திசையனின் மாற்ற விகிதத்தை விவரிக்கிறது).



நமக்குத் தெரிந்த விஷயம் ஒரு துளி, நமக்கு தெரியாத விஷயம் ஒரு கடல் அளவு.

– சர் ஐசக் நியூட்டன்

4.1 சார்பின் எல்லை

ஒற்றை மாறியின் சார்பின் வரம்பின் யோசனை இரண்டு மாறிகளின் சார்பின் வரம்பின் விஷயத்தில் நீட்டிக்கப்படலாம்.

வரையறை : $f(x, y)$ என்ற சார்பை வரம்பு $'l'$ என கூற வேண்டும் ஆனால் (x, y) ஆனது (a, b)

நோக்கி நகர வேண்டும் எந்தவொரு மிகை முழு எண் $'\epsilon'$ ம், $\exists$ ஒரு மிகை எண் $'\delta'$ ஆனது $'\epsilon'$ ஐ (a, b) ஐ தவிர்த்து அனைத்து புள்ளிகளையும் சார்ந்து இருக்கும்.

$$i.e., |f(x, y) - l| < \epsilon \text{ for } 0 < |x - a| < \delta \text{ and } 0 < |y - b| < \delta$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = l \text{ or } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = l$$

4.1.1 வரம்புகளின் இயற்கணிதம்

தேற்றம். $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = l$ மற்றும் $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} g(x, y) = m$, எனில்

$$i. \quad \lim f(x, y) + g(x, y) = l + m$$

$$ii. \quad \lim f(x, y) - g(x, y) = l - m$$

$$iii. \quad \lim f(x, y)g(x, y) = lm$$

$$iv. \quad \lim kf(x, y) = kl$$

[எந்தவொரு k - க்கும்]

$$v. \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{l}{m}, \text{ when } (x,y) \rightarrow (a,b) \quad [m \neq 0 \text{ எனும்போது}]$$

சான்றுகள் ஒரு ஒற்றை மாறிகளுக்கான தொடர்புடைய கோட்பாடுகளுடன் ஒத்திருக்கிறது.

**சில விளக்க
எடுத்துக்காட்டுகள்**

எடுத்துக்காட்டு 4.1 : $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} (x^2 + 3y) = 4$. என நிரூபிக்கவும்

தீர்வு : முறை I : வரம்பின் வரையறையைப் பயன்படுத்துதல்

எந்த $\varepsilon > 0$, க்கும், $\delta > 0$, போன்றவற்றைக் காணலாம் என்பதை நாம் காட்ட வேண்டும்.

$$|x^2 + 3y - 4| < \varepsilon, \text{ எப்பொழுது } |x - 1| < \delta, |y - 1| < \delta$$

$$|x - 1| < \delta \text{ மற்றும் } |y - 1| < \delta \text{ என்றால், பிறகு}$$

$$-\delta + 1 < x < \delta + 1 \text{ மற்றும் } 1 - \delta < y < \delta + 1, x = 1, y = 1 \text{ தவிர்த்து}$$

$$\text{இதனால்} \quad (1 - \delta)^2 < x^2 < (\delta + 1)^2$$

$$\text{அல்லது} \quad 1 - \delta^2 - 2\delta < x^2 < 1 + \delta^2 + 2\delta \quad \dots (A)$$

$$\text{மற்றும்} \quad 3 - 3\delta < 3y < 3\delta + 3 \quad \dots (B)$$

(A) மற்றும் (B) சேர்த்தல்,

$$\text{அல்லது} \quad \delta^2 - 5\delta + 4 < x^2 + 3y < \delta^2 + 5\delta + 4$$

$$\text{அல்லது} \quad \delta^2 - 5\delta < x^2 + 3y - 4 < \delta^2 + 5\delta$$

$$\text{இப்போது,} \quad \delta \leq 1 \text{ என்றால்,}$$

$$-6\delta < x^2 + 3y - 4 < \delta^2 + 6\delta$$

$$\text{i.e.,} \quad |x^2 + 3y - 4| < 6\delta = \varepsilon, \text{ எங்கே } \delta = \frac{\varepsilon}{6}$$

$$\therefore |x^2 + 3y - 4| < \varepsilon \text{ எப்பொழுது } |x - 1| < \delta, |y - 1| < \delta$$

$$\therefore \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} (x^2 + 3y) = 4$$

முறை II : வரம்புகளின் இயற்கணிதத்தின் அடிப்படையில் ஒரு தேற்றத்தைப் பயன்படுத்துதல் :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} (x^2 + 3y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} x^2 + \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} 3y = 1 + 3 = 4.$$

எடுத்துக்காட்டு 4.2 : $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{xy^3}{x^2 + y^6}$ இல்லை என்பதை காட்டு.

தீர்வு : $y^3 = mx$ பாதையில் $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ என்பதை அனுமதி, 'm' என்பது மெய்யெண்ணாக எண்.

$x \rightarrow 0$ என்க, பிறகு $y^3 = mx$ பாதையில் என்க.

$$\begin{aligned} \text{இப்போது, } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^6} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(mx)}{x^2 + (mx)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m}{1 + m^2} \end{aligned}$$

m மதிப்புகளுக்கு வேறுபட்டது.

$$\therefore \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{xy^3}{x^2 + y^6} \text{ வரம்பு இல்லை.}$$

குறிப்பு : ஒற்றை மாறியில், வலது மற்றும் இடமிருந்து வரம்பு இருந்தால் மற்றும் சமமாக இருந்தால், வரம்பு உள்ளது என்று எழுதுகிறோம். இதேபோல், இங்கே சாத்தியமான ஒவ்வொரு பாதையிலும் சமமான வரம்பு இருந்தால், வரம்பு உள்ளது என்று நாங்கள் கூறுகிறோம், வரம்பு சமமாக இல்லாத இரண்டு வெவ்வேறு பாதைகள் இருந்தால், வரம்பு இல்லை என்று நாங்கள் கூறுகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 4.3 : $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ வரம்பு இல்லை என்பதை காட்டு.

தீர்வு : நாம் $y = x$ பாதையை எடுத்தால், பிறகு $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}$

நாம் $y = 2x$ பாதையை எடுத்தால், பிறகு $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot 2x}{x^2 + 4x^2} = \frac{2}{5}$

இங்கே, இரண்டு வெவ்வேறு பாதைகளுக்கு, வரம்பு ஒன்றல்ல.

எனவே, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x^2 + y^2}$ வரம்பு இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு 4.4 : $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$, என்பதை காட்டு, எங்கே

$$f(x, y) = x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}, x \neq 0, y \neq 0.$$

தீர்வு : $\epsilon > 0$ மெய்யெண்ணாக இருக்கட்டும்.

$$\text{இப்போது, } |f(x, y) - 0| = \left| x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} \right| \leq \left| x \sin \frac{1}{y} \right| + \left| y \sin \frac{1}{x} \right|$$

$$\leq |x| \left| \sin \frac{1}{y} \right| + |y| \left| \sin \frac{1}{x} \right|$$

$$\leq |x| + |y|$$

$$= |x - 0| + |y - 0|$$

$$\left[\because \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1 \text{ and } \left| \sin \frac{1}{y} \right| \leq 1 \right] \dots(1)$$

Let $|x-0| < \frac{\varepsilon}{2}$ மற்றும் $|y-0| < \frac{\varepsilon}{2}$

(1) இலிருந்து $|f(x, y) - 0| \leq |x-0| + |y-0|$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\therefore |f(x, y) - 0| < \varepsilon$ எப்பொழுது $|x-0| < \frac{\varepsilon}{2}$ மற்றும் $|y-0| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, எனும்போது

$|f(x, y) - 0| < \varepsilon$ எப்பொழுது $|x-0| < \delta$ மற்றும் $|y-0| < \delta$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$$

எடுத்துக்காட்டு. 4.5 : $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$. என்பதை காட்டு.

தீர்வு : $\varepsilon > 0$ மெய்யெண்ணாக இருக்கட்டும்.

$$\text{இப்போது, } |f(x, y) - 0| = \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| \Rightarrow \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right|$$

$x = r \cos \theta$ மற்றும் $y = r \sin \theta$ போட்டு, நாங்கள் பெறுகிறோம், $x^2 + y^2 = r^2$

$$\begin{aligned} |f(x, y) - 0| &= \left| \frac{r^2 \cos \theta \sin \theta}{\sqrt{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}} \right| \\ &= \left| \frac{r^2 (\cos \theta \cdot \sin \theta)}{\sqrt{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}} \right| \\ &= \left| \frac{r^2}{r} (\cos \theta \cdot \sin \theta) \right| \\ &= |r \cos \theta \cdot \sin \theta| \leq |r| = r \quad \left[\because |\cos \theta| \leq 1, |\sin \theta| \leq 1 \right] \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} \quad \left[\because r^2 = x^2 + y^2 \right] \end{aligned}$$

$$\therefore |f(x, y) - 0| < \varepsilon \quad \text{if} \quad \sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon$$

i.e., $x^2 + y^2 < \varepsilon^2$ என்றால்

i.e., $|x^2| < \frac{\varepsilon^2}{2}, |y^2| < \frac{\varepsilon^2}{2}$ என்றால்

i.e., $|x| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, |y| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ என்றால்

$\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} = \delta$, போட்டு, நாங்கள் பெறுகிறோம், $|f(x, y) - 0| < \varepsilon$, எப்பொழுது $|x-0| < \delta$ மற்றும் $|y-0| < \delta$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 .$$

4.1.2 திரும்பப் பெற்ற வரம்பு

ஒரு சார்பு $f(x, y)$, (a, b) இன் சில சுற்றுப்புறங்களில் வரையறுக்கப்பட்டால், பின்னர் வரம்பு $\lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$, அது இருந்தால், ஒரு சார்பு ஆகும், சொல் $\phi(y)$, பின்னர், வரம்பு என்றால் $\lim_{y \rightarrow b} \phi(y)$ உள்ளது, மற்றும் λ சமமாக உள்ளது. நாங்கள் எழுதுகிறோம், $\lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y) = \lambda$, λ என்பது $f(x, y)$ என மீண்டும் மீண்டும் வரம்பு என்று கூறுங்கள் $x \rightarrow a, y \rightarrow b$. வரம்புகளைப் பயன்படுத்துவதற்கான வரிசையை மாற்றினால், மீண்டும் மீண்டும் பிற வரம்பைப் பெறுவோம், $\lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y) = \lambda$ (சொல்) முதலில் எங்கே $y \rightarrow b$ பின்னர் $x \rightarrow a$.

இந்த இரண்டு வரம்புகளும் சமமாக இருக்கலாம் அல்லது இல்லாமல் இருக்கலாம்.

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 4.6 : $f(x, y) = \frac{xy^3}{x^2 + y^6}$ $(0, 0)$ யின் மீண்டும் மீண்டும் வரம்பு மற்றும் இரட்டை வரம்பைக் கண்டறியவும்.

தீர்வு : $f(x, y) = \frac{xy^3}{x^2 + y^6}$ என்க, பின்னர்

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} (0) = 0, \text{ Similarly, } \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} (0) = 0 \text{ இவ்வாறு, இரண்டு மீண்டும்}$$

மீண்டும் வரம்புகள் உள்ளன ஆனால் சமமாக இல்லை, இதன் விளைவாக, $y^3 = mx$ ஒரே நேரத்தில் வரம்பு இருக்க முடியாது.

குறிப்பு : மீண்டும் மீண்டும் வரம்புகள் சமமாக இல்லை என்றால், ஒரே நேரத்தில் (இரட்டை) வரம்பு இருக்க முடியாது ஆனால் மாற்று உரையாடல் உண்மை இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு 4.7 : $f(x, y) = \frac{(y-x)}{(y+x)} \cdot \frac{(1+x)}{(1+y)}$ $(0, 0)$ யின் மீண்டும் மீண்டும் வரம்பு மற்றும் இரட்டை வரம்பைக் கண்டறியவும்.

தீர்வு : $f(x, y) = \frac{(y-x)}{(y+x)} \cdot \frac{(1+x)}{(1+y)}$ என்க, பின்னர்

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-x)}{(x)} (1+x) = -1$$

மற்றும் $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{y} \frac{(1)}{(1+y)} = 1$

இரட்டை வரம்பு $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(y-x)}{(y+x)} \cdot \frac{(1+x)}{(1+y)} \dots (2)$

$y = mx$, என போட்டு பின்னர் (2) இலிருந்து

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(mx-x)}{(mx+x)} \cdot \frac{(1+x)}{(1+mx)} \\ &= \frac{m-1}{m+1}\end{aligned}$$

m இன் வெவ்வேறு மதிப்புகளுக்கு இது வேறுபட்டது.

இவ்வாறு, இரண்டு மீண்டும் மீண்டும் வரம்புகள் உள்ளன ஆனால் சமமாக இல்லை, இதன் விளைவாக, ஒரே நேரத்தில் வரம்பு இருக்க முடியாது.

4.1.3 ஒரு சார்பின் தொடர்ச்சி

ஒரு சார்பு $f(x, y)$ ஒரு புள்ளியில் (a, b) தொடர்ச்சியாக இருப்பதாகக் கூறப்படும் $\varepsilon > 0$ க்கு, நாம் மெய் எண்ணைக் காணலாம் ($\delta > 0$ பொறுத்து), அதை போல $|f(x, y) - f(a, b)| < \varepsilon$ அனைத்து x, y க்கு $|x - a| < \delta$ மற்றும் $|y - b| < \delta$ திருப்தி அளிக்கிறது.

4.1.4

- (i) $f(x, y) + g(x, y)$ D யில் தொடர்ச்சியாக உள்ளது.
- (ii) $f(x, y) - g(x, y)$ D யில் தொடர்ச்சியாக உள்ளது.
- (iii) $f(x, y) \cdot g(x, y)$ D யில் தொடர்ச்சியாக உள்ளது.
- (iv) $kf(x, y)$ D யில் தொடர்ச்சியாக உள்ளது.
- (v) $\frac{f(x, y)}{g(x, y)}$ D யில் தொடர்ச்சியாக உள்ளது.

மேற்கூறியவற்றின் சான்றுகள் ஒரு ஒற்றை மாறிக்கான தொடர்புடைய தேற்றத்தை ஒத்திருக்கிறது.

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 4.8 : $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

செயல்பாட்டைக் காட்டுகிறது. தோற்றத்தில் தொடர்ச்சியாக உள்ளதா?

தீர்வு : அனுமதி $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$

$x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ பொருக, நாங்கள் பெறுகிறோம், $x^2 + y^2 = r^2$

$$\begin{aligned}\left| \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| &= \left| \frac{r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{r^2} \right| \\ &= |r^2 \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta|\end{aligned}$$

$$\leq r^2$$

$$[\because |\sin \theta| \leq 1 \text{ and } |\cos \theta| \leq 1]$$

$$= x^2 + y^2$$

$$\therefore \left| \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon \text{ if } x^2 + y^2 < \varepsilon$$

$$|x^2| < \frac{\varepsilon}{2}, |y^2| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ என்றால்}$$

$$\text{i.e., } |x| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}, |y| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \text{ என்றால்}$$

$$\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} = \delta, \text{ பொருக, நாங்கள் பெறுகிறோம்}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = 0 = f(0,0)$$

எனவே, $f(x, y)$, $(0, 0)$ இல் தொடர்ச்சியாக உள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 4.9 : கொடுக்கப்பட்ட செயல்பாட்டிற்கு தொடர்ச்சியை ஆராயுங்கள்,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^4 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

தீர்வு : நீங்களே முயற்சி செய்யுங்கள்.

எடுத்துக்காட்டு 4.10 : கொடுக்கப்பட்ட செயல்பாட்டிற்கான தொடர்ச்சியை $(2, 3)$ ல் ஆராயவும்,

$$f(x, y) = \begin{cases} 3xy, & (x, y) \neq (2, 3) \\ 6, & (x, y) = (2, 3) \end{cases}$$

தீர்வு : இங்கே,

$$f(x, y) = 3xy, (x, y) \neq (2, 3)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} 3xy = 18 \neq f(2, 3)$$

எனவே, $f(x, y)$ $(2, 3)$ இல் தொடர்ச்சியாக இல்லை.

குறிப்பு : $f(2, 3) = 18$ என்றால், $f(x, y)$ $(2, 3)$ இல் தொடர்ச்சியாக இருக்கும். எனவே $f(x, y)$ $(2, 3)$ -இல் நீக்கக்கூடிய இடைநிறுத்தத்தைக் கொண்டுள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 4.11 : சார்பு $f(x, y) = \begin{cases} y \sin \frac{1}{x}, & \text{if } x \neq 0 \\ 0, & \text{if } x = 0 \end{cases}$

என்பதை நிரூபிக்கவும். தொடர்ச்சியாக $(0, 0)$ உள்ளதா?

தீர்வு : $\varepsilon > 0$ எந்த எண்ணாக இருந்தாலும் சரி,

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(0, 0)| &= \left| y \sin \frac{1}{x} - 0 \right| \\ &= \left| y \sin \frac{1}{x} \right| = |y| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \\ &\leq |y| \end{aligned}$$

$$\left[\because \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1 \right]$$

$$\therefore |f(x, y) - f(0, 0)| \leq |y - 0| \quad \dots(1)$$

அனுமதி $|x - 0| < \varepsilon$ and $|y - 0| < \varepsilon$

(1) இலிருந்து, எங்களிடம் உள்ளது $|f(x, y) - f(0, 0)| < \varepsilon$

எனவே, $f(x, y)$ $(0, 0)$ இல் தொடர்ச்சியாக உள்ளது.

பயிற்சி 4.1

1. நிரூபிக்க $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} (x + y) = 0$.

2. பின்வரும் வரம்பை மதிப்பிடுங்கள்:

$$(i) \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \quad (ii) \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x^2 - y^2)^2}$$

$$(iii) \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^3 + y^3}{x - y} \text{ குறிப்பு : } y = x - mx^3 \text{ என பதிலிட}$$

3. நிரூபிக்க

$$(i) \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x \sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 0 \quad (ii) \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sin^{-1}(xy - 2)}{\tan^{-1}(3xy - 6)} = \frac{1}{3}$$

$$(iii) \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 1)} \frac{x + y - 1}{\sqrt{x} - \sqrt{1 - y}} = 0 \quad iv. \lim_{(x, y) \rightarrow (3, 2)} (x + y) \frac{\sin^{-1}(xy - 6)}{\cos^{-1}(2xy - 12)} = 0$$

4. $(0, 0)$ -ல் பின்வரும் சார்புகளின் தொடர்ச்சியைப் பற்றி விவாதிக்கவும்

$$i. f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$ii. \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$iii. \quad f(x, y) = \begin{cases} 2xy \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

குறிப்பு : $y = x - mx$

$$iv. \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^6}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$5. \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ பகா எண்} \\ 0, & x \text{ பகு எண்} \end{cases} \quad \text{என்ற சார்பு எங்கும் தொடர்ச்சியாக உள்ளது என காட்டு.}$$

$$6. \quad f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{if } y \neq 0 \\ 0, & \text{if } y = 0 \end{cases} \quad \text{என்ற சார்பு எங்கும் தொடர்ச்சியாக இல்லை என காட்டு. இங்கு } (a, b) \text{ if } b = 0.$$

$$7. \quad f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases} \quad \text{என்ற சார்பு } (0, 0) \text{ தொடர்ச்சியாக உள்ளது என காட்டு.}$$

$$8. \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} [1 - \cos(x^2 + y^2)], & (x, y) \neq (0, 0) \\ k, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{என்றால், பின்னர்,}$$

k இன் மதிப்பைக் கண்டறியவும் $f(x, y)$ $(0, 0)$ ல் தொடர்ச்சியாக உள்ளது.

$$9. \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin\left\{2(x^2 + y^2)\right\} e^{3x \sin(\frac{4}{y})}}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{என்றால்,}$$

அதற்கான ' α ' மதிப்பை கண்டறியவும் $f(x, y)$ $(0, 0)$ ல் தொடர்ச்சியாக உள்ளது.

விடைகள்

$$2. \quad i. 0 \quad ii. \text{இல்லை} \quad iii. \text{இல்லை}$$

$$4. \quad i. (0, 0) \text{ க்கு தொடர்ச்சியாக இல்லை} \quad ii. (0, 0) \text{ க்கு தொடர்ச்சியானது.}$$

$$iii. (0, 0) \text{ க்கு தொடர்ச்சியானது.} \quad iv. (0, 0) \text{ க்கு தொடர்ச்சியாக இல்லை}$$

சுவாரஸ்யமான உண்மைகள் (வரம்பு + தொடர்ச்சி)

- ◆ டிரைவர் காரை ஓட்டும்போது, அதன் வேகம் தொடர்ந்து அதிகரித்து வருகிறது, இது "முடுக்கம்" என்று அழைக்கப்படுகிறது. இது காலப்போக்கில் வேகம் எவ்வாறு மாறுகிறது என்பதை விவரிக்கப் பயன்படுத்தப்படும் ஒரு கருத்து. வேகம் மற்றும் முடுக்கம் கணக்கீட்டின் அடிப்படை கருத்தைப் பயன்படுத்தி அளவிடப்படுகிறது, இது வகைக்கெழு என்று அழைக்கப்படுகிறது.
- ◆ தொலைநோக்கி உற்பத்தியின் களத்தில் முக்கியமான பயன்பாட்டைக் கொண்ட டெரிவேடிவ்களைப் பயன்படுத்தி தொடுவான்கள் கண்டுபிடிக்க முடியும் (கோணத்தை கவனித்துக்கொள்ள வேண்டிய இடத்தில்).
- ◆ நேரம் தொடர்ச்சியாக கருதப்படுகிறது (ஆனால் குவாண்டம் இயற்பியலின் அறிமுகம், நேரம் மற்றும் இடம் இடைவிடாதது என்று அழைக்கப்படுகிறது)



Continuity of Function of Two Variable

மெய்யெண்ணாக வாழ்க்கை மாதிரிகள் (வரம்பு மற்றும் தொடர்ச்சி)

- ◆ வேதியியலில், வரம்பு என்ற கருத்தின் உதவியுடன் ஒரு புள்ளியில் அழுத்தத்தைக் கண்டறிதல் (இது விட்டம் உள்ள ஒரு யூனிட் பகுதிக்கு பூஜ்ஜியமாக சுருங்குவதால்).
- ◆ எந்த நேரத்திலும் விழும் பொருளின் வேகத்தைக் கணக்கிட உதவுகிறது.
- ◆ இயற்பியலில், வெப்ப இயக்கவியலின் கருத்து வரம்புகளின் கருத்தைப் பயன்படுத்துகிறது, ஏனெனில் மேக்ரோஸ்கோபிக் சமநிலையை அடைய, ஒருவர் காலவரையற்ற காலத்திற்கு நிறுத்த வேண்டும்.
- ◆ முடுக்கம் தொடர்ச்சிக்கு ஒரு எடுத்துக்காட்டு. அது போல் இல்லை, அது உடனடியாக 50 லிருந்து 2 ஆக குறைகிறது (இடையில் தொடர்ச்சியான மதிப்புகள் உள்ளன).

4.2 திசை வகைக்கெழு

இங்கே, ஒரு திசை வகைக்கெழு என்று அழைக்கப்படும் ஒரு வகை வகைக்கெழு நாங்கள் அறிமுகப்படுத்துகிறோம், இது எந்த திசையிலும் இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறிகளின் சார்பின் மாற்ற விகிதத்தைக் கண்டறிய உதவுகிறது.

வரையறை : அனுமதி $S \subseteq R^m$ மற்றும் அனுமதிக்க $f : S \rightarrow R^m$ மதிப்பில் S வரையறுக்கப்பட்ட சார்பாக இருங்கள் R^m . பின்னர் திசை வகைக்கெழு ' f ' மணிக்கு ' c ' திசையில் ' u ' என குறிப்பிடப்படுகிறது $f'(c, u)$ மற்றும் என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது

$$D_u f(c) = f'(c, u) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c + hu) - f(c)}{h}$$

சில தீர்க்கப்பட்ட உதாரணங்கள்

எடுத்துக்காட்டு 4.12 : $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ மணிக்கு $(0, 0)$ க்கான திசை வகைக்கெழு கண்டறியவும்.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

தீர்வு : இங்கே, $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{இப்போது, } f'(c, u) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c + hu) - f(c)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + h(\sqrt{2}, \sqrt{2})) - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h\sqrt{2}, h\sqrt{2}) - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{h\sqrt{2} \cdot (h\sqrt{2})^2}{2h^2 + 4h^4} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{h^3 \cdot 2\sqrt{2}}{2h^2 + 4h^4} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3}{h^3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{2(1 + 2h^2)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2}}{(1 + 2h^2)} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.13 : $f(x, y)$ உடன் $(a, b), a \neq 0, b \neq 0$ at $(0, 0)$ க்கான

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & x \text{ or } y \neq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{திசை வகைக்கெழு கண்டறியவும்}$$

தீர்வு : இங்கே, $f(x, y) = \begin{cases} x + y & x \text{ or } y \neq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

பிறகு, $f'(c, u) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + h(a, b)) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ha + hb}{h} = a + b$

எடுத்துக்காட்டு 4.14 : $f(x, y)$ உடன் $(0, 0)$ திசையில் $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ க்கான

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \text{ திசை வகைக்கெழு கண்டறியவும்}$$

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டதற்காக $f(x, y)$, எங்களிடம் திசை வகைக்கெழு உள்ளது

$$\begin{aligned} f'(c, u) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left((0, 0) + h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f\left(\frac{h}{\sqrt{2}}, \frac{h}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{\frac{h^2}{2} \cdot \frac{h}{\sqrt{2}}}{\frac{h^4}{4} + \frac{h^2}{2}} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{\frac{h^3}{2\sqrt{2}}}{\frac{h^4 + 2h^2}{4}} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{h^3}{2\sqrt{2}} \times \frac{4}{h^4 + 2h^2} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{2}{\sqrt{2}(2 + h^2)} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

குறிப்புகள் 1 : $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ என்றால், அதை போல $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1, f_2, f_3, \dots, f_m)$ பிறகு $f'(c, u)$ இருந்தால் இருக்கும் $f_i(c, u)$ உள்ளன $\forall i = 1 \text{ to } m$

உதாரணத்திற்கு: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ என்றால், அப்படி இருக்க $f(x, y) = (3x - 2y + x^2, 4x + 3y + y^2)$, $(0, 0)$ க்கு திசையில் (a, b) திசை வகைக்கெழு கண்டறியவும்.

தீர்வு : இங்கே, $f'(c, u) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c + hu) - f(c)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(ha, hb) - f(0, 0)}{h}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3ha - 2hb + h^2a^2, 4ha + 3hb + h^2b^2)}{h} \\
f'(c, u) &= \lim_{h \rightarrow 0} (3a - 2b + ha^2, 4a + 3b + hb^2) \\
&= (3a - 2b, 4a + 3b)
\end{aligned}$$

எனவே ஒவ்வொரு திசையிலும் திசை வகைக்கெழு உள்ளது. (ஒவ்வொரு திசையிலும் வரம்பு இருப்பதால்)

குறிப்புகள் 2 : திசை வகைக்கெழு இருப்பது தொடர்ச்சியை உறுதி செய்யாது.

எடுத்துக்காட்டுகளுக்கு : $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, & \text{if } x \neq 0 \\ 0, & \text{if } x = 0 \end{cases}$ என்றால்

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட செயல்பாட்டிற்கு, திசை வகைக்கெழு உள்ளது $(1, 0)$ க்கு $(0, 0)$.

அனுமதி $c = (1, 0), u = (0, 0)$

பிறகு
$$\begin{aligned}
f'(c, u) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f[(0, 0) + h(1, 0)] - f(0, 0)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - 0}{h} = 0
\end{aligned}$$

மற்றும் $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{m}{1 + m^2}$ [$x = my^2$ வைப்பதன் மூலம்]

எனவே, $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \frac{m}{1 + m^2}$ *does not exist* [பாதை சார்ந்தது]

இங்கே, திசை வகைக்கெழு உள்ளது, ஆனால் f தொடர்ச்சியாக இல்லை, வரம்பு கூட இல்லை $(0, 0)$

முடிவு : ஒரு சார்பு $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, அதைபோல $f(x) = (f_1, f_2, f_3, \dots, f_m)$ மற்றும் என்றால் $f(x)$ நிலையை திருப்திப்படுத்துகிறது.

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y) \quad (\text{நேரியல் சார்பு } \forall x, y \in \mathbb{R}^n \text{ மற்றும் } \forall \alpha, \beta \text{ அளவுகள்})$$

பின்னர் திசை வகைக்கெழுக்கள் ' f ' க்கு ' c ' திசையில் ' u ' மூலம் வழங்கப்படுகிறது

$$f'(c, u) = f(u)$$

i.e., ' f ' என்றால் நேரியல் வரைபடம், பின்னர் $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c + hu) - f(c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c) + hf(u) - f(c)}{h}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(u)$$

$$\Rightarrow f'(c, u) = f(u)$$

எடுத்துக்காட்டுகளுக்கு : $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ என்க. இங்கே $f(x, y) = (x, -y)$. திசையில் வகைக்கெழு கண்டுபிடிக்கவும் (a, b) திசையில் $(1, 0)$.

தீர்வு : என்பதால் ' f ' நேரியல் சொத்தை திருத்திப்படுத்துகிறது.

$$\therefore f'(c, u) = f(u) \quad \forall c \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{அல்லது} \quad f'(c, u) = f(1, 0) = (1, 0)$$

4.2.1 பகுதி வகைக்கெழுவின மூலம் திசை வகைக்கெழு

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ என்க. $f(x, y)$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட சார்பு என்க, பிறகு $\frac{\partial f}{\partial x}$ மற்றும் $\frac{\partial f}{\partial y}$ என்பது $(1, 0)$

மற்றும் $(0, 1)$ திசையின் திசை வகைக்கெழு ஆகும். அதாவது x - அச்ச மற்றும் y - அச்சின் திசையில் திசை வகைக்கெழு ஆகும்.

$(1, 0)$ - வின் திசையில் $c = (a, b)$ எனும்போது,

$$\text{i.e.,} \quad c = (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{மற்றும்} \quad u = (1, 0)$$

$$\begin{aligned} f'(c, u) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c + hu) - f(c)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c + h(1, 0)) - f(c)}{h} \\ \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{(a, b)} &= f'(c, u) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} \end{aligned}$$

இதைப்போலவே, $(1, 0)$ - வின் திசையில் $c = (a, b)$ எனும்போது $c = (a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{(a, b)} = f'(c, u) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}$$

பொதுவாக, $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ எனில் ஒற்றை சார்பு, பகுதி வகைக்கெழு $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ ' c ' எனும் போது திசை வகைக்கெழு

u_k இங்கே k - அச்சின் அலகு வெக்டர் u_k ஆகும்.

அதாவது, $u_k = [0, 0, \dots, 1, 0, 0, \dots]$ K - யின் இடம்

அதாவது, $f'(c, u_k)$ u_k திசையில் ' f ' பகுதி வகைக்கெழு ஆகும்.

$$\text{அதாவது,} \quad f'(c, u_k) = \frac{\partial f}{\partial x_k} \text{ at } c.$$

குறிப்புகள் : அனைத்து திசைகளிலும் திசை வகைகெழுக்கள் இருப்பது பகுதி வகைகெழுக்களின் இருப்பை தெளிவாகக் குறிக்கிறது. இருப்பினும், உரையாடல் உண்மை இல்லை, அதாவது, பகுதி வகைகெழுக்களின் இருப்பு அனைத்து திசைகளிலும் திசைவகைகெழுக்களின் இருப்பைக் குறிக்காது.

உதாரணமாக : $f : R^2 \rightarrow R$ என்ற சார்பானது $f(x, y) = \begin{cases} x + y, & \text{if } x = 0 \text{ or } y = 0 \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases}$

எனும் போது இரண்டு முதல் வரிசை பகுதி வகைகெழுக்கள் $(0, 0)$ - ல் உள்ளன. திசைவகைகெழுக்கள் $(0, 0)$ ல் அனைத்து திசைகளிலும் இல்லை.

தீர்வு : $D_1 f(0, 0) = f_x(0, 0)$

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - 0}{h} = 1 \end{aligned}$$

மற்றும் $D_2 f(0, 0) = f_y(0, 0)$

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - 0}{h} = 1 \end{aligned}$$

$u = (u_1, u_2)$, திசையில் $u_1 \neq 0$ and $u_2 \neq 0$, பின்னர்

$$\begin{aligned} D_{y \cdot} f(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(hu_1, hu_2) - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}, \text{ தோன்றாது.} \end{aligned}$$

பயிற்சி வினாக்கள் 4.2

1. $f : R^2 \rightarrow R$ ஆனது $f(x, y) = 3x + 4y + x^2$ என்ற சார்பில் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது என்க.
திசை வகைகெழு 'f', பின்வருவனவற்றிற்கு கண்டுபிடி
 - i. $(0, 0)$ - ல் $(1, 2)$ - ன் திசையில்
 - ii. $(1, -1)$ - ல் $(1, -1)$ - ன் திசையில்
 - iii. $(1, 2)$ - ல் $(1, -3)$ - ன் திசையில்
 - iv. $(1, -1)$ - ல் $(1, 0)$ - ன் திசையில்
 - v. $(1, -1)$ - ல் $(0, 1)$
 - vi. (c_1, c_2) - ல் (u_1, u_2) - ன் திசையில்
2. $f : R^2 \rightarrow R^2$ என்க, மேலும் $f(x, y) = (x, -y)$. (a, b) - ல் $(2, 3)$ - ன் திசையில் 'f' - ன் திசை வகைகெழுவை கண்டுபிடி

$$3. \quad f(x, y) = \begin{cases} x + y, & \text{if } x = 0 \text{ or } y = 0 \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases}$$

' f ' at $(0, 0)$ - ல் $(a, 0)$, $a \neq 0$ - ன் திசையில் ' f ' - ன் திசை வகைக்கெழுவை கண்டுபிடி

$$4. \quad f: R^2 \rightarrow R^2 \text{ என்க, மேலும் } f(x, y) = (7x + x^4, 3x + 4y + y^4), \text{ then find the directional derivative of 'f' at } (0, 0) \text{ - ல் } (a, b). \text{ - ன் திசையில் 'f' - ன் திசை வகைக்கெழுவை கண்டுபிடி}$$

விடைகள்

1. i. 11 ii. 1 iii. - 7 iv. 5 v. 4 vi. $3u_1 + 4u_2 + c_1u_1$
2. $(2, -3)$ 3. a 4. $7a, 3a + 4b$

4.3 பகுதி வகைக்கெழுக்கள்

z என்பது x, y என்ற ஒன்றையொன்று சாராத இரு மாறிகளின் சார்பு எனில், அதாவது, $z = f(x, y)$ எனில், x ஐப் பொறுத்து z வகையீடு செய்ய y யை ஒரு மாறிலி எனக் கருதுவோம். இவற்றை $\frac{\partial z}{\partial x}$ என குறிக்கலாம். இதேபோல் x யை மாறிலியாகக் கருதப்படும்போது, y ஐப் பொறுத்து z வகையீடு காணலாம். இவற்றை $\frac{\partial z}{\partial y}$ என்ற குறியீட்டின் மூலம் குறிக்கலாம். இப்போது,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} [f(x, y)] = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \delta x, y) - f(x, y)}{\delta x}$$

$$\text{மற்றும் } \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [f(x, y)] = \lim_{\delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \delta y) - f(x, y)}{\delta y}$$

மேலும் எல்லை உள்ளது.

இரண்டு மாறிகள் கொண்ட சார்புகளுக்கான பகுதி வகைக்கெழுவை கீழ்க்கண்ட குறியீடுகளின் மூலம் குறிக்கலாம்.

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} [f(x, y)], f_x(x, y)$$

$$\text{மற்றும் } \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} [f(x, y)], f_y(x, y)$$

பொதுவாக, ' u ' என்ற சார்பு ஒன்றையொன்று சாராத $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ என்ற n மாறிகள் கொண்டது எனில், u ன் பகுதி வகைக்கெழு எதேனும் $x_r, r = 1, 2, \dots, n$ என்ற மாறியை பொறுத்து கிடைக்கும்

சமன்பாடு $\frac{\partial u}{\partial x_r}$, x_r ஐப் பொறுத்து மற்ற அனைத்தும் மாறிகளும் ஒன்றை ஒன்று சாராதது, அதாவது ஒரு மாறிலி என கருத.

4.3.1 பகுதி வகைக்கெழுவின உயர் வரிசைகள்

$z = f(x, y)$ எனில், $\frac{\partial z}{\partial x}$ மற்றும் $\frac{\partial z}{\partial y}$ என்ற பகுதி வகைக்கெழுக்கள் x மற்றும் y இரண்டின் சாதாரண சார்பாகும் (இதன் மூலம் ஒன்று அல்லது இரண்டும் ஒரு மாறிலி அல்லது ஒரே ஒரு மாறியை மட்டும் சார்ந்தது எனக் கருத) இவற்றிற்கு பகுதி வகைக்கெழுக்கள் x மற்றும் y பொறுத்து கிடைக்கும். இந்த பகுதி வகைக்கெழுக்கள் z ன் இரண்டாம் வரிசை உடைய பகுதி வகைக்கெழுக்கள் இந்த வகைக்கெழுக்கள் பொதுவாக கீழ்க்கண்ட குறியீடுகள் மூலம் குறிக்கலாம்:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = f_{xx};$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy};$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy};$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx};$$

பகுதி வகைக்கெழுவின உயர் வரிசைகள் இதேபோன்றும் வரையறுக்கலாம்.

குறிப்பு : இவற்றை $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ மற்றும் $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ மூலம் குறிக்கும்போது பொதுவாக சமமாக இல்லை என்று குறிக்கப்பட வேண்டும். எனினும் சார்பிற்கு இரண்டாம் வரிசை பகுதி வகைக்கெழு இருக்கும், இதனை $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ இந்தப் பண்பிற்கு பகுதி வகைக்கெழுவின பரிமாற்ற பண்பு என அறியலாம்.

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 4.15 : $u = \log_e (x^2 + y^2)$ எனில், $\frac{\partial u}{\partial x}$ மற்றும் $\frac{\partial u}{\partial y}$ காண்க.

தீர்வு : இங்கு $u = \log_e (x^2 + y^2)$... (1)

சமன்பாடு (i) x -ஐப் பொறுத்து பகுதி வகைக்கெழு காண (y ஒரு மாறிலி எனக் கருத), நாம் பெறுவது

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x^2 + y^2} 2x = \frac{2x}{x^2 + y^2}$$

சமன்பாடு (i) y -ஐப் பொறுத்து பகுதி வகைக்கெழு காண (x ஒரு மாறிலி எனக் கருத), நாம் பெறுவது

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x^2 + y^2} 2y = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.16 : $u = \log_e \left(\frac{x^2 + y^2}{xy} \right)$ எனில், $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ என்பதை சரிபார்க்கவும்

தீர்வு : இங்கு $u = \log_e \left(\frac{x^2 + y^2}{xy} \right)$

அல்லது $u = \log_e (x^2 + y^2) - \log_e x - \log_e y$... (1)

சமன்பாடு (1) x -ஐப் பொறுத்து பகுதி வகைக்கெழு காண, நாம் பெறுவது

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x}{x^2 + y^2} - \frac{1}{x}$$
 ... (2)

சமன்பாடு (1) y -ஐப் பொறுத்து பகுதி வகைக்கெழு காண, நாம் பெறுவது

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2y - \frac{1}{y} = \frac{2y}{x^2 + y^2} - \frac{1}{y}$$
 ... (3)

சமன்பாடு (2) y -ஐப் பொறுத்து பகுதி வகைக்கெழு காண, நாம் பெறுவது

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2x}{x^2 + y^2} - \frac{1}{x} \right) = 2x \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right) \\ &= \frac{-2x}{(x^2 + y^2)^2} \cdot 2y \end{aligned}$$

அதவாது, $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{-4xy}{(x^2 + y^2)^2}$... (4)

சமன்பாடு (3) x -ஐப் பொறுத்து பகுதி வகைக்கெழு காண, நாம் பெறுவது

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2y}{x^2 + y^2} - \frac{1}{y} \right) = 2y \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right) \\ &= \frac{-2y}{(x^2 + y^2)^2} \cdot 2x \end{aligned}$$

அதவாது, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{-4xy}{(x^2 + y^2)^2}$... (5)

∴ (4) மற்றும் (5)-லிருந்து, நாம் பெறுவது

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \text{ நிரூபிக்கப்பட்டது.}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.17 : $u(x + y) = (x^2 + y^2)$ எனில், $\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = 4 \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு : நீங்கள் முயற்சிக்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.18 : $u = f(y + ax) + \phi(y - ax)$ எனில், $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ என நிரூபிக்க.

தீர்வு : நீங்கள் முயற்சிக்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.19 : $u = \log_e (x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ எனில், $\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 u = \frac{-9}{(x + y + z)^2}$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு : $u = \log_e (x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{(3x^2 - 3xyz)}{(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)} \quad \dots(1)$$

$$\text{மற்றும்} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3y^2 - 3xy}{(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)} \quad \dots(2)$$

$$\text{மற்றும்} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3z^2 - 3xy}{(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)} \quad \dots(3)$$

(1), (2) மற்றும் (3) ஐக் கூட்ட, நாம் பெறுவது

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= \frac{3(x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy)}{(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy)} \\ &= \frac{3}{(x + y + z)} \quad \dots(4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{இப்போது} \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 u &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{3}{(x + y + z)} \right) \\ &= \frac{3}{(x + y + z)^2} - \frac{3}{(x + y + z)^2} - \frac{3}{(x + y + z)^2} \\ &= \frac{-9}{(x + y + z)^2} \text{ நிரூபிக்கப்பட்டது.} \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.20 : $u = \sin^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) + \tan^{-1} \frac{y}{x}$ எனில், $x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு : நீங்கள் முயற்சிக்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.21 : $x^x y^y z^z = \lambda$ எனில், $at\ x = y = z$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -(x \log_e xe)^{-1}$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டது $x^x y^y z^z = \lambda$, இங்கு z is a function of x மற்றும் y .

இருபுறமும் மடக்கை எடுக்க, நாம் பெறுவது

$$x \log x + y \log y + z \log z = \log \lambda \quad \dots(1)$$

சமன்பாடு (1) x -ஐப் பொறுத்து பகுதி வகைக்கெழு காண, நாம் பெறுவது

$$\left[\log x + x \cdot \frac{1}{x} \right] + \left[\log z + z \cdot \frac{1}{z} \right] \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\text{அல்லது} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-(1 + \log x)}{(1 + \log z)} \quad \dots(2)$$

சமன்பாடு (1) y -ஐப் பொறுத்து பகுதி வகைக்கெழு காண, நாம் பெறுவது

$$\left[\log y + y \cdot \frac{1}{y} \right] + \left[\log z + z \cdot \frac{1}{z} \right] \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\text{அல்லது} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-(1 + \log y)}{(1 + \log z)} \quad \dots(3)$$

இப்போது,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[-\frac{(1 + \log x)}{(1 + \log z)} \right] \\ &= -(1 + \log x) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{(1 + \log z)} \right) \\ &= -(1 + \log x) \left[-\frac{1}{(1 + \log z)^2} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \right] \\ &= \frac{1}{z} \frac{(1 + \log x)}{(1 + \log z)^2} \left[-\frac{(1 + \log y)}{(1 + \log z)} \right] \\ &= \frac{-(1 + \log x)(1 + \log y)}{z \cdot (1 + \log z)^3} \end{aligned}$$

[3 லிருந்து]

$\therefore x = y = z$ எனும் போது,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{-(1 + \log x)^2}{x(1 + \log x)^3} = -\frac{1}{x(1 + \log x)} \\ &= -\frac{1}{x[\log_e e + \log_e x]} = -\frac{1}{x \log_e xe} \end{aligned}$$

இப்போது $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} (at \ x = y = z) = [x \log_e x e]^{-1}$ நிரூபிக்கப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு 4.22 : $z = x^4 y^2 \sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \log x - \log y$ எனில், $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 6x^4 y^2 \sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு : $z = x^4 y^2 \sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \log x - \log y$... (1)

சமன்பாடு (1) x -ஐப் பொறுத்து பகுதி வகைக்கெழு காண, நாம் பெறுவது

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= x^4 y^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}} \cdot \frac{1}{y} + 4x^3 y^2 \sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x} \\ x \frac{\partial z}{\partial x} &= x^5 y^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}} + 4x^4 y^2 \sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + 1 \end{aligned} \quad \dots (2)$$

சமன்பாடு (1) y -ஐப் பொறுத்து பகுதி வகைக்கெழு காண, நாம் பெறுவது

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^4 y^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{y^2}}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) + 2x^4 y \sin^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{1}{y}$$

$$\text{அல்லது } y \frac{\partial z}{\partial y} = -x^5 y^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}} + 2x^4 y^2 \sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - 1 \quad \dots (3)$$

(2) மற்றும் (3) ஐக் கூட்ட, நாம் பெறுவது

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 6x^4 y^2 \sin^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) \text{ நிரூபிக்கப்பட்டது.}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.23 : $z = e^{r \cos \theta} \cdot \cos(r \sin \theta)$ எனில், $\frac{\partial z}{\partial r}$ மற்றும் $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ ஐக் காண்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டது. $z = e^{r \cos \theta} \cdot \cos(r \sin \theta)$... (1)

சமன்பாடு (1) r ஐப் பொறுத்து பகுதி வகைக்கெழு காண, நாம் பெறுவது

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial r} &= e^{r \cos \theta} \left[\{-\sin \theta (r \sin \theta) \sin \theta\} + \{\cos(r \sin \theta) \cdot \cos \theta\} \right] \\ &= e^{r \cos \theta} \cdot \cos(r \sin \theta + \theta) \end{aligned} \quad \dots (2)$$

சமன்பாடு (1) θ -ஐப் பொறுத்து பகுதி வகைக்கெழு காண, நாம் பெறுவது

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial \theta} &= e^{r \cos \theta} [-\sin \theta (r \sin \theta) r \cos \theta] + [-r \sin \theta e^{r \cos \theta}] \cdot \cos (r \sin \theta) \\ &= -r e^{r \cos \theta} [\sin (r \sin \theta) \cos \theta + \sin \theta \cos (r \sin \theta)] \\ &= -r e^{r \cos \theta} [\sin (r \sin \theta + \theta)] \text{ விடை.}\end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.24 : $u = f(r)$ எனில், இங்கு $r^2 = x^2 + y^2$ எனும் போது,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) \text{ எனக் காட்டுக.}$$

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டது $r^2 = x^2 + y^2$... (1)

சமன்பாடு (1) x -ஐப் பொறுத்து பகுதி வகைக்கெழு காண, நாம் பெறுவது

$$2r \frac{\partial r}{\partial x} = 2x \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \quad \dots (2)$$

இதேபோல் $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \quad \dots (3)$

இப்போது கொடுக்கப்பட்டது $u = f(r)$

$\therefore \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = f'(r) \cdot \frac{x}{r} \quad [(2) \text{ லிருந்து}]$

சமன்பாடு (2)-ஐ இருபுறமும் x ஐப் பொறுத்து பகுதி வகைக்கெழு காண, நாம் பெறுவது

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(f'(r) \cdot \frac{x}{r} \right) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{r \left[f'(r) \cdot 1 + x \cdot f''(r) \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \right] - x f'(r) \cdot \frac{\partial r}{\partial x}}{r^2}\end{aligned}$$

[(2) லிருந்து] $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{r^2} \left[r f'(r) + x^2 f''(r) - \frac{x^2}{r} f'(r) \right] \quad \dots (4)$

இதேபோல், $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{r^2} \left[r f'(r) + y^2 f''(r) - \frac{y^2}{r} f'(r) \right] \quad \dots (5)$

(4) மற்றும் (5) ஐக் கூட்ட, நாம் பெறுவது

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{1}{r^2} \left[2r f'(r) + (x^2 + y^2) f''(r) - \frac{(x^2 + y^2)}{r} f'(r) \right] \\ &= \frac{1}{r^2} \left[2r f'(r) + r^2 f''(r) - \frac{r^2}{r} f'(r) \right] \quad [(1) \text{ லிருந்து}]\end{aligned}$$

அல்லது $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(r) + \frac{1}{r} f'(r)$ நிரூபிக்கப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு 4.25 : $\frac{x^2}{a^2 + u} + \frac{y^2}{b^2 + u} + \frac{z^2}{c^2 + u} = 1$ எனில்,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = 2 \left[x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} \right] \text{ என நிரூபிக்க.}$$

தீர்வு : நீங்கள் முயற்சிக்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.26 : $\theta = t^n e^{-r^2/4t}$ எனில், 'n'-ன் என்ன மதிப்புக்கு, $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial t}$ என கிடைக்கும்.

தீர்வு : நீங்கள் முயற்சிக்கவும். விடை : $= \frac{-3}{2}$

எடுத்துக்காட்டு 4.27 : $u = x^y$ எனில், $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial x}$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு : நீங்கள் முயற்சிக்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.28 : $u = e^{xyz}$ எனில், $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = (1 + 3xyz + x^2 y^2 z^2) e^{xyz}$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு : இங்கு $u = e^{xyz}$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial z} = xye^{xyz} \quad \dots(1)$$

சமன்பாடு (1) y-ஐப் பொறுத்து பகுதி வகைக்கெழு காண, நாம் பெறுவது

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) = x \frac{\partial}{\partial y} (ye^{xyz}) \\ &= x [y.z.x.e^{xyz} + e^{xyz}] \\ &= e^{xyz} [x^2 yz + x] \end{aligned} \quad \dots(2)$$

சமன்பாடு (2) x-ஐப் பொறுத்து பகுதி வகைக்கெழு காண, நாம் பெறுவது

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} [e^{xyz} + (x^2 yz + x)] \\ &= e^{xyz} (2xyz + 1) + yze^{xyz} (x^2 yz + x) \\ &= e^{xyz} (1 + 2xyz + x^2 y^2 z^2 + xyz) \\ &= e^{xyz} (1 + 3xyz + x^2 y^2 z^2) \text{ நிரூபிக்கப்பட்டது.} \end{aligned}$$

பயிற்சி 4.3

- கீழ்க்கண்டவற்றிற்கு $\frac{\partial u}{\partial x}$ மற்றும் $\frac{\partial u}{\partial y}$ ஐக் காண்க
 - $u = x \sin y + y \sin x$
 - $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
 - $u = x^y$
 - $u = \sin^{-1} \frac{x}{y}$
- $u = x^2 \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) - y^2 \tan^{-1} \left(\frac{x}{y} \right)$ எனில், $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ என நிரூபிக்க.
- $u = f \left(\frac{x}{y} \right)$ எனில், $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ என நிரூபிக்க.
- $u = \sin^{-1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$ எனில், $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x} \frac{\partial u}{\partial y}$ எனக் காட்டுக.
- $u = e^x (x \cos y - y \sin y)$ எனில், $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ எனக் காட்டுக.
- $u = \tan^{-1} \left(\frac{xy}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \right)$ எனில், $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$ என நிரூபிக்க.
- $u = (1-2xy+y^2)^{-1/2}$ எனில், $\frac{\partial}{\partial x} \left\{ (1-x^2) \frac{\partial u}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ y^2 \frac{\partial u}{\partial y} \right\} = 0$ என நிரூபிக்க.
- $\begin{cases} x = \sqrt{a} (\sin u + \cos v) \\ y = \sqrt{a} (\cos u - \sin v) \\ z = 1 + \sin(u+v) \end{cases}$ எனில், இங்கு p மற்றும் q $\frac{\partial z}{\partial x}$ மற்றும் $\frac{\partial z}{\partial y}$ ஐப் பொறுத்து p மற்றும் q காண்க. **குறிப்பு :** $z = \frac{1}{2a} (x^2 + y^2)$
- $f(u) = \sin u$ மற்றும் $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ எனில், $\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 = \cos^2 u$ எனக் காட்டுக..
- $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y}} e^{\frac{(x-a)^2}{4y}}$ எனில், $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$ என நிரூபிக்க..
- $v = \log(x^2 + y^2) + \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$ எனில், $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ எனக் காட்டுக..
- $v = e^{xyz} + \left(\frac{xz}{y} \right)$ எனில், $x \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial y} + 2xyz$, $y \frac{\partial v}{\partial y} + z \frac{\partial v}{\partial z} = 2xyzv$ என நிரூபிக்க.

13. $u = x\phi\left(\frac{y}{x}\right) + \phi\left(\frac{y}{x}\right)$ எனில்,

i. $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = x\phi\left(\frac{y}{x}\right)$. ii. $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ எனக் காட்டுக.

14. $v = x^2 \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - y^2 \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ எனில், இங்கு ' v ' is a function of ' x ' மற்றும் y . $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$ என நிரூபிக்க,

விடைகள்

1. i. $\sin y + y \cos x; x \cos y + \sin x$

ii. $\frac{-x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}; \frac{-y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$

iii. $x^y \cdot \frac{y}{x}; x^y \log x$

iv. $\frac{-1}{\sqrt{y^2 - x^2}}; \frac{x}{y\sqrt{y^2 - x^2}}$

8. $p = \frac{x}{a}$ மற்றும் $q = \frac{y}{a}$.

4.4 ஒருபடித்தான சார்புகள்

$f(x, y)$ என்ற சார்பு ஒருபடித்தான சார்பு எனில் இவற்றின் படி அல்லது வரிசை n எனில், x மற்றும் y -யைக் கொண்ட ஒவ்வொரு உறுப்பின் படியும் n ற்க்கு சமமாக இருக்கும்.

இப்போது இந்த விரிவாக்கம் $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \dots + a_n y^n$ படி n -யைக் கொண்ட ஒருபடித்தான சார்பு ஆகும். இந்த விரிவாக்கத்தை $x^n \left[a_0 + a_1 \left(\frac{y}{x}\right) + a_2 \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \dots + a_n \left(\frac{y}{x}\right)^n \right]$ இதைப் போன்றும் எழுதலாம். இதனை $x^n f\left(\frac{y}{x}\right)$ என்ற குறியீட்டின் மூலம் குறிக்கலாம்.

எனவே, அதன் எல்லைக்குள் ஆழ்நிலை செயல்பாடுகளைக் கொண்டுவருவதற்காக, ஒரேவிதமான கருத்தை விரிவுபடுத்துவதற்கு, நாம் ஒரே மாதிரியான செயல்பாட்டை பின்வருமாறு வரையறுக்கிறோம்.

இரண்டு மாறிகள் ஒரு செயல்பாடு பட்டம் ஒரு ஒத்த செயல்பாடு x, y என்று கூறப்படுகிறது மற்றும் எனில் அது f அல்லது m வெளிப்படுத்த முடியும் $x^n f\left(\frac{y}{x}\right)$.

இப்போது, f அல்லது எடுத்துக்காட்டு, $ax^2 + by^2 + 2hxy$, i.e., $x^2 \left[a + 2h\left(\frac{y}{x}\right) + b\left(\frac{y}{x}\right)^2 \right]$ வரிசை 2 உடைய ஒருபடித்தான சார்பு.

4.4.1 யூலரின் தேற்றம்

கூற்று : u என்பது x மற்றும் y -யை உடைய ஒருபடித்தான சார்பு இவற்றின் படி n எனில்

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = nu$$

நிரூபணம் : u என்பது x மற்றும் y -யை உடைய ஒருபடித்தான சார்பாகும். ஆகவே இதை $u = x^n f\left(\frac{y}{x}\right)$ இவ்வாறு எழுதலாம்.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= nx^{n-1} f\left(\frac{y}{x}\right) + x^n f'\left(\frac{y}{x}\right) \left(\frac{-y}{x^2}\right) \\ &= nx^{n-1} f\left(\frac{y}{x}\right) - yx^{n-2} f'\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned} \quad \dots(1)$$

மற்றும்

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= x^n f'\left(\frac{y}{x}\right) \left(\frac{1}{x}\right) \\ &= x^{n-1} f'\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned} \quad \dots(2)$$

(1) மற்றும் (2)-ஐ x மற்றும் y ஆல் பெருக்கி மற்றும் கூட்ட, நமக்கு கிடைப்பது

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = nx^n f\left(\frac{y}{x}\right) = nu \quad \dots(3)$$

தேற்றம் முடிவடைந்தது.

இத்தேற்றத்தை எத்தனை மாறிகளுக்கு வேண்டுமானாலும் ஒருபடித்தான சார்பின் கீழ் பொதுமைப்படுத்தும்போது, இப்போது, $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ எனில் $x_1, x_2, \dots, x_m$,

$$x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} + \dots + x_m \frac{\partial u}{\partial x_m} = nu$$

கழித்தல் I : u என்பது n படி உள்ள x மற்றும் y -யை உடைய ஒருபடித்தான சார்பு எனில் மற்றும் $u = f(v)$

$$x \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial y} = n \frac{f(v)}{f'(v)}, \text{ மற்றும்}$$

$$\text{கழித்தல் II : } x^2 \frac{\partial v}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = g(v)[g'(v)-1] \text{ இங்கு } g(v) = n \frac{f(v)}{f'(v)}.$$

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 4.29 : $u = \sin^{-1} \left(\frac{x+y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right)$ எனில், $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \tan u$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு : இங்கு $u = \sin^{-1} \left(\frac{x+y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right)$

$$\therefore \sin u = \left(\frac{x+y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right) = f(x, y) \text{ (say)} = \sqrt{x} \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 + \sqrt{\frac{y}{x}}}$$

$\Rightarrow \sin u$ வரிசை $\frac{1}{2}$ உடைய ஒருபடித்தான சார்பு

$$x \frac{\partial}{\partial x} (\sin u) + y \frac{\partial}{\partial y} (\sin u) = \frac{1}{2} \sin u$$

அல்லது $x \cos u \frac{\partial u}{\partial x} + y \cos u \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \sin u$

அல்லது $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\sin u}{\cos u} = \frac{1}{2} \tan u$. நிரூபிக்கப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு 4.30 : $u = \sin^{-1} \left(\frac{x}{y} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$ எனில், $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ என நிரூபிக்க.

தீர்வு : Take $u_1 = \sin^{-1} \left(\frac{x}{y} \right)$ மற்றும் $u_2 = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$

எடுத்துக்காட்டு 4.31 : $v = \log_e \left(\frac{x^4 + y^4}{x + y} \right)$ எனில், $x \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial y} = 3$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டது $v = \log_e \left(\frac{x^4 + y^4}{x + y} \right)$

$$x^4 + y^4 \cdot z = e^v = \frac{x^4 + y^4}{x + y} + \frac{x^4 \left(1 + \frac{y^4}{x^4} \right)}{x \left(1 + \frac{y}{x} \right)}$$

$x^3 \phi \left(\frac{y}{x} \right), \Rightarrow z$ வரிசை 3 உடைய ஒருபடித்தான சார்பு.

எடுத்துக்காட்டு 4.32 : $u = \sin^{-1} \left(\frac{x + 2y + 3z}{\sqrt{x^8 + y^8 + z^8}} \right)$ எனில், $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = -3 \tan u$ எனக் காட்டுக..

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டது, $u = \sin^{-1} \left(\frac{x + 2y + 3z}{\sqrt{x^8 + y^8 + z^8}} \right)$

$$\therefore \sin u = \frac{x + 2y + 3z}{\sqrt{x^8 + y^8 + z^8}}$$

இங்கு $\sin u$ is வரிசை - 3 உடைய ஒருபடித்தான சார்பு ($1 - 4 = -3$)

$$x \frac{\partial}{\partial x}(\sin u) + y \frac{\partial}{\partial y}(\sin u) + z \frac{\partial}{\partial z}(\sin u) = -3 \sin u$$

$$\Rightarrow x \cos u \frac{\partial u}{\partial x} + y \cos u \frac{\partial u}{\partial y} + z \cos u \frac{\partial u}{\partial z} = -3 \sin u$$

அல்லது $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = -3 \frac{\sin u}{\cos u} = -3 \tan u$

அல்லது $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} + 3 \tan u = 0$ நிரூபிக்கப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு 4.33 : $v = \tan^{-1} \left(\frac{x^3 + y^3}{x - y} \right)$ எனில்,

i. $x \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial y} = \sin 2v$ ii. $x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 2 \cos 3v \sin v$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு : இங்கு v ஒருபடித்தான சார்பு அல்ல

But $z = \tan v = \frac{x^3 + y^3}{x - y} = \frac{x^3 \left(1 + \frac{y^3}{x^3}\right)}{x \left(1 - \frac{y}{x}\right)} = f(x) \text{ (say)} = x^2 \phi\left(\frac{y}{x}\right)$

$$x \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial y} = n \frac{f(v)}{f'(v)} = 2 \frac{\tan v}{\sec^2 v} = \frac{2 \sin v \cos^2 v}{\cos v}$$

$$= 2 \sin v \cos v = \sin 2v$$

$$x^2 \frac{\partial v}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = g(v) [g'(v) - 1]$$

இங்கு

$$x^2 \frac{\partial v}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \sin 2v (2 \cos 2v - 1)$$

$$= 2 \sin 2v \cos 2v - \sin 2v$$

$$= \sin 4v - \sin 2v \quad \left[\because \sin A - \sin B = 2 \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \sin \left(\frac{A-B}{2} \right) \right]$$

$$= 2 \sin v \cos 3v \quad \text{நிரூபிக்கப்பட்டது.}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.34 : $u = \sin^{-1} \left(\frac{x^3 + y^3 + z^3}{ax + by + cz} \right)$ எனில், $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 2 \tan u$ என நிரூபிக்க.

தீர்வு : குறிப்பு : $\sin u = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{ax + by + cz} = f(x, y)$ (say)

இங்கு $\sin u$ வரிசை $3 - 1 = 2$ உடைய ஒருபடித்தான சார்பு

எடுத்துக்காட்டு 4.35 : $u = x \sin^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$ எனில், $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ என நிரூபிக்க.

தீர்வு : நீங்கள் முயற்சிக்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.36 : $v = \sec^{-1} \left(\frac{x^3 - y^3}{x + y} \right)$ எனில், $x \frac{\partial v}{\partial x} + y \frac{\partial v}{\partial y} = 2 \cot v$ என நிரூபிக்க, *also evaluate*

$$x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

தீர்வு : குறிப்பு : $\sec v = \left(\frac{x^3 + y^3}{x + y} \right) = f(x, y)$

எடுத்துக்காட்டு 4.37 : $u = \sin^{-1} \left[\frac{x^{1/3} + y^{1/3}}{x^{1/2} + y^{1/2}} \right]^{1/2}$ என்றால், $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\tan u}{144} (13 + \tan^2 u)$

என நிரூபிக்கவும் .

தீர்வு : இங்கு, $z = \sin u = \left[\frac{x^{1/3} + y^{1/3}}{x^{1/2} + y^{1/2}} \right]^{1/2}$ ஏனெனில், z என்பது x மற்றும் y -இன் அடுக்கு $-1/2$ இன்

ஒரேவிதமான செயல்பாடாகும். *i.e.*, $n = -1/2$.

இப்போது யூலரின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி நாம் பெறுவது, $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-1}{12} \tan u$, மீண்டும்

அனுமதிக்க $g(u) = \frac{-1}{12} \tan u$, பிறகு யூலரின் இரண்டாம் தள்ளுபடி சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தினால்,

$$\text{நமக்கு கிடைப்பது } x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = g(v) [g'(v) - 1]$$

$$= \frac{-1}{12} \tan u \left[\frac{-1}{12} \sec^2 u - 1 \right]$$

$$= \frac{\tan u}{144} (\tan^2 u + 13)$$

பயிற்சி 4.4

1. VER எனில் *Y Euler's the* அல்லது *emf* அல்லது *the following functions*:

$$i. u = 3x^2yz + 4xy^2z + 5y^4 \quad ii. u = \frac{x(x^3 - y^3)}{x^3 + y^3}$$

$$iii. u = x^2 \log\left(\frac{y}{x}\right) \quad iv. u = \frac{x^{1/4} + y^{1/4}}{x^{1/5} + y^{1/5}}$$

$$v. u = axy + byz + czx$$

2. $u = \frac{x^3y^3}{x^3 + y^3}$ எனில், $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 3u$ எனக் காட்டுக.

3. $v = \log\left(\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}\right)$ எனில், $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 1$ என நிரூபிக்க.

4. $u = x^4y^2 \sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ எனில், *then* காண்க *the value of* $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}$.

5. $u = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\right)$ எனில், $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ எனக் காட்டுக.

6. $u = \tan^{-1}\left(\frac{x^3 + y^3}{x - y}\right)$ எனில், $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u$ என நிரூபிக்க.

7. $u = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2y} + \frac{1}{x^3 + 5y^3}$ எனில், $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + 3u = 0$ என நிரூபிக்க.

8. யூலர் தேற்றத்தை $u = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ என்ற சார்புக்கு நிலைநிறுத்துங்கள்.

விடைகள்

4. $6u$

4.5 மொத்த வேறுபட்ட கூட்டுத்தாபனம்

$u = f(x, y)$ என்றால், எங்கே $x = \phi(t)$ மற்றும் $y = \Psi(t)$, பின்னர் அது u ஒரு ஒற்றை மாறி, எனவே சாதாரண வழித்தோன்றலை $\frac{\partial u}{\partial t}$ நாம் காணலாம். பகுதி வேறுபாட்டைக் குறிப்பது இது t ஐப் பொறுத்து மொத்த வேறுபாடு ' u ' என்று அழைக்கப்படுகிறது.



$f(x, y)$ யில் இப்போது உள்ள பிரச்சனை உண்மையில் உள்ள x மற்றும் y மதிப்புகளை t -க்கு மாற்றாமல்

$\frac{\partial u}{\partial t}$ கண்டுபிடிக்க வேண்டும். நாம் பி ன்வருமாறு தொடரலாம்:

x, y மற்றும் u சிறிய அதிகரிப்புகளைக் குறிக்கும் முறையே $\delta x, \delta y$ மற்றும் $\delta u, t$ உள்ள சிறிய அதிகரிப்புகளைக் குறிக்கும் முறையே δt .

எங்களிடம் உள்ளது

$$x + \delta x = \phi(t + \delta t) \text{ and } y + \delta y = \Psi(t + \delta t)$$

$$\therefore u + \delta u = f(x + \delta x, y + \delta y)$$

பின்னர் வரையறை மூலம்

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta u}{\delta t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{f(x + \delta x, y + \delta y) - f(x, y)}{\delta t} \right] \\ &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{f(x + \delta x, y + \delta y) - f(x, y + \delta y) + f(x, y + \delta y) - f(x, y)}{\delta t} \right] \\ &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{f(x + \delta x, y + \delta y) - f(x, y + \delta y)}{\delta x} \cdot \frac{\delta x}{\delta t} \right] + \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{f(x, y + \delta y) - f(x, y)}{\delta y} \cdot \frac{\delta y}{\delta t} \right] \end{aligned}$$

As $\delta t \rightarrow 0, \delta x \rightarrow 0$ and $\delta y \rightarrow 0$

$$\therefore = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta x}{\delta t} = \frac{dx}{dt}; \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta y}{\delta t} = \frac{dy}{dt};$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{du}{dt} &= \lim_{\delta x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x + \delta x, y + \delta y) - f(x, y + \delta y)}{\delta x} \right] \cdot \left[\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta x}{\delta t} \right] \\ &\quad + \left[\lim_{\delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \delta y) - f(x, y)}{\delta y} \right] \cdot \left[\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta y}{\delta t} \right] \end{aligned}$$

ஆனால் பகுதி வகைக்கெழுக்களின் வரையறை மூலம்

$$\lim_{\delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \delta y) - f(x, y)}{\delta y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\text{மற்றும் } \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \delta x, y + \delta y) - f(x, y + \delta y)}{\delta x} = \frac{\partial f(x, y + \delta y)}{\partial x}$$

இப்போது $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ என்பது y -ன் தொடர்ச்சியான சார்பு என்று கருதினால்,

$$\therefore \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\partial f(x, y + \delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\begin{aligned} \text{எனவே} \quad \frac{du}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \\ \text{i.e.,} \quad \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \end{aligned} \quad \dots(A)$$

மேலே உள்ள முடிவை இரண்டுக்கும் மேற்பட்ட மாறிகளின் செயல்பாட்டிற்கு நீட்டிக்க முடியும், *i.e.*, $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ என்றால் $x_1, x_2, \dots, x_n$ என்பது 't' இன் சார்பு மட்டுமே, பிறகு நாம் அதை நிரூபிக்க முடியும்

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt} \quad \dots(B)$$

கழித்தல். $u = (x, y)$ என்றால் எங்கே $x = \phi(t_1, t_2)$ மற்றும், பின்னர் மேலே உள்ள முடிவிலிருந்து,

$$\begin{aligned} \text{எங்களிடம் உள்ளது} \quad \frac{\partial u}{\partial t_1} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t_1} \\ \text{மற்றும்} \quad \frac{\partial u}{\partial t_2} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t_2} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t_2} \end{aligned}$$

மேலும், கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டிலிருந்து, x, y இன் அடிப்படையில் t_1, t_2 ஐப் பெறலாம்.

$$\text{i.e.,} \quad t_1 = \phi_1(x, y) \text{ and } t_2 = \phi_2(x, y)$$

$$\begin{aligned} \text{பிறகு} \quad \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial t_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t_2} \cdot \frac{\partial t_2}{\partial x} \\ \text{மற்றும்} \quad \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial t_1}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t_2} \cdot \frac{\partial t_2}{\partial y} \end{aligned}$$

இந்த சமன்பாடுகளைப் பயன்படுத்துவதன் மூலம், நாம் ஒரு சுயாதீன மாறிகளின் மற்றொரு அமைப்பை சுயாதீன மாறிகளின் மற்றொரு அமைப்பாக மாற்றலாம்.

மேலே உள்ள முடிவுகளை மீண்டும் மீண்டும் பயன்படுத்துவதன் மூலம் இன் உயர் வரிசை பகுதி வகைக்கெழுக்களைப் பெறலாம்.

4.6 முறையற்ற சார்பின் வேறுபாடு

முந்தைய பிரிவின் முடிவுகள் (A) மறைமுக சார்பு களின் வேறுபட்ட குணகத்தைக் கண்டறியப் பயன்படும்.

$u = f(x, y)$ என்றால் மற்றும் y என்பது x -இன் சார்பு, பின்னர் x -இன் மொத்த u -இன் வேறுபட்ட குணகம் வழங்கப்படுகிறது

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

குறிப்பாக, $u = f(x, y) = c$, இன் படிவத்தின் x மற்றும் y -க்கு இடையில் ஒரு மறைமுகமான உறவு கொடுக்கப்பட்டால், இங்கே c என்பது ஒரு மாறிலி, பிறகு

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

i.e., $0 = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$

அல்லது, $\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y}$

பொதுவாக, $u = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ என்றால் மற்றும் மாறிகள் $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ அனைத்தும் x_1 இன் சார்புகள் பின்னர் முந்தைய பிரிவின் முடிவிலிருந்து (B), நாம் பெறுகிறோம்

$$\frac{du}{dx_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dx_1} + \frac{\partial u}{\partial x_3} \cdot \frac{dx_3}{dx_1} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dx_1}$$

4.6.1 ஒரு முறைகேடான சார்பின் இரண்டாம் ஆணை வழங்கல்

$f(x, y) = c$, என்றால் எங்களிடம் உள்ளது $\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y}$

இப்போது எங்கள் நோக்கம் (x, y) -இன் பகுதி வகைக்கெழுக்களில் $\frac{d^2y}{dx^2}$ ஐக் கண்டுபிடிப்பதாகும்.

இப்போதைக்கு, முறையே இப்போதைக்கு, $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ முறையே p, q, r, s மற்றும் t என்ற

பகுதி வகைக்கெழுக்களைக் குறிப்பிடுவோம்.

இந்த குறியீடுகளைப் பயன்படுத்தி எங்களிடம் உள்ளது

$$\frac{dy}{dx} = -p / q$$

இதை x உடன் வகைப்படுத்தி, நாம் பெறுகிறோம்

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\left(q \frac{dp}{dx} - p \frac{dq}{dx}\right)}{q^2}$$

p மற்றும் q ஆகியவை x மற்றும் y -இன் சார்பு என்பதால்,

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dx} &= \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \\ &= r + s \left(\frac{-p}{q} \right) = \frac{qr - ps}{q} \end{aligned}$$

இதேபோல், $\frac{dq}{dx} = \frac{qs - tp}{q}$

(1) இல் இந்த மதிப்புகளை மாற்றினால், நமக்கு கிடைக்கும்

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{q^2r - 2pq s + p^2s}{q^3}$$

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 4.38 : $u = x^5 y^4$ என்றால், எங்கே $x = t^2$ மற்றும் $y = t^3$, கண்டுபிடிக்க $\frac{du}{dt}$.

தீர்வு : இங்கு u என்பது x மற்றும் y -இன் செயல்பாடாகும், இங்கு x மற்றும் y , t -இன் சார்பு ஆகும். u என்பது ஒற்றை மாறி t -ன் செயல்பாடாகும்.

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \\ &= (5x^4 y^4) \cdot 2t + (4x^5 y^3) \cdot 3t^2 \\ &= 10x^4 y^4 t + 12x^5 y^3 t^2 \\ &= 10t^8 \cdot t^{12} \cdot t + 12 \cdot t^{10} \cdot t^9 \cdot t^2 \\ &= 22t^{21}\end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.39 : $u = f(x - y, y - z, z - x)$ என்றால், $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$ என நிரூபிக்கவும் .

தீர்வு : குறிப்பு : $x - y = X \dots (1)$ $y - z = Y \dots (2)$ $z - x = Z \dots (3)$

$\therefore u = f(X, Y, Z)$, அங்கு X, Y, Z , என்பது x, y, z , இன் சார்பு ஆகும். பிறகு

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial Z} \cdot \frac{\partial Z}{\partial x}$$

இப்போது தேவையான அனைத்து வகைக்கெழுகளையும் கண்டுபிடித்து (4) தேவையான முடிவுகளைப் பெறவும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.40: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ என்றால், பின்னர் அதை $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \left\{ \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \right\}$ நிரூபிக்கவும்.

தீர்வு : $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ என்பதால்

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \dots (1)$$

x -ஐப் பொறுத்து பகுதி வகைபடுத்தி, நாம் பெறுகிறோம்.

$$\begin{aligned}2r \frac{\partial r}{\partial x} &= 2x, \text{ அல்லது } \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \\ \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r} \right) \\ &= \frac{1}{r} - \frac{x}{r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) \\ &= \frac{1}{r} - \frac{x}{r^2} \left(\frac{x}{r} \right) \quad (\text{மேலே இருந்து})\end{aligned}$$

$$\text{அல்லது} \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{r^2 - x^2}{r^3} \quad \dots(2)$$

$$\text{இதேபோல், நாம் காணலாம்} \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \quad \text{மற்றும்} \quad \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{r^2 - y^2}{r^3} \quad \dots(3)$$

(2) மற்றும் (3) சேர்த்து, நாம் பெறுகிறோம்.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} &= \frac{r^2 - x^2}{r^3} + \frac{r^2 - y^2}{r^3} \\ &= \frac{2r^2 - (x^2 + y^2)}{r^3} = \frac{2r^2 - r^2}{r^3} = \frac{1}{r} \end{aligned}$$

இதனால்,

$$\begin{aligned} L.H.S. \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} &= \frac{1}{r} \\ R.H.S. &= \frac{1}{r} \left\{ \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \right\} = \frac{1}{r} \left\{ \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} \right\} \\ &= \frac{1}{r} \left(\frac{x^2 + y^2}{r^2} \right) = \frac{1}{r} \left(\frac{r^2}{r^2} \right) = \frac{1}{r} = L.H.S. \end{aligned} \quad \dots(5)$$

எனவே (4) மற்றும் (5), நாம் பெறுகிறோம்.

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \left\{ \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \right\} \quad \text{நிறூபிக்கப்பட்டது.}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.41 : கண்டுபிடிக்க $\frac{dy}{dx}$ if $e^x + e^y = 2xy$

தீர்வு : நீங்களே முயற்சி செய்யுங்கள்.

$$\text{விடை : } \frac{2y - e^x}{e^y - 2x}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.42 : $f(x, y) = 0, \phi(y, z) = 0$, என்றால். நிறூபிக்க $\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y}$

தீர்வு : $f(x, y) = 0, t$, என்றால், பிறகு

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(\partial f / \partial x)}{(\partial f / \partial y)} \quad \dots(1)$$

$$\text{If } \phi(y, z) = 0, \text{ then } \frac{dz}{dy} = -\frac{(\partial \phi / \partial y)}{(\partial \phi / \partial z)} \quad \dots(2)$$

பெருக்கல் (1) மற்றும் (2), நாம் பெறுகிறோம்

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dz}{dy} = \frac{(\partial f / \partial x) (\partial \phi / \partial y)}{(\partial f / \partial y) (\partial \phi / \partial z)}$$

அல்லது $\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y}$ நிரூபிக்கப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு 4.43 : $u = x \log xy$, என்றால், எங்கே $x^3 + y^3 + 3xy = 1$, கண்டுபிடிக்க $\frac{du}{dx}$.

தீர்வு : நீங்களே முயற்சி செய்யுங்கள்.

விடை : $(1 + \log xy) - \frac{x(x^2 + y)}{y(y^2 + x)}$

எடுத்துக்காட்டு 4.44 : கண்டுபிடிக்க $\frac{dy}{dx}$, எப்பொழுது $\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + y^3 + 1 = 0; x > 0, y > 0$.

தீர்வு : குறிப்பு : $\frac{dy}{dx} = \frac{-\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y}$

விடை : $\frac{-y}{3y^4 + 3y^2x^2 - x}$

எடுத்துக்காட்டு 4.45 : $x + y = 2e^\theta \cos \phi$ மற்றும் $x - y = 2ie^\theta \sin \phi$, என்றால், நிரூபிக்க $\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 4xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

தீர்வு : எங்களிடம் உள்ளது,

$$x + y = 2e^\theta \cos \phi \quad \dots(1)$$

மற்றும் $x - y = 2ie^\theta \sin \phi \quad \dots(2)$

(1) மற்றும் (2) சேர்த்து, நாம் பெறுகிறோம்

$$2x = 2e^\theta (i \sin \phi + \cos \phi)$$

$$x = e^{\theta+i\phi} \quad (\because e^{\theta+i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi) \quad \dots(3)$$

(1) இலிருந்து (2) கழித்தல், நமக்கு கிடைக்கும்

$$2y = 2e^\theta (\cos \phi - \sin \phi) = e^{\theta-i\phi} \quad \dots(4)$$

தெளிவாக, $u = f(x, y)$ மற்றும் x, y ஆகியவை θ மற்றும் ϕ இன் சார்புகள். எனவே u என்பது θ மற்றும் ϕ இன் ஒருங்கிணைந்த செயல்பாடாகும்.

இப்போது, $\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta}$

$$= x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} \quad [\because e^{\theta+i\phi} = x, e^{\theta-i\phi} = y]$$

மற்றும் $\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta}$

அல்லது $= \frac{\partial}{\partial x} \left[x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} \right] x + \frac{\partial}{\partial y} \left[x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} \right] y \quad \dots(5)$

$$\begin{aligned}\text{மீண்டும், } \frac{\partial u}{\partial \phi} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ &= i \left[x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} &= \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\partial u}{\partial \phi} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \phi} \right) \cdot \frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial \phi} \right) \cdot \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ &= i \frac{\partial}{\partial x} \left[x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} \right] (ix) + i \frac{\partial}{\partial y} \left[x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} \right] (-iy) \\ &= -x \frac{\partial}{\partial x} \left[x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} \right] + y \frac{\partial}{\partial y} \left[x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} \right] \\ &= -x \left[\frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] + y \left[x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial y} \right]\end{aligned}$$

$$\text{அல்லது} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = - \left[x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} \right] + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \left[x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad \dots(6)$$

(5) மற்றும் (6) சேர்த்து, நாம் பெறுகிறோம்

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 4xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}. \text{ நிரூபிக்கப்பட்டது.}$$

பயிற்சி 4.5

1. $x^x + y^y = c$, என்றால் $\frac{dy}{dx}$ மதிப்பைக் கண்டறியவும்.
2. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$, என்றால் $\frac{d^2y}{dx^2}$ கண்டுபிடிக்க.
3. $u = e^{mx} (y - z)$, $y = m \sin x$ மற்றும் $z = \cos x$, என்றால் $\frac{du}{dx}$ மதிப்பைக் கண்டறியவும்.
4. $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ மற்றும் $lx + my + nz = 0$, என்றால் $\frac{dy}{dx}$ மற்றும் $\frac{dz}{dx}$ மதிப்பைக் கண்டறியவும்.
5. $f(x, y) = 0$ மற்றும் $\phi(x, y) = 0$ என்றால் $\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$ என நிரூபிக்கவும்
6. $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ என்றால்
 - a. $\left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 = 1$ என நிரூபிக்கவும்
 - b. $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} \right)^2$ என நிரூபிக்கவும்
7. $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ என்றால் $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial r} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial x}{\partial \theta} = r \frac{\partial \theta}{\partial x}$ மற்றும் $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0$ என நிரூபிக்கவும்
8. $z = z(x, y)$, $x = e^u + e^{-v}$, $y = e^{-u} - e^v$, என்றால் $\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} = x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y}$ என நிரூபிக்கவும்
9. $x^4 + y^4 = 4a^2xy$, என்றால் $(a^2x - y^3) \frac{d^2y}{dx^2} = 2a^2xy(3a^4 + x^2y^2)$ என நிரூபிக்கவும்

10. $u = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz = 1$, என்றால் $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = 0$. என நிரூபிக்கவும்

குறிப்பு : $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = 0$.

11. $z = f(x, y)$, என்றால் $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = e^{2u} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right]$ என நிரூபிக்கவும்.

இங்கே $x = e^u \cos v$, $y = e^u \sin v$.

12. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ சமன்பாட்டை துருவ ஒருங்கிணைப்புகளாக மாற்றவும்.

விடைகள்

1. $-\left[\frac{y^x \cdot \log_e y + xy^{x-1}}{x^y \cdot \log_e x + xy^{x-1}}\right]$ 2. $-\frac{[(hx+by)^2 \cdot a - 2(hx+by)(ax+by)h + (ax+hy)^2 b]}{(hx+by)^2}$

3. $e^{mx} (m^2 + 1) \sin x$ 4. $\frac{dy}{dx} = \frac{clz - anx}{bny - cmz}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{amx - bly}{bny - cmz}$

12. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$

4.7 இரண்டு மாறிகளுக்கான டெய்லரின் தேற்றம்

x மற்றும் y ஆகிய இரண்டு தனி மாறிகளில் $f(x, y)$ என்பது சார்பு என்க மற்றும் (x, y) ன் அனைத்து புள்ளிகளிலும் தொடர்ச்சியான பகுதி வகையீடுகள் உள்ளன என்று வைத்துக்கொள்வோம், பின்னர் இரண்டு மாறிகள் இடையே டெய்லரின் தொடர் பின்வருமாறு :

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right) f(x, y) + \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x, y) + \dots + \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x, y) + \dots$$

நிரூபணம் : $f(x+h, y+k)$ என்பது ஒற்றை மாறியின் சார்பு என்று வைத்துக்கொள்ளுங்கள், x என்று சொல்லுங்கள், பிறகு, ஒற்றை மாறி சார்பின், டெய்லரின் தேற்றம் ஆனது

$$f(x+h, y+k) = f(x, y+k) + h \frac{\partial}{\partial x} f(x, y+k) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y+k) + \dots$$

ஒவ்வொன்றையும் விரிவாக்கு,

$$f(x+h, y+k) = \left[f(x, y) + k \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) + \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) + \dots \right] + h \frac{\partial}{\partial x} \left[f(x, y) + k \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) + \dots \right] + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[f(x, y) + k \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) + \dots \right]$$

எனவே, $f(x+h, y+k) = f(x, y) + \left(h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{1}{2!} \left[h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right] + \dots$

இது சில நேரங்களில் குறியீடாக இவ்வாறு எழுதப்படுகிறது,

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right) f(x, y) + \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x, y) + \dots + \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x, y) + \dots$$

$$\text{இங்கு } \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f = h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\text{மற்றும் } \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f = h^n \frac{\partial^n f}{\partial x^n} + nh^{n-1}k \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} h^{n-2}k^2 \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-2} \partial y^2} + \dots + k^n \frac{\partial^n f}{\partial y^n}$$

குறிப்பு : மேற்கண்ட தேற்றத்தை எத்தனையோ சாரா மாறிகள் வரை எளிதாக நீட்டிக்க முடியும்.

மற்றொரு வடிவம் :

$$f(x, y) = f(a, b) + \left[(x-a) \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{(a,b)} + (y-b) \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{(a,b)} \right] + \frac{1}{2!} \left[(x-a)^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{(a,b)} + 2(x-a)(y-b) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{(a,b)} + (y-b)^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{(a,b)} \right] + \dots$$

$a = 0, b = 0$, எனில்

$$f(x, y) = f(0, 0) + \left[x \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{(0,0)} + y \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{(0,0)} \right] + \frac{1}{2!} \left[x^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{(0,0)} + 2xy \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{(0,0)} + y^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{(0,0)} \right] + \dots$$

இது இரண்டு மாறிகளுக்கு மேக்லாரின் தொடர் என்று அழைக்கப்படுகிறது.

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 4.46 : $(1, 1)$ என்ற புள்ளியில் e^{xy} -யை விரிவாக்கு.

தீர்வு : $f(x, y) = e^{xy} \Rightarrow f(1, 1) = e^1 = e$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy} \Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{(1,1)} = e^1 = e$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy} \Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{(1,1)} = e^1 = e$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2 e^{xy} \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{(1,1)} = 1^2 \cdot e^1 = e$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = xye^{xy} + e^{xy} \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{(1,1)} = 1 \cdot 1 \cdot e^1 + e^1 = 2e$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 e^{xy} \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{(1,1)} = 1^2 \cdot e^1 = e$$

இரண்டு மாறிகளின் சார்பிற்கான டெய்லரின் தேற்றத்தால், நாம் பெறுவது,

$$f(x, y) = f(a, b) + \left[(x-a) \frac{\partial}{\partial x} f(a, b) + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} f(a, b) \right] + \frac{1}{2!} \left[(x-a)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (a, b) + 2(x-a)(y-b) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (a, b) + (y-b)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (a, b) \right] + \dots$$

$$\Rightarrow e^{xy} = e[1 + (x-1) + (y-1)] + \frac{1}{2!}[(x-1)^2 + 4(x-1)(y-1) + (y-1)^2]e + \dots$$

எடுத்துக்காட்டு 4.47 : $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ என்ற புள்ளிக்கு அருகில், $e^x \cos y$ யை விரிவாக்கு.

தீர்வு : நீங்களே முயற்சிக்கலாம்

$$\text{விடை : } \frac{e}{\sqrt{2}} + \left[(x-1)\frac{e}{\sqrt{2}} + \left(y - \frac{\pi}{4}\right)\left(-\frac{e}{\sqrt{2}}\right) \right] + \frac{1}{2!} \left[(x-1)^2 \frac{e}{\sqrt{2}} + 2(x-1)\left(y - \frac{\pi}{4}\right)\left(-\frac{e}{\sqrt{2}}\right) + \left(y - \frac{\pi}{4}\right)^2 \left(-\frac{e}{\sqrt{2}}\right) \right] + \dots$$

எடுத்துக்காட்டு 4.48 : $\cos x \cos y$ ன் விரிவாக்கத்தை x மற்றும் y ன் படியில் நான்காம் வரிசை வரை காண்க.

தீர்வு :

$$f(x, y) = \cos x \cos y \Rightarrow f(0, 0) = \cos 0 \cos 0 = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\sin x \cos y \Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(0,0)} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\cos x \sin y \Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(0,0)} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\cos x \cos y \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{(0,0)} = -1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \sin x \sin y \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{(0,0)} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\cos x \cos y \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{(0,0)} = -1$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \sin x \sin y \Rightarrow \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_{(0,0)} = 0$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = -\cos x \sin y \Rightarrow \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\right)_{(0,0)} = 0$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \sin x \cos y \Rightarrow \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\right)_{(0,0)} = 0$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \cos x \sin y \Rightarrow \left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_{(0,0)} = 0$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} = \cos x \cos y \Rightarrow \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_{(0,0)} = 1$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y} = \sin x \sin y \Rightarrow \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}\right)_{(0,0)} = 0$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} = \cos x \cos y \Rightarrow \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_{(0,0)} = 1$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} = -\sin x \sin y \Rightarrow \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} \right)_{(0,0)} = 0$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial y^4} = \cos x \cos y \Rightarrow \left(\frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \right)_{(0,0)} = 1$$

இந்த மதிப்புகளை டெய்லரின் தேற்றத்தில் பிரதியிட, நாம் பெறுவது

$$\begin{aligned} f(x, y) = f(0, 0) &+ \left[x \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + y \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right] + \frac{1}{2!} \left[x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) \right] \\ &+ \frac{1}{3!} \left[x^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0) + 3x^2 y \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0, 0) + 3xy^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0, 0) + y^3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0, 0) \right] + \frac{1}{4!} \\ &\times \left[x^4 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0, 0) + 4x^3 y \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}(0, 0) + 4xy^3 \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3}(0, 0) \right] + 6x^2 y^2 \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}(0, 0) + y^4 \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(0, 0) + \dots \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \cos x \cos y = 1 + 0 + 0 + \frac{1}{2}(-x^2 + 0 - y^2) + \frac{1}{6}(0 + 0 + 0 + 0) + \frac{1}{24}(x^4 + 0 + 6x^2 y^2 + 0 + y^4) + \dots$$

$$\text{அல்லது } \cos x \cos y = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^2 y^2}{4} + \frac{y^4}{24} + \dots$$

எடுத்துக்காட்டு 4.49 : $f(x, y) = \tan^{-1} y/x$ -ன் டெய்லரின் விரிவாக்கத்தை $(1, 1)$ எனும் புள்ளியைப் பொறுத்து, இரண்டாம் வரிசை வரை காண்க. எனவே $f(1.1, 0.9)$ -வைக் கணக்கிடவும்.

தீர்வு : நீங்களே முயச்சிக்கலாம்

விடை : 0.7862

எடுத்துக்காட்டு 4.50 : $f(x, y) = 2x^3 + 2y^3 + 4x^2 y$ ன் இருபடி டெய்லரின் தொடர் விரிவாக்கத்தை $(1, 2)$ எனும் புள்ளியைப் பொறுத்து கண்டறியவும்

தீர்வு : நீங்களே முயச்சிக்கலாம்.

$$\text{விடை : } 10 - 10(x-1) + 20(y-2) - 2(x-1)^2 - 8(x-1)(y-2) + 12(y-2)^2 + 2(x-1)^3 - 4(x-1)^2(y-2) + 2(y-2)^3 + \dots$$

நேரடி விரிவாக்கம் மூலமும் சரிபார்க்க முடியும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.51 : $\frac{(x+h)(y+k)}{(x+h+y+k)}$ ன் விரிவாக்கத்தை h மற்றும் k ன் படியில் இரண்டாம் வரிசை வரை காண்க.

தீர்வு : நீங்களே முயச்சிக்கலாம்.

$$\text{விடை : } \frac{xy}{(x+y)} + \frac{hy^2}{(x+y)^2} + \frac{kx^2}{(x+y)^2} - \frac{h^2 y^2}{(x+y)^3} + \frac{2hkxy}{(x+y)^3} - \frac{k^2 y^2}{(x+y)^3} + \dots$$

எடுத்துக்காட்டு 4.52 : $f(x, y) = x^2 y + 3y - 2$ ன் விரிவாக்கத்தை $(x-1)$ மற்றும் $(y+2)$ ன் படியில் காண்க.

தீர்வு : டெய்லரின் தேற்றத்தால் நாம் பெறுவது,

$$\begin{aligned} f(x, y) = f(a, b) &+ \left[(x-a) \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + (y-b) \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \right] + \frac{1}{2!} \left[(x-a)^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) + 2(x-a)(y-b) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) + (y-b)^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \right] + \dots \\ &\dots(1) \end{aligned}$$

இங்கு, $a + h = x$ மற்றும் $h = x - 1$ ஆதலால் $a = 1$ மற்றும் $b + k = y$ மற்றும் $k = y + 2$ ஆதலால் $b = -2$.

$$f(x, y) = x^2 y + 3y - 2 \Rightarrow f(1, -2) = -10$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{(1, -2)} = -4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3 \Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{(1, -2)} = 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{(1, -2)} = -4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{(1, -2)} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{(1, -2)} = 0$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right)_{(1, -2)} = 0$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = 2 \Rightarrow \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \right)_{(1, -2)} = 2$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \right)_{(1, -2)} = 0$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \right)_{(1, -2)} = 0$$

இந்த மதிப்புகளை (1) பிரதியிட, நாம் பெறுவது

$$x^2 y + 3y - 2 = (-10) + [(x-1)(-4) + (y+2).4] + \frac{1}{2!} [(x-1)^2(-4) + 2(x-1)(y+2).2 + (y+2)^2.0] + \frac{1}{3!} [(x-1)^3.0 + 3(x-1)^2(y+2).2 + 0 + 0]$$

$$\text{அல்லது } x^2 y + 3y - 2 = -10 - 4(x-1) + 4(y+2) - 2(x-1)^2 + 2(x-1)(y+2) + (x-1)^2(y+2).$$

எடுத்துக்காட்டு 4.53 : x^y ன் விரிவாக்கத்தை $(x-1)$ மற்றும் $(y-1)$ ன் படியில் இரண்டாம் வரிசை வரை காண்க.

தீர்வு : நாம் பெறுவது $f(x, y) = x^y$

$$\text{இங்கு, } a+h=x, \text{ மற்றும் } h=x-1 \Rightarrow a=1$$

$$\text{மற்றும் } b+k=y, \text{ மற்றும் } y=k-1 \Rightarrow b=1$$

$$\text{மேலும் } f(1,1)=1$$

(1) யை, x ஐ பொறுத்து வகையிட

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1} \Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{(1,1)} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2} \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{(1,1)} = 0$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = y(y-1)(y-2)x^{y-3} \Rightarrow \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right)_{(1,1)} = 0$$

மீண்டும்

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \log x \Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{(1,1)} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^y (\log x)^2 \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{(1,1)} = 0$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = x^y (\log x)^3 \Rightarrow \left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \right)_{(1,1)} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = x^y \frac{1}{x} + yx^{y-1} \log x = x^{y-1} + yx^{y-1} \log x \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{x=1, y=1} = 1$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = (y-1)x^{y-2} + y(y-1)x^{y-2} \log x + yx^{y-2} \Rightarrow \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \right)_{(1,1)} = 1$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = yx^{y-1} (\log x)^2 + 2x^{y-1} \log x \Rightarrow \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \right)_{(1,1)} = 0$$

இப்போது டெய்லரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தினால், நாம் பெறுவது

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) &= f(a, b) + \left(h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{1}{2!} \left[h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right] \\ &+ \frac{1}{3!} \left[h^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3h^2 k \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + 3hk^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + k^3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \right] + \dots \end{aligned}$$

$$f(x, y) = x^y = 1 + (x-1) + 0 + \frac{1}{2!} (0 + 2(x-1)(y-1) + 0)$$

∴

$$+ \frac{1}{3!} [0 + 3(x-1)^2(y-1) + 0 + 0] + \dots$$

⇒

$$x^y = 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + \frac{1}{2} (x-1)^2 (y-1).$$

எடுத்துக்காட்டு 4.54 : $e^x \sin y$ ன் விரிவாக்கத்தை x மற்றும் y ன் படியில் இரண்டாம் வரிசை வரை காண்க.

தீர்வு : $f(x, y) = e^x \sin y$ என்க .

X மற்றும் y இன் படிசகளில் டெய்லரின் தொடர்.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(0, 0) + xf_x(0, 0) + yf_y(0, 0) + \frac{x^2}{2!} f_{xx}(0, 0) + \frac{y^2}{2!} f_{yy}(0, 0) + \frac{2xy}{2!} f_{xy}(0, 0) + \\ &+ \frac{x^3}{3!} f_{xxx}(0, 0) + \frac{y^3}{3!} f_{yyy}(0, 0) + \frac{3x^2y}{3!} f_{xxy}(0, 0) + \frac{3xy^2}{3!} f_{xyy}(0, 0) + \dots \end{aligned} \quad \dots (A)$$

$$\begin{aligned}
 \text{இப்போது, } f(x, y) &= e^x \sin y & \therefore f(0, 0) &= 0 \\
 f_x(x, y) &= e^x \sin y & \therefore f_x(0, 0) &= 0 \\
 f_y(x, y) &= e^x \cos y & \therefore f_y(0, 0) &= 1 \\
 f_{xx}(x, y) &= e^x \sin y & \therefore f_{xx}(0, 0) &= 0 \\
 f_{xy}(x, y) &= e^x \cos y & \therefore f_{xy}(0, 0) &= 1 \\
 f_{yy}(x, y) &= -e^x \sin y & \therefore f_{yy}(0, 0) &= 0 \\
 f_{xxx}(x, y) &= e^x \sin y & \therefore f_{xxx}(0, 0) &= 0 \\
 f_{xxy}(x, y) &= e^x \cos y & \therefore f_{xxy}(0, 0) &= 1 \\
 f_{xyy}(x, y) &= e^x \sin y & \therefore f_{xyy}(0, 0) &= 0 \\
 f_{yyy}(x, y) &= -e^x \cos y & \therefore f_{yyy}(0, 0) &= -1
 \end{aligned}$$

இந்த மதிப்புகள் அனைத்தையும் சமன்பாட்டில் (A) ல் பிரதியிட, நாம் பெறுவது

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= e^x \sin y = 0 + x(0) + y(1) + \frac{x^2}{2!}(0) + xy(1) + \frac{y^2}{2!}(0) \\
 &+ \frac{x^3}{3!}(0) + \frac{3x^2y}{3!}(1) + \frac{3xy^2}{3!}(0) + \frac{x^3}{3!}(-1) + \dots
 \end{aligned}$$

எனவே $e^x \sin y = y + xy + \frac{x^2y}{2} - \frac{y^3}{6} + \dots$

எடுத்துக்காட்டு 4.55 : $f(x, y) = \tan^{-1}(xy)$ எனில், பின் $f(0.9, -1.2)$ ன் தோராயமான மதிப்பைக் கணக்கிடு.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டுள்ளது $f(x, y) = \tan^{-1}(xy) \quad \therefore f(1, -1) = \frac{-\pi}{4} \quad \dots(i)$

புள்ளி $(1, -1)$ க்கு அருகில் $f(x, y)$ ஐ விரிவுபடுத்துவோம்.

$$\begin{aligned}
 f(0.9, -1.2) &= f(1 - 0.1, -1 - 0.2) \\
 &= f(1, -1) + [(0.1)f_x(1, -1) + (-0.2)f_y(1, -1)] \\
 &+ \frac{1}{2!}[(-0.1)^2 f_{xx}(1, -1) + (-0.2)^2 f_{yy}(1, -1)] \\
 &+ 2(-0.1)(-0.2)f_{xy}(1, -1) + \dots \quad \dots(A)
 \end{aligned}$$

சமன்பாடு (i) லிருந்து

$$f_x(x, y) = \frac{y}{1+x^2y^2} \quad \therefore f_x(1, -1) = \frac{-1}{2} \quad \dots(ii)$$

$$f_y(x, y) = \frac{x}{1+x^2y^2} \quad \therefore f_y(1, -1) = \frac{1}{2} \quad \dots(iii)$$

$$f_{xx}(x, y) = \frac{-2xy^3}{(1+x^2y^2)^2} \quad \therefore f_{xx}(1, -1) = \frac{1}{2} \quad \dots(iv)$$

$$f_{yy}(x, y) = \frac{-2x^3y}{(1+x^2y^2)^2} \quad \therefore f_{yy}(1, -1) = \frac{1}{2} \quad \dots(v)$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{1 - x^2 y^2}{(1 + x^2 y^2)^2} \quad \therefore f_{xy}(1, -1) = 0 \quad \dots (vi)$$

இந்த மதிப்புகள் அனைத்தையும் சமன்பாட்டில் (A) ல் பிரதியிட, நாம் பெறுவது

$$\begin{aligned} f(0.9, -1.2) &= \frac{-\pi}{4} + (-0.1) \left(-\frac{1}{2} \right) + (-0.2) \left(\frac{1}{2} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left[(-0.1)^2 \left(\frac{1}{2} \right) + 2(-0.1)(-0.2)(0) + (-0.2)^2 \left(\frac{1}{2} \right) \right] + \dots \quad \left[\therefore \frac{\pi}{4} = 0.785 \right] \\ &= -\frac{\pi}{4} + 0.05 - 0.1 + \frac{1}{2} [0.005 + 0.04] \\ &= -\frac{\pi}{4} + 0.05 - 0.1 + 0.0225 \\ &= -0.8125 \text{ விடை.} \end{aligned}$$

4.8 ஜாகோபியன்ஸ்

அறிமுகம்

பல மாறிகளின் சார்பின் ஆய்வில், அவற்றின் வகையீட்களின் ஒரு சிறப்பு சார்பை அறியலாம்.

இதை கொடுக்கப்பட்ட சார்புகளின் அணிக்கோவை எனலாம். சார்புகளின் அணிக்கோவையை முதலில் ஆய்வு செய்தது, ஜெர்மன் கணிதவியலாளர் கார்ல் குஸ்டாவ் ஜேக்கபி (1804 - 1851). எனவே, இந்த சார்புகளின் அணிக்கோவை ஜாகோபியன்ஸ் என அழைக்கப்படுகின்றன. இந்த தலைப்பில் நாம் இந்த அணிக்கோவை மற்றும் அவற்றின் பண்புகளைக் கையாள்வோம். ஒரு ஜாகோபியனின் முக்கியமான பயன்பாடு பல ஒருங்கிணைப்புகளின் மாறிகள் மாற்றத்துடன் தொடர்புடையது.

வரையறை : $u_1, u_2, \dots, u_n$ ஆகியவை n சாரா மாறிகளின் $x_1, x_2, \dots, x_n$, சார்புகள் எனில்

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

இது $x_1, x_2, \dots, x_n$ ஐப் பொறுத்து $u_1, u_2, \dots, u_n$ ன் ஜாகோபியன்ஸ் என

அழைக்கப்படுகின்றன. மற்றும் $\frac{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}$ எனும் குறியீட்டால் குறிக்கப்படுகிறது மற்றும் $J(u_1, u_2, \dots, u_n)$

எனும் குறியீட்டாலும் குறிக்கப்படுகிறது. அல்லது எளிமையாக J எனும் குறியீட்டாலும் குறிக்கலாம்.

4.8.1 ஜாகோபியனின் பண்புகள்

1. $J_1 = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ மற்றும் $J_2 = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ எனில், பின் $J_1 \cdot J_2 = 1$.
2. u, v ஆகியவை s, t இன் சார்புகள் மற்றும், s, t என்பது x, y , இன் சார்புகள் எனில்,
பின் $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} \times \frac{\partial(s, t)}{\partial(x, y)}$

ஒரு சிறப்பு வடிவம்

$x_1, x_2, \dots, x_n$ ஆகிய மாறிகளின் சார்புகள் $u_1, u_2, \dots, u_n$ ஆனது $u_1 = f_1(x_1); u_2 = f_2(x_1, x_2); \dots, u_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ எனும் தொடர்பால் வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$\text{பின், } \frac{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \end{vmatrix} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \dots \frac{\partial u_n}{\partial x_n}$$

அதாவது ஜாகோபியன்ஸ், அணிக்கோவைகளின் முன்னணி மூலைவிட்ட உறுப்புகளின் பெருக்கலைக் குறைக்கிறது.

3. u, v என்பது x, y, z என்ற மூன்று சாரா மாறிகளின் சார்புகள் கள்மற்றும் சார்புகளுடன் தொடர்புடையது, எனில் $\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = 0$

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 4.56 : $u = x + 2y + z, v = x - 2y + 3z$ மற்றும் $w = 2xy - xz + 4yz - 2z^2$, எனில், இவைகள் ஒன்றுக்கொன்று தொடர்புடையவை என நிரூபி. u, v மற்றும் w க்கு இடையேயான தொடர்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = 0 \text{ எனில் } u, v \text{ மற்றும் } w \text{ ஆகியவை ஒன்றுக்கொன்று தொடர்புடையவை.} \quad \dots(1)$$

$$\text{இப்போது } \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} \quad \dots(2)$$

$$\text{இங்கு } \frac{\partial u}{\partial x} = 1, \frac{\partial u}{\partial y} = 2, \frac{\partial u}{\partial z} = 1 \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 1, \frac{\partial v}{\partial y} = -2, \frac{\partial v}{\partial z} = 3$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2y - z, \frac{\partial w}{\partial y} = 2x + 4z, \frac{\partial w}{\partial z} = -x + 4y - 4z$$

(2) லிருந்து,

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2y - z & 2x + 4z & -x + 4y - 4z \end{vmatrix}$$

$C_2 \rightarrow C_2 - C_1, C_3 \rightarrow C_3 - C_1$, என செய்ய,

$$\begin{aligned}
 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \\ 2y-z & 2x-4z+6z & -x+2y-4z \end{vmatrix} \\
 &= -4(-x+2y-3z) - (2x-4y+6z) \\
 &= 4x-8y+12z-4x+8y-12z=0
 \end{aligned}$$

எனவே u, v மற்றும் w ஆகியவை ஒன்றுக்கொன்று தொடர்புடையவை.

இப்போது, $u+v=2x+4z$... (3)

$u-v=4y-2z$... (4)

(3) மற்றும் (4), யைப் பெருக்க, நாம் பெறுவது

$$\begin{aligned}
 (u+v)(u-v) &= (2x+4z)(4y-2z) \\
 u^2 - v^2 &= 4(2xy+4yz-zx-2z^2)
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow u^2 - v^2 = 4w$

எடுத்துக்காட்டு 4.57 : பின்வரும் சார்புகள், சார்புகளுடன் தொடர்புடையதா என்பதைச் சரிபார்க்கவும், அப்படியானால், அத்தொடர்பைக் கண்டறியவும்.

$$u = \frac{x+y}{1-xy}, v = \tan^{-1} x + \tan^{-1} y$$

தீர்வு : நாம் அறிந்தது $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} &= \begin{vmatrix} \frac{1+y^2}{(1-xy)^2} & \frac{1+x^2}{(1-xy)^2} \\ \frac{1}{(1-x^2)} & \frac{1}{(1+y^2)} \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{(1-xy)^2} - \frac{1}{(1-xy)^2} = 0
 \end{aligned}$$

எனவே u , மற்றும் v ஆகியவை ஒன்றுக்கொன்று தொடர்புடையவை

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1} \frac{x+y}{1-xy}$$

$\Rightarrow v = \tan^{-1} u$

$\therefore u = \tan v$

எடுத்துக்காட்டு 4.58 : $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ எனில் $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$, மற்றும் $\frac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)}$ கண்டறியவும்

தீர்வு : இங்கு $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$

$\therefore \frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta, \frac{\partial y}{\partial r} = r \sin \theta$

$$\text{மற்றும்} \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin \theta, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta$$

$$\begin{aligned} \text{மற்றும்} \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} \\ &= r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r \end{aligned}$$

$$\text{இப்போது, } r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{மற்றும் } \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-y}{r^2} \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad \frac{\partial(r, \theta)}{\partial(x, y)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} \\ -\frac{y}{r^2} & \frac{x}{r^2} \end{vmatrix} \\ &= \frac{x^2}{r^3} + \frac{y^2}{r^3} = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r} \end{aligned}$$

$$\text{குறிப்புரை : } \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \times \frac{\partial(r, \theta)}{\partial(x, y)} = r \cdot \frac{1}{r} = 1$$

எடுத்துக்காட்டு 4.59 : $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = r \cos \theta$ எனில் $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = r^2 \sin \theta$ எனக் காட்டு

தீர்வு : இங்கு நாம் பெறுவது,

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r} &= \cos \theta, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin \theta \\ \frac{\partial y}{\partial r} &= \sin \theta, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta \\ \frac{\partial z}{\partial r} &= \cos \theta, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = -r \sin \theta, \quad \frac{\partial z}{\partial \phi} = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} \\
&= \cos \theta (r^2 \sin \theta \cos \theta \cos^2 \phi + r^2 \sin \theta \sin^2 \phi) + \\
&\quad r \sin \theta (r \sin^2 \theta \cos^2 \phi + r \sin^2 \theta \sin^2 \phi) \quad [3\text{வது வரிசையில் விரிவடைகிறது}] \\
&= r^2 \sin \theta \cos^2 \theta + r^2 \sin^3 \theta \\
&= r^2 \sin \theta
\end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.60 : $y_1 = \frac{x_2 x_3}{x_1}$, $y_2 = \frac{x_3 x_1}{x_2}$, $y_3 = \frac{x_1 x_2}{x_3}$ எனில் x_1, x_2, x_3 ஆகியவற்றைப்

பொறுத்து y_1, y_2, y_3 ன் ஜாகோபியன்ஸ், 4 என நிரூபி.

தீர்வு : நீங்களே முயச்சிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 4.61 : $x = r \cos \theta \cos \phi$, $y = r \sin \theta \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \phi}$, $z = r \sin^2 \phi \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \theta}$, $m^2 + n^2 = 1$

எனில் $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)}$ வைக் காண்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட தொடர்பை சதுரமாக்கி மற்றும் கூட்ட, நாம் பெறுவது,

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 + z^2 &= r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi + r^2 \sin^2 \theta (1 - m^2 \sin^2 \phi) + r^2 \sin^2 \phi (1 - n^2 \sin^2 \theta) \\
&= r^2 (\cos^2 \theta \cos^2 \phi + \sin^2 \theta - \sin^2 \theta \sin^2 \phi + \sin^2 \phi) \quad (\because m^2 + n^2 = 1) \\
&= r^2 (\cos^2 \theta \cos^2 \phi + \sin^2 \theta \cos^2 \phi + \sin^2 \phi) \quad (\because 1 - \sin^2 \phi = \cos^2 \phi) \\
&= r^2 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = r^2
\end{aligned}$$

r, θ, ϕ வைப் பொறுத்து பகுதி வகையீடு செய்ய, நாம் பெறுவது

$$x \frac{\partial x}{\partial r} + y \frac{\partial y}{\partial r} + z \frac{\partial z}{\partial r} = r \quad \dots(1)$$

$$x \frac{\partial x}{\partial \theta} + y \frac{\partial y}{\partial \theta} + z \frac{\partial z}{\partial \theta} = 0 \quad \dots(2)$$

$$\text{மற்றும் } x \frac{\partial x}{\partial \phi} + y \frac{\partial y}{\partial \phi} + z \frac{\partial z}{\partial \phi} = 0 \quad \dots(3)$$

$$\therefore \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \frac{1}{x} \begin{vmatrix} r & 0 & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix}$$

xR_1 உடன் $(R_{2y} + R_{2z})$ யைக் கூட்ட, மற்றும் (1)-யை (3) ல் பயன்படுத்த

$$= \frac{r}{x} \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{r}{x} \left[\frac{r \cos \theta \sqrt{1-m^2 \sin^2 \phi}}{\sqrt{1-n^2 \sin^2 \theta}} \frac{-r \sin \theta m^2 \sin \phi \cos \phi}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 \phi}} \right. \\
 &\quad \left. \frac{-r \sin \phi n^2 \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{1-n^2 \sin^2 \theta}} \frac{r \cos \phi \sqrt{1-n^2 \sin^2 \theta}}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 \phi}} \right] \\
 &= \frac{r}{x} \left[r^2 \cos \theta \cos \phi \sqrt{1-m^2 \sin^2 \phi} \sqrt{1-n^2 \sin^2 \theta} - \right. \\
 &\quad \left. \frac{m^2 n^2 r^2 \sin^2 \phi \cos \theta \cos \phi}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 \phi} \sqrt{1-n^2 \sin^2 \theta}} \right] \\
 &= \frac{r^3 \cos \theta \cos \phi}{x} \left[\frac{(1-m^2 \sin^2 \phi)(1-n^2 \sin^2 \theta) - m^2 n^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 \phi} \sqrt{1-n^2 \sin^2 \theta}} \right] \\
 &= \left[\frac{r^3 (1-m^2 \sin^2 \phi - n^2 \sin^2 \theta)}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 \phi} \sqrt{1-n^2 \sin^2 \theta}} \right] \quad (\because m^2 + n^2 = 1)
 \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.62 : $y_1 = \cos x_1, y_2 = \sin x_1 \cos x_2$ மற்றும் $y_3 = \sin x_1 \sin x_2 \cos x_3$ எனில் பின்,

$$\frac{\partial(y_1, y_2, y_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = -\sin^3 x_1 \sin^2 x_2 \sin x_1 \text{ என நிரூபி}$$

தீர்வு : $y_1 = \cos x_1, y_2 = \sin x_1 \cos x_2$ மற்றும் $y_3 = \sin x_1 \sin x_2 \cos x_3$

$$\begin{aligned}
 \text{இப்போது} \quad \frac{\partial(y_1, y_2, y_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_3}{\partial x_1} & \frac{\partial y_3}{\partial x_2} & \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} -\sin x_1 & 0 & 0 \\ \cos x_1 \cos x_2 & -\sin x_1 \sin x_2 & 0 \\ \cos x_1 \sin x_2 \cos x_3 & \sin x_1 \cos x_2 \cos x_3 & -\sin x_1 \sin x_2 \sin x_3 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

R_1 ஐ விரிவாக்க, நாம் பெறுவது

$$\begin{aligned}
 &= -\sin x_1 [\sin^2 x_1 \sin^2 x_2 \sin x_3] \\
 &= -\sin^3 x_1 \sin^2 x_2 \sin x_1
 \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.63 : $x = \rho \cos \phi, y = \rho \sin \phi, z = z$ எனும் உருளை ஒருங்கிணைப்புகளில் $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, z)} = \rho$ என நிரூபி

தீர்வு :

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos \phi, \frac{\partial x}{\partial \phi} = -\rho \sin \phi, \frac{\partial x}{\partial z} = 0, \frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin \phi, \frac{\partial y}{\partial \phi} = \rho \cos \phi, \frac{\partial y}{\partial z} = 0 \text{ மற்றும் } \frac{\partial z}{\partial \rho} = 0, \frac{\partial z}{\partial \phi} = 0, \frac{\partial z}{\partial z} = 1$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \phi & -\rho \sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \rho \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho \text{ நிரூபித்தது.}$$

பயிற்சி 4.6

1. $u = \frac{y^2}{2x}, v = \frac{x^2 + y^2}{2x}$ எனில் $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ வைக் காண்க.
2. $u = a \cos u \cosh v, y = a \sin u \sinh v$ எனில் $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{2} a^2 (\cos 2u - \cosh 2kv)$ என நிரூபி
3. $u = 3x + 2y - z, v = x - 2y + z, w = x(x + 2y - z)$ எனில் $\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = 0$. எனக் காட்டு
4. $u = 2xy, v = x^2 - y^2, x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ எனில் $\frac{\partial(u, v)}{\partial(r, \theta)}$ வைக் காண்க.
5. $u = \frac{x}{y - z}, v = \frac{y}{z - x}, w = \frac{z}{x - y}$ எனில் $\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = 0$ என நிரூபி
6. $x = uv, y = \frac{u + v}{u - v}$ எனில் $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ வைக் காண்க..
7. $x = e^u \cos v, y = e^u \sin v$ என்ற உருமாற்றத்திற்கு $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \times \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 1$. எனக் காட்டு
8. $x = e^v \sec u, y = e^u \sin v$ எனில் $JJ' = 1$ வை சரிபார்க்கவும்.
9. $u_1 = \frac{x_1}{n}, u_2 = \frac{x_2}{n}, \dots, u_n = \frac{x_n}{n}$ மற்றும் $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$, எனில் $\frac{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}$ வைக் காண்க
10. $u = \frac{y - x}{1 + xy}$ மற்றும் $v = \tan^{-1} y - \tan^{-1} x$ எனில் $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ வைக் காண்க.
11. $x_1 = r \sin \theta_1 \sin \theta_2, x_2 = r \sin \theta_1 \cos \theta_2, x_3 = r \cos \theta_1 \sin \theta_2, x_4 = r \cos \theta_1 \cos \theta_2$ எனில் $J(x_1, x_2, x_3, x_4) = r^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1$ எனக் காட்டு
12. $y_1, y_2, \dots, y_n$ ன் ஜாகோபியன்னை காண்க. இங்கு $y_1 = x_1(1 - x_2), y_2 = x_1 x_2(1 - x_3), \dots, y_{n-1} = x_1 x_2 \dots x_{n-1}(1 - x_n)$
 $y_n = x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n$
13. $x = u(1 - v), y = uv$ எனில் $JJ' = 1$ வை சரிபார்க்கவும்.
14. $x = \sin \theta \cos \phi, y = r \sin \theta \sin \phi$ எனில் $\frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \phi)} \times \frac{\partial(\theta, \phi)}{\partial(x, y)} = 1$ வை சரிபார்க்கவும்.
15. $u = x^2 - y^2, v = 2xy, x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ எனில் $\frac{\partial(u, v)}{\partial(r, \theta)} = 4r^3$. என நிரூபி

விடைகள்

1. $-\frac{y}{2x}$ 4. $-4r^3$ 6. $\frac{(u-v)^2}{4uv}$ 9. $\frac{1}{x_n^{n-1}}$ 10. 0 12. $x_1^{n-1} x_2^{n-2} \dots x_{n-1}$.

4.9 பல மாறிகளை கொண்ட சார்புகளின் அறுதி மற்றும் லாகரேஞ்சின் பெருக்கிகளின் முறை

அறிமுகம் : இந்த தலைப்பில், சார்பின் மிகப் பெரிய அல்லது குறைந்த மதிப்புகளை நாங்கள் தீர்மானிப்போம். அவற்றின் உடனடி சுற்றுப்புறத்தில் நாம் தீர்மானிப்போம், தொழில்நுட்பரீதியாக அவை சார்பின் பெருமம் மற்றும் சிறும மதிப்புகள் என்று அழைக்கப்படுகின்றன. இந்த மதிப்புகள் பற்றிய அறிவு வளைவுகளைக் கண்டறியவும். குறிப்பிட்ட வரையறுக்கப்பட்ட இடைவெளியில் ஒரு சார்பின் மிகப் பெரிய மற்றும் குறைந்தபட்ச மதிப்புகளை தீர்மானிக்கவும் உதவுகிறது .

சார்பின் பெருமம் மற்றும் சிறுமம்

'a' என்ற சிறிய அண்மைப்புள்ளி இருக்குமேயானால், $x = a$, எனும் புள்ளியில் $F(x)$ என்ற சார்புக்கு பெருமம் மற்றும் சிறுமம் மதிப்புகள் இருக்கும். அதாவது ε என்ற மெய்யெண் இருக்குமேயானால் $0 < |x - a| < \varepsilon$ என்றவாறு அனைத்து x ன் மதிப்புகளுக்கும் $f(x) < f(a)$ மற்றும் $f(x) > f(a)$, என இருக்கும்.

குறிப்பு 1 : அறுதி மதிப்புகள் என்ற சொல் பெருமம் மற்றும் சிறுமம் மதிப்புக்கும் யன்படுத்தப்படுகிறது இந்த மதிப்புகள் ஏற்படும் புள்ளிகள் அறுதி புள்ளிகள் என்று அழைக்கப்படுகின்றன.

குறிப்பு 2 : $f(x)$ என்ற சார்பின் பெருமம் அல்லது சிறுமம் மதிப்பு $f(a)$, $x = a$ என்ற சிறிய அண்மைப்புள்ளியில், மட்டுமே, அதன் மிகப்பெரிய அல்லது குறைந்தபட்ச மதிப்பு. $f(x)$ வரையறையின் இடைவெளி முழுமையிலும் அவசியமில்லை. உண்மையில், ஒரு சார்பு பல பெருமம் மற்றும் சிறுமம் மதிப்புகளைக் கொண்டிருக்கலாம்.

நிலையான மதிப்பு : ஒரு சார்பு $f(x)$ -க்கு, $x = a$, என்ற புள்ளியில் டெரிவேடிவ் $f'(x)$ மறைந்துவிட்டால், அப்புள்ளியில் நிலையானதாக இருக்கும். அதாவது $f'(a) = 0$, $f(a)$, $f(x)$ -இன், ஒரு நிலையான மதிப்பு அல்லது திருப்பு மதிப்பு என்று கூறப்படுகிறது. கால மாற்றத்தின் வீதம் என்ற உண்மையிலிருந்து 'நிலையானது' எழுகிறது.

ஒரு சார்பின் பெருமம் மற்றும் சிறுமம் மதிப்பு ஒரு நிலையான மதிப்பு என்பதை கவனத்தில் கொள்ள வேண்டும் ஆனால் ஒரு நிலையான மதிப்பு பெருமம் மற்றும் சிறுமம் மதிப்பாக இருக்காது. எடுத்துக்காட்டாக, $f(x) = (x - 1)^3 + 2$ என்ற சார்புக்கு $x = 1$ எனும் புள்ளியில் பெருமம் மற்றும் சிறுமம் மதிப்புகள் இல்லை, என்ற போதிலும் அப்புள்ளியில் நிலையான மதிப்பு உள்ளது.

4.9.1 பல்வேறு சாரா மாறிகளை கொண்ட சார்பின் பெருமம் மற்றும் சிறுமம் மதிப்புகள்

பல சாரா மாறிகளின் சார்பின் பெருமம் அல்லது சிறுமம் மதிப்பின் வரையறை, ஒற்றை மாறியின் சார்பிற்கு கொடுக்கப்பட்ட அதே வழியில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. $f(x, y, z, \dots)$ எனும் சார்பு $(a, b, c, \dots)$ என்ற புள்ளியில் பெருமம் மற்றும் சிறுமம் மதிப்புகள் பெற்று இருக்க, $(a, b, c, \dots)$. என்ற புள்ளியின் அண்மையில், அனைத்து $(x, y, z, \dots)$ -க்கும் $f(x, y, z, \dots) < f(a, b, c, \dots)$ அல்லது $f(x, y, z, \dots) > f(a, b, c, \dots)$ என இருக்க வேண்டும்.

4.9.1.1 இரு சாரா மாறிகளை கொண்ட சார்பின் பெருமம் மற்றும் சிறுமம் மதிப்புகள்

இரண்டு சாரா மாறிகளின் ஒரு சார்பு $f(x, y)$ க்கு, (a, b) என்ற புள்ளியில் பெருமம் (இடம் சார்ந்த பெருமம்) இருக்க வேண்டும் என்றால், ஒரு சிறிய நேர்மறை எண் δ , $f(a + h, b + k) < f(a, b)$, h, k போன்ற அனைத்து மதிப்புகளுக்கும், $|h| < \delta$, $|k| < \delta$. என்றவாறு இருக்க வேண்டும்.

இரண்டு சாரா மாறிகளின் ஒரு சார்பு $f(x, y)$ -க்கு, (a, b) என்ற புள்ளியில் சிறுமம் (இடம் சார்ந்த சிறுமம்) இருக்க வேண்டும் என்றால், ஒரு சிறிய நேர்மறை எண் δ , $f(a + h, b + k) > f(a, b)$, h, k போன்ற அனைத்து மதிப்புகளுக்கும், $|h| < \delta$, $|k| < \delta$. என்றவாறு இருக்க வேண்டும்.

இரண்டு சாரா மாறிகளின் சார்பின் பெருமம் மற்றும் சிறுமம் இருப்பதற்கான நிபந்தனைகளை நாம் இப்போது நிறுவுவோம்

பெருமம் மற்றும் சிறுமம் இருப்பதற்கு தேவையான நிபந்தனைகள்

(a, b) என்ற புள்ளியில் $f(x, y)$ என்ற சார்பின் அறுதி (பெருமம் மற்றும் சிறுமம்) மதிப்பாக இருக்கட்டும். பின்னர், வரையறையின் படி $f(a + h, b + k) - f(a, b)$ ஒரு நிலையான அடையாளத்தை பாதுகாக்க வேண்டும் (நேர்மறை சிறுமம் மற்றும் எதிர்மறை பெருமம்) h மற்றும் k -இன் போதுமான சிறிய மதிப்புகளுக்கு.

இப்போது, டெய்லரின் தொடர் விரிவாக்கத்திலிருந்து, நாம் பெறுவது,

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = \left(h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x=a, y=b} + \frac{1}{2!} \left(h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{x=a, y=b} + \dots \quad \dots(1)$$

h, k ஐ போதுமான அளவு எடுத்துக்கொள்வதன் மூலம், h, k இல் உள்ள முதல் படியின் மூலம், வலது புற விதிமுறைகளின் குறியீட்டை நிர்வகிக்க முடியும் மற்றும் அதனால் (1) இன் இடப்புற குறியீட்டையும். ஆனால் முதல் படி விதிமுறைகள் h இன் அறிகுறிகளாக இருக்கும்போது அவற்றின் அடையாளத்தை மாற்றுகின்றன மற்றும் k தலைகீழாக மாறும். எனவே இடப்புறம் ஒரு நிலையான அடையாளத்தை பாதுகாக்கலாம், இது அவசியம்,

$$\left(h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x=a, y=b} = 0 \quad \dots(2)$$

h மற்றும் k ஆகியவை தன்னிச்சையானவை மற்றும் ஒன்றுக்கொன்று சாராதவை என்பதால், நாம் பெறுவது,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=a, y=b} = 0 \text{ மற்றும் } \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x=a, y=b} = 0$$

எனவே, $f(x, y)$ -க்கு பெருமம் மற்றும் சிறுமம் மதிப்பை (a, b) கொண்டிருக்க தேவையான நிபந்தனை, முதல் வகை பகுதி வகையீடு, $\frac{\partial f}{\partial x}$ மற்றும் $\frac{\partial f}{\partial y}$ $x = a$ மற்றும் $y = b$ என்ற புள்ளிகளில் பூஜ்ஜியம் ஆக வேண்டும்.

பெருமம் மற்றும் சிறுமம் இருப்பதற்கு போதுமான நிபந்தனைகள்

$f(x, y)$ என்ற சார்புக்கு, $x = a$ மற்றும் $y = b$ என்ற புள்ளிகளில், $\frac{\partial f}{\partial x}$ மற்றும் $\frac{\partial f}{\partial y}$ இரண்டும் பூஜ்ஜியம் எனில், பிறகு (1)-லிருந்து நாம் பெறுவது,

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = \frac{1}{2!} \left(h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{x=a, y=b} + \dots$$

$$= \frac{1}{2!} (rh^2 + 2shk + tk^2) + \dots \quad \dots(3)$$

இங்கே, சுருக்கத்திற்காக, நாம் பிரதியிட

$$r = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{x=a, y=b}, \quad s = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{x=a, y=b}, \quad t = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{x=a, y=b}$$

h மற்றும் k இன் போதுமான சிறிய மதிப்புகளுக்கு.

$R.H.S$ இன் குறியீடு (3) இல் h, k இல் இரண்டாவது படி மூலம் நிர்வகிக்கப்படுகிறது, எனவே $L.H.S$ ம்.

எனவே, h, k இன் அனைத்து சாத்தியமான மதிப்புகளுக்கும், $(rh^2 + 2shk + tk^2)$ ன் குறியீடு நேர்மறையாக இருந்தால், $f(x, y)$ சிறுமமாக இருக்கும் மற்றும் அது எதிர்மறையாக இருந்தால், பெருமமாக இருக்கும்.

$(rh^2 + 2shk + tk^2)$ என்ற கோவையின் குறியீட்டைக் காண, இதை நாம் பின்வருமாறு எழுதலாம்,

$$rh^2 + 2shk + tk^2 = \frac{1}{r} (r^2 h^2 + 2rshk + rtk^2)$$

$$= \frac{1}{r} [(rh + sk^2) + (rt - s^2)k^2] \quad \dots(4)$$

இப்போது நாம் பின்வரும் வகைகளை பெறுகிறோம்:

1. $r > 0$ மற்றும் $rt - s^2 > 0$ எனில் (4) ன் குறியீடு நேர்மறையானது.
2. $r < 0$ மற்றும் $rt - s^2 > 0$ எனில் (4) ன் குறியீடு எதிர்மறையானது.
3. $rt - s^2 < 0$ எனில் (4) ன் குறியீடு காண முடியாது.
4. $rt - s^2 = 0$ மற்றும் $rh + sk \neq 0$ எனில் (4) இன் குறியீடு நேர்மறை மற்றும் எதிர்மறை என்பது r , நேர்மறை அல்லது எதிர்மறையைப் பொறுத்தது. எனினும், $rt - s^2 = 0$ மற்றும் $rh + sk = 0$ எனில் மேலதிக விசாரணைகள் தேவை.

எனவே, $r > 0$ மற்றும் $rt - s^2 > 0$ எனில், சார்பு $f(x, y)$, (a, b) எனும் புள்ளியில் பெருமமாக இருக்கும்.

$r < 0$ மற்றும் $rt - s^2 > 0$ எனில், சார்பு $f(x, y)$, (a, b) எனும் புள்ளியில் சிறுமமாக இருக்கும்.

இருப்பினும், $rt - s^2 < 0$ எனில், $f(x, y)$ என்ற சார்பிற்கு, (a, b) என்ற புள்ளியில் பெருமமும் இல்லை சிறுமமும் இல்லை.

மீண்டும், $rt - s^2 = 0$ மற்றும் $rh + sk \neq 0$ எனில், r இன் குறியீடு மட்டுமே சார்பின் பெருமம் மற்றும் சிறுமத்தை தீர்மானிக்கும்.

$rt - s^2 = 0$ மற்றும் $rh + sk = 0$ எனில் (4) இல் இரண்டாம் படி விதிமுறைகள் மறைந்துவிடும், நாம் h மற்றும் k இல் உயர் படியில் உள்ள விதிமுறைகளை கருத்தில் கொள்ள வேண்டும்.

மேலே உள்ள நிபந்தனைகள் சார்பின் பெருமம் மற்றும் சிறுமத்தை காண்பதற்கு, போதுமான நிபந்தனைகள் (லாக்ரேஞ்சின் நிலைமைகள் என்றும் அழைக்கப்படுகின்றன), மற்றும் எனில்

செயல் விதி : $f(x, y)$ என்ற சார்பின் பெருமம் அல்லது சிறுமத்தை தீர்மானிக்க, நாம் பின்வருமாறு, தொடரலாம்:

1. $\frac{\partial f}{\partial x}$ மற்றும் $\frac{\partial f}{\partial y}$ காண்க. அவற்றை பூஜ்ஜியத்திற்கு சமன் செய்யவும். x -மற்றும் y -க்கான சமன்பாடுகளை ஒரே நேரத்தில் தீர்க்கவும். (a_i, b_i) , $i = 1, 2, 3, \dots$ ஆகியவை மூலங்கள் என்க. இந்த (a_i, b_i) , நிலையான புள்ளிகள் என்று அழைக்கப்படுகின்றன.
2. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ மற்றும் $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ காண்க. இதையொட்டி $x = a_i$ மற்றும் $y = b_i$ எனப் பிரதியிடு. ஒவ்வொரு இணை மதிப்புகளுக்கும், $rt - s^2$ ன் மதிப்பைக் கணக்கிடவும்.
3. ஏதேனும் ஒரு இணை மதிப்பிற்கு $r > 0$ மற்றும் $rt - s^2 > 0$ எனில், இந்த இணை மதிப்பிற்கு $f(x, y)$ என்ற சார்பு சிறுமம். $rt - s^2 > 0$ எனில், சார்பு பெருமம். $rt - s^2 < 0$, எனில், சார்பிற்கு, பெருமமும் இல்லை சிறுமமும் இல்லை மற்றும் அப்புள்ளி சேணப்புள்ளி என்று அழைக்கப்படுகிறது. எனில், வகையின் முடிவு செய்யப்படவில்லை மற்றும் கொடுக்கப்பட்ட சார்பின் தன்மையை தீர்மானிக்க மேலதிக விசாரணைகள் அவசியம்.

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 4.64 : $(x-1)(x-2)(x-3)$ என்ற சார்பிற்கு பெருமம் மற்றும் சிறுமம் மதிப்புகளை காண்க. **தீர்வு :**

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) \text{ என்க.}$$

$$= x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

பின் பெருமம் மற்றும் சிறுமத்திற்கு, $f'(x) = 0$

$$\Rightarrow 3x^2 - 12x + 11 = 0$$

$$\Rightarrow x = 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}, 2 - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

மேலும் $f''(x) = 6x - 12$

தெளிவாக $f''\left(2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ நேர்மறை மற்றும் $f''\left(2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ எதிர்மறை.

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட சார்பு $2 - \frac{1}{\sqrt{3}}$ ல் பெருமம் மற்றும் $2 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ ல் சிறுமம். எனவே $f(x)$ -இன் பெரும மதிப்பு

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(-1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

மற்றும் சிறும மதிப்பு

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(-1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.65 : ஒரு எரிவாயு இடுக்கி மேலே மூடப்பட்டு கீழே திறக்கப்பட்டு இருக்கும் உருளை பாத்திரமாகும், (இது நீரில் மூழ்குகிறது), கட்டுமானத்திற்கு குறைந்த அளவு பொருள் தேவைப்பட கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புக்கு அதன் உயரத்தின் விட்டம் மற்றும் விகிதம் என்னவாக இருக்க வேண்டும்?

தீர்வு : R என்பது உருளை பாத்திரத்தின் ஆரம் மற்றும் d தொட்டியின் ஆழமாக இருக்கட்டும்.

தொட்டியின் கொடுக்கப்பட்ட திறன் V ஆக இருக்கட்டும் மற்றும் அதை உருவாக்க தேவையான தாளின் பரப்பளவாக A இருக்கட்டும். பின்

$$V = \pi R^2 d \quad \dots(1)$$

$$\therefore d = \frac{V}{\pi R^2}$$

மற்றும் $A =$ அடித்தளத்தின் பரப்பு + உருளைச் சுவரின் பகுதி

$$\Rightarrow A = \pi R^2 + 2\pi R d$$

$$\text{அல்லது} \quad A = \pi R^2 + 2\pi R \cdot \frac{V}{\pi R^2}$$

$$\Rightarrow A = \pi R^2 + \frac{2V}{R} \quad \Rightarrow \frac{dA}{dR} = 2\pi R - \frac{2V}{R^2}$$

$$\text{மீண்டும்} \quad \frac{d^2 A}{dR^2} = 2\pi + \frac{4V}{R^3}$$

$$\text{பெருமம் மற்றும் சிறுமத்திற்கு} \quad \frac{dA}{dR} = 0$$

$$\Rightarrow 2\pi R - \frac{2V}{R^2} = 0 \quad \Rightarrow V = \pi R^3$$

$$\left(\frac{d^2 A}{dR^2} \right)_{V=\pi R^3} = 6\pi > 0 \quad (\text{சிறுமம்})$$

$$\text{எனவே} \quad d = \frac{V}{\pi R^2} \Rightarrow d = \frac{\pi R^3}{\pi R^2}$$

$$\frac{d}{2R} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{உயரம்/விட்டம்} = \frac{d}{D} = \frac{1}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.66 : மோட்டார் படகை ஓட்டுவதில் அதன் வேகம் கனசதுரத்தைப் பொறுத்து மாறுபடும் போது, பெட்ரோல் எரிந்தது (ஒரு மணி நேரத்திற்கு) எனக் கருது. மின்னோட்டத்திற்கு C , எதிராக செல்லும் போது மிகவும் சிக்கனமான வேகத்தைக் (கிமீ / மணி) கண்டறியவும்

தீர்வு : மோட்டார் படகின் வேகம் v கிமீ/மணி நேரமாக இருக்கட்டும் படகுடன் தொடர்புடைய தற்போதைய வேகம் $(v - c)$ கிமீ/மணி. கடக்கப்பட வேண்டிய மொத்த தூரம் d கிமீ ஆக இருக்கட்டும் பின்னர் $\frac{d}{v - c}$ நேரம் எடுக்கப்பட்டது.

மேலும், ஒரு மணி நேரத்தில் பெட்ரோல் எரிந்ததாக கொடுக்கப்பட்டது $= \alpha v^3$ இங்கு α என்பது விகிதாசாரத்தின் நிலையானது.

$\therefore d$ கிமீ உள்ளடக்கியதில் எரிந்த மொத்த பெட்ரோலின் அளவு P என்றால்

$$P = \frac{\alpha v^3 d}{v - c}$$

$$\therefore \frac{dP}{dv} = \alpha d \left[\frac{(v-c)3v^2 - v^3 \cdot 1}{(v-c)^2} \right] = \frac{\alpha d(2v^3 - 3cv^2)}{(v-c)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{மற்றும் வகையிட, நாம் பெறுவது} \quad \frac{d^2P}{dv^2} &= \frac{\alpha d}{(v-c)^4} \left[(v-c)^2(6v^2 - 6vc) - (2v^3 - 3cv^2) \cdot 2(v-c) \right] \\ &= \frac{\alpha d}{(v-c)^3} \left[6v(v-c)^2 - 2v^2(2v-3c) \right] \end{aligned}$$

$$\text{பெருமம் மற்றும் சிறுமத்திற்கு} \quad \frac{dP}{dv} = 0$$

$$2v^3 - 3cv^2 = 0 \Rightarrow v = 0 \quad \text{அல்லது} \quad \frac{3}{2}c$$

$v = 0$, எனில் $P = 0$, அதாவது, பெட்ரோல் எரிக்கப்படவில்லை.

$$V = \frac{3c}{2}, \quad \frac{d^2P}{dv^2} = +ve. \text{ அதாவது, } P \text{ சிறுமம்}$$

$\therefore V = \frac{3c}{2}$, எனும் போது பெட்ரோல் எரிக்கப்படுவது குறைவு. அதாவது, மிகவும் சிக்கனமான வேகம்,

$$\left(\frac{3c}{2} \right) \text{ கிமீ/மணி.}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.67 : $x^3y^2(1-x-y)$ என்ற சார்பிற்கு பெருமம் மற்றும் சிறுமம் மதிப்புகளை காண்க.
தீர்வு : நீங்களே முயற்சிக்கலாம்.

விடை : சார்பு $f(x), \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right)$ எனும் புள்ளியில் பெருமம் மற்றும் இதன் பெருமை மதிப்பு $\frac{1}{432}$.

எடுத்துக்காட்டு 4.68 : முக்கோணத்திற்குள், அதன் மூன்று உச்சங்களிருந்து தூரத்தின் சதுரங்களின் தொகை குறைந்தபட்சமாக இருக்குமாறு ஒரு புள்ளியைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு : $(x_n, y_n); n = 1, 2, 3$ ஆகியவை முக்கோணத்தின் நுனிகளாகவும் மற்றும் (x, y) உள்ளே ஏதேனும் ஒரு புள்ளியாகவும் இருக்கட்டும்.

$$\text{பிறகு} \quad v = \sum_{n=1}^3 \left[(x-x_n)^2 + (y-y_n)^2 \right] \text{ என்க.} \quad \dots(1)$$

$$\therefore \frac{\partial v}{\partial x} = \sum_{n=1}^3 2(x-x_n) = 2[(x-x_1) + (x-x_2) + (x-x_3)]$$

$$\text{மற்றும்} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \sum_{n=1}^3 2(y-y_n) = 2[(y-y_1) + (y-y_2) + (y-y_3)]$$

$$\text{மற்றும் மேலும்} \quad r = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 6, s = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0, \text{ மற்றும் } t = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 6$$

v ன் பெருமம் மற்றும் சிறுமத்திற்கு நாம் பெறுவது,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow 2[(x-x_1) + (x-x_2) + (x-x_3)] = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$\text{மற்றும் } \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow 2[(y - y_1) + (y - y_2) + (y - y_3)] = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

ஆகவே, v பெருமம் அல்லது சிறுமமாக இருக்கக்கூடிய ஒரே புள்ளி $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ ஆகும். இந்த புள்ளியில் $r = 6, s = 0, t = 6$, அதனால் $rt - s^2 = 36 (+ve)$

எனவே, இப்புள்ளியில் v இன் நிலையான மதிப்பு $= \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ ஆகும், ஒரு அறுதி மதிப்பு ஆகும்.

ஆனால் $r > 0$, பின் v இன் அறுதி மதிப்பு சிறுமம்.

எனவே v சிறுமமாக இருக்க தேவையான புள்ளி $= \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$, இது முக்கோணத்தின் மையப்பகுதி என அறியப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 4.69 : $x > 0, y > 0$ என்ற நிபந்தனையை திருப்திப்படுத்தும், $z = x^3 y^2 (12 - x - y)$ என்ற சார்பின் நிலையான புள்ளியைக் கண்டறியவும் மற்றும் அவற்றின் தன்மையை ஆராயுங்கள்.

$$\text{தீர்வு : } z = x^3 y^2 (12 - x - y) \text{ என்க} \quad \dots(1)$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\partial z}{\partial x} &= x^3 y^2 (-1) + (12 - x - y) 3x^2 y^2 \\ &= 3x^2 y^2 (12 - x - y) - x^3 y^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = 36x^2 y^2 - 4x^3 y^2 - 3x^2 y^3 \quad \dots(2)$$

$$\begin{aligned} \text{மேலும், } \frac{\partial z}{\partial y} &= x^3 y^2 (-1) + (12 - x - y) x^3 \cdot 2y \\ &= 24x^3 y - 2x^4 y - 2x^3 y^2 - x^3 y^2 \end{aligned}$$

$$\text{அல்லது } \frac{\partial z}{\partial y} = 24x^3 y - 2x^4 y - 3x^3 y^2 \quad \dots(3)$$

z ன் பெரும மற்றும் சிறும மதிப்புக்களுக்காக, நாம் பெறுவது

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow 36x^2 y^2 - 4x^3 y^2 - 3x^2 y^3 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 y^2 (36 - 4x - 3y) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, y = 0, 4x + 3y = 36 \quad \dots(4)$$

$$\text{மேலும் } \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow 24x^3 y - 2x^4 y - 3x^3 y^2 = 0$$

$$\text{அல்லது } x^3 y(24 - 2x - 3y) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, y = 0, 2x + 3y = 24 \quad \dots(5)$$

(4) மற்றும் (5), சமன்பாடுகளை தீர்க்க, நாம் பெறுவது

$$x = 0, y = 0, x = 6 \text{ மற்றும் } y = 4$$

$$\text{இப்போது } r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 72xy^2 - 12x^2y^2 - 6xy^3 \quad \dots(6)$$

$$t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 24x^3 - 2x^4 - 6x^3y \quad \dots(7)$$

$$\begin{aligned} \text{மேலும் } s &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (24x^3y - 2x^4y - 3x^3y^2) \\ s &= 72x^2y - 8x^3y - 9x^2y^2 \quad \dots(8) \end{aligned}$$

இவ்வாறு $x = 6$ மற்றும் $y = 4$ இல்

$$r = 72 \times 6 \times 16 - 12 \times (36) \times (16) - 6 \times 6 \times 64 = -2054$$

$$t = 24(216) - 2(1216) - 6(216 \times 4) = -2592$$

$$\therefore s = 72(36)(4) - 8(216)(4) - 9(36) \times (16) = -1728$$

$$\therefore rt - s^2 = (-2504) \times (-2592) - (-1728) > 0$$

$$\text{எனவே } rt - s^2 > 0, r < 0$$

$$x = 6, y = 4, \text{ நாம் பெறும் பெருமம்.}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.70 : $f(x, y) = \sin x \sin y \sin(x + y)$ என்ற சார்பின் பெருமம் மற்றும் சிறுமம் பற்றி விவாதிக்கவும்.

தீர்வு : பெருமம் மற்றும் சிறும புள்ளிகள்,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin y [\cos x \sin(x + y) + \sin x \cos(x + y)] = 0$$

$$\Rightarrow \sin y [\sin(2x + y)] = 0 \quad \dots(1)$$

$$\text{மற்றும் } \frac{\partial f}{\partial y} = \sin x [\cos y \sin(x + y) + \sin y \cos(x + y)] = 0$$

$$\Rightarrow \sin x \sin(x + 2y) = 0 \quad \dots(2)$$

இந்த சமன்பாடுகளை தீர்க்க, நிலையான புள்ளிகள், $(0, 0)$ மற்றும் $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$.

$$\begin{aligned} \text{இப்போது } r &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \sin y \cos(2x + y), \\ s &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \sin y \cos(2x + y) + \cos y \sin(2x + y) \\ &= \sin(2x + 2y), \end{aligned}$$

மற்றும் $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \sin x \cos(x + 2y),$

$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ ல், $r = 2 \sin \frac{\pi}{3} \cos(\pi) = -\sqrt{3}$

$s = \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

மற்றும் $t = 2 \sin \frac{\pi}{3} \cos \pi = -\sqrt{3}.$

தெளிவாக $r < 0$ மற்றும் $rt - s^2 = 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4} > 0$. எனவே, கொடுக்கப்பட்ட சார்பு $f(x, y), \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ ல்

பெருமம் மற்றும் பெரும மதிப்பு

$$f_{\max} = \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

$rt - s^2 = 0$ என்றவாறு, $(0, 0)$ ல், நாம் பெறுவது $r = 1, s = t = 0$.

எனவே இந்த கட்டத்தில் எந்த முடிவும் எடுக்க முடியாதுமற்றும் உயர் வரிசை விதிமுறைகளை கருத்தில் கொள்ள வேண்டும்.

இருப்பினும், இந்த புள்ளியில் $f(x, y) = 0$, இது கொடுக்கப்பட்ட சார்பின் சிறுமமாக இருக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 4.71 : $f(x, y) = x^2 + y^2 + 6x + 12$ என்ற சார்பின் பெருமம் மற்றும் சிறுமம் பற்றி விவாதிக்கவும்.

தீர்வு : நீங்களே முயற்சிக்கலாம்.

விடை : $x = -3$ மற்றும் $y = 0$ எனும் போது $f(x, y) = x^2 + y^2 + 6x + 12$ சிறுமம் மற்றும் சிறும மதிப்பு 3.

எடுத்துக்காட்டு 4.72 : $u = xy + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{y}$ என்ற சார்பின் பெருமம் மற்றும் சிறுமம் பற்றி விவாதிக்கவும்.

தீர்வு : நீங்களே முயற்சிக்கலாம்,

விடை : $x = a$ மற்றும் $y = a$ எனும் போது, $f(x, y)$ சிறுமம் மற்றும் சிறும மதிப்பு $3a^2$

எடுத்துக்காட்டு 4.73 : $x^2 + y^2 = 1$ என்ற வட்டத்தின் மேல், $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$ எனும் சார்புக்கு, பெரும மற்றும் சிறும மதிப்புகள் உள்ளதா இல்லையா எனக் கண்டுபிடி.

தீர்வு : $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$ என்க

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\partial f}{\partial x} &= (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}(-2x) + 2xe^{-(x^2 + y^2)} \\ &= e^{-(x^2 + y^2)}[1 - (x^2 + y^2)]2x \end{aligned}$$

மற்றும் $\frac{\partial f}{\partial y} = e^{-(x^2 + y^2)}[1 - (x^2 + y^2)]2y$

பெரும மற்றும் சிறும மதிப்புகளுக்காக, நாம் பெறுவது

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow 2x[1 - (x^2 + y^2)]e^{-(x^2 + y^2)} = 0$$

$$\text{மற்றும் } 2y[1 - (x^2 + y^2)]e^{-(x^2 + y^2)} = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, y = 0 \text{ மற்றும் } x^2 + y^2 = 1$$

கொடுக்கப்பட்ட $x^2 + y^2 = 1$ ஐ விட்டு, நாம் $x = 0, y = 0$ ஐ எடுத்துக்கொள்கிறோம்.

எனவே புள்ளி $(0, 0)$ மட்டுமே நிலையான புள்ளி.

$$\begin{aligned} \text{மீண்டும் } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = r &= (2 - 6x^2 - 2y^2)e^{-(x^2 + y^2)} + (2x - 2x^3 - 2xy^2)e^{-(x^2 + y^2)}(-2x) \\ &= e^{-(x^2 + y^2)}[4x^4 - 10x^2 + 4x^2y^2 - 2y^2 + 2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{மற்றும் } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = s &= (-4xy)e^{-(x^2 + y^2)} + (2x - 2x^3 - 2xy^2)e^{-(x^2 + y^2)}(-2y) \\ &= e^{-(x^2 + y^2)}[-8xy + 4x^3y + 4xy^3] \end{aligned}$$

$$\text{மற்றும் } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = t = e^{-(x^2 + y^2)}[(2 - 2x^2 - 10y^2 - 4x^2y^2 + 4y^4)]$$

$$(0, 0) \text{ என்ற புள்ளியில் } r = 2, s = 0, t = 2$$

$$rt - s^2 = 4 > 0, \text{ மேலும் } r > 0.$$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட சார்பு $f(x, y)$, $(0, 0)$ ல் சிறுமம் மற்றும் சிறும மதிப்பு $(0+0)e^{-0} = 0$

எடுத்துக்காட்டு 4.74 : $x^4 + y^4 - x^2 + xy - y^2$ என்ற சார்பிற்கு பெருமம் மற்றும் சிறுமம் மதிப்புகளை காண்க.

தீர்வு : $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 + xy - y^2$ என்க

பெரும மற்றும் சிறும மதிப்புக்களுக்காக, நாம் பெறுவது

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow 4x^3 - 2x + y = 0 \quad \dots(1)$$

$$\text{மற்றும் } \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow 4y^3 + x - 2y = 0 \quad \dots(2)$$

(1)லிருந்து (2) கழிக்க நாம் பெறுவது

$$4(x^3 - y^3) - 3(x - y) = 0$$

$$\Rightarrow x - y = 0 \text{ அல்லது } 4(x^2 + y^2 + xy) - 3 = 0$$

எனவே (1) சமன்பாட்டிலிருந்து, $x = y = 0$ அல்லது $\pm \frac{1}{2}$, மீண்டும் (1) மற்றும் (2) சேர்ப்பதன் மூலம், நாம் பெறுவது

$$4(x^3 + y^3) - (x + y) = 0$$

$$\Rightarrow x + y = 0 \text{ அல்லது } 4(x^2 + y^2 - xy) = 0$$

எனவே (2) சமன்பாட்டிலிருந்து

$$x = -y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

மேலும், நாம் பெறுவது, $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 2, t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 2$ மற்றும் $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$

ஆதலால்

$$rt - s^2 = 4(6x^2 - 1)(6y^2 - 1) - 1$$

$$= 3 > 0, \quad x = 0, y = 0 \text{ எனும்போது}$$

$$= 0 \quad x = y = \pm \frac{1}{2} \text{ எனும்போது}$$

$$= 48 > 0, \quad x = -y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ எனும்போது}$$

மேலும்

$$r = -2 < 0, \quad x = 0, y = 0 \text{ எனும்போது}$$

$$= 1 > 0, \quad x = y = \pm \frac{1}{2} \text{ எனும்போது}$$

$$= 7 > 0, \quad x = -y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ எனும்போது}$$

எனவே $x = 0, y = 0$ எனும்போது, பெருமம் மற்றும் $x = -y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ எனும்போது சிறுமம்.

$f(x, y)$ ன் மதிப்பு 0 மற்றும் $-\frac{9}{8}$ முறையே .

$x = y = \pm \frac{1}{2}$ எனும்போது, சோதனை தோல்வியுற்றது, இந்த விஷயத்தில், டெய்லர், விரிவாக்கத்தின்

உயர் பட்டம் விதிமுறைகளுக்குச் செல்லுங்கள்மற்றும் முடிவு கிடைக்கும்

எனவே $x = y = \pm \frac{1}{2}$ எனும்போது சிறுமம் மற்றும் ' f ' ன் சிறும மதிப்பு $\left(-\frac{1}{8}\right)$

4.9.1.2 மூன்று சாரா மாறிகளை கொண்ட சார்பின் பெருமம் மற்றும் சிறுமம் மதிப்புகள்

$f(x, y, z)$ மூன்று சாரா மாறிகளின் சார்பாக இருக்கட்டும் மற்றும் $f(a, b, c), (a, b, c)$. என்ற புள்ளியில் சார்பின் அறுதி மதிப்பாக இருக்கட்டும். $f(a+h, b+k, c+l) - f(a, b, c)$ என்ற வரையறையின் மூலம், குறியீட்டின் நிலையை (சிறுமதிற்கு நேர்மறை மற்றும் பெருமத்திற்கு எதிர்மறை), h, k மற்றும் l இன் போதுமான சிறிய மதிப்புகளுக்கு பாதுகாக்க வேண்டும்,

இப்போது டெய்லரின் விரிவாக்கத்திலிருந்து, நாம் பெறுவது, $f(a+h, b+k, c+l) - f(a, b, c)$

$$= \frac{1}{2!} [Ah^2 + Bk^2 + Cl^2 + 2Fkl + 2Glh + 2Hhk] + \text{உயர் வரிசை விதிமுறைகள்}$$

$x = a, y = b$ மற்றும் $z = c$, $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0$ எனும்போது

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, B = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, C = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, F = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}, G = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}, H = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, (a, b, c) \text{ எனும் புள்ளியில்.}$$

இப்போது h, k மற்றும் l ஐ எடுத்துக்கொள்வதன் மூலம் (1) இல் உள்ள சதுர அடைப்புக்குறிக்குள் உள்ள வார்த்தையை உருவாக்கலாம் $R.H.S$ இன் அடையாளத்தை நிர்வகிக்க மற்றும் அதனால் $L.H.S$, h, k மற்றும் l போன்ற அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் இந்த விரிவாக்கம் நேர்மறையாக இருந்தால், பின்னர் சார்பு $f(x, y, z)$ சிறுமம், (a, b, c) ல், மற்றும் அறிகுறி எதிர்மறையாக இருந்தால் சார்பு $f(x, y, z)$ பெருமம், (a, b, c) ல். குறியீட்டை அடையாளம் காண, நாம்

$$\begin{aligned} & Ah^2 + Bk^2 + Cl^2 + 2Fkl + 2Glh + 2Hhk \text{ என எழுதலாம்} \\ &= \frac{1}{A} [A^2 h^2 + ABk^2 + AC l^2 + 2AFkl + 2AGlh + 2AHhk] \\ &= \frac{1}{A} [(Ah + Hk + Gl)^2 + (AB - H^2)k^2 + 2(AF - GH)kl + (CA - G^2)l^2] \end{aligned}$$

இது A போன்ற அடையாளத்தைக் கொண்டிருக்கும்.

$$AB - H^2 > 0 \text{ மற்றும் } (AB - H^2)(CA - G^2) - (AF - GH)^2 > 0 \text{ எனில்,}$$

அதாவது

$$AB - H^2 > 0 \text{ மற்றும் } A(ABC + 2FGH - AF^2 - BG^2 - CH^2) > 0 \text{ எனில்,}$$

நாம் இதை இவ்வாறும் எழுதலாம்

$$AB - H^2 = \begin{vmatrix} A & H \\ H & B \end{vmatrix} = D_1 \text{ (சொல்)}$$

$$\text{மற்றும் } ABC + 2FGH - AF^2 - BG^2 - CH^2 = \begin{vmatrix} A & H & G \\ H & B & F \\ G & F & C \end{vmatrix} = D_2 \text{ (சொல்)}$$

எனவே A, D_1, D_2 அனைத்தும் நேர்மறையாக இருந்தால் மேலே உள்ள கோவை நேர்மறையாக இருக்கும், மற்றும் அவைகள் மாறி மாறி எதிர்மறை மற்றும் நேர்மறை யாக இருந்தால், எதிர்மறையாக இருக்கும் எனவே $A > 0, D_1 > 0$ மற்றும் $D_2 > 0$; எனும்போது, சார்பு $f(x, y, z)$ சிறுமம் மற்றும் $A < 0, D_1 > 0, D_2 < 0$ எனும்போது, சார்பு $f(x, y, z)$ பெருமம்.

செயல்பாட்டு விதிகள்

$u = f(x, y, z)$ என்ற சார்பு, x, y மற்றும் z ஆகிய மூன்று சாரா மாறிகள் கொண்டதாக இருக்கட்டும்:

1. $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ காண்க மற்றும் பூஜ்ஜியத்திற்கு சமபடுத்த மற்றும் x, y மற்றும் z ன் மதிப்புகளைப் பெறவும்.

2. $A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, B = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, C = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, F = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}, G = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}, H = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ காண்க.

இப்போது, நம்மிடம் பின்வரும் வகைகள் உள்ளன:

$$a. \quad (a, b, c) \text{ ல் } u = f(x, y, z) \text{ சிறுமமாக இருக்க, கோவைகள் } A, \begin{vmatrix} A & H \\ H & B \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A & H & G \\ H & B & F \\ G & F & C \end{vmatrix}, \text{ ல் } (a, b, c)$$

நேர்மறையாக இருக்க வேண்டும்.

b. (a, b, c) ல் $u = f(x, y, z)$ பெருமமாக இருக்க, கோவைகள் $A, \begin{vmatrix} A & H \\ H & B \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A & H & G \\ H & B & F \\ G & F & C \end{vmatrix}$, ல்

(a, b, c) மாறி மாறி எதிர்மறை மற்றும் நேர்மறை யாக இருக்க வேண்டும்.

c. வகைகள் (a) மற்றும் (b) திருப்தி அடையவில்லை என்றால், நம்மிடம் பெருமம் அல்லது சிறுமம் இல்லை.

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 4.75 : $u = (x + y + z)^3 - 3(x + y + z) - 24xyz + a^3$ என்ற சார்பு $(1, 1, 1)$ ல் பெருமத்தையும் மற்றும் $(-1, -1, -1)$ ல் சிறுமத்தையும் பெற்றுள்ளது எனக் காட்டு.

தீர்வு : $u = (x + y + z)^3 - 3(x + y + z) - 24xyz + a^3$... (1)

பிறகு $\frac{\partial u}{\partial x} = 3(x + y + z)^2 - 3 - 24yz$... (2)

$\frac{\partial u}{\partial y} = 3(x + y + z)^2 - 3 - 24xz$... (3)

மற்றும் $\frac{\partial u}{\partial z} = 3(x + y + z)^2 - 3 - 24xy$... (4)

u ன் பெரும மற்றும் சிறும மதிப்புக்களுக்காக, நாம் பெறுவது

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z}$$

சமன்பாடு (2), (3) மற்றும் (4), லிருந்து, நாம் பெறுவது

$$x = y = z$$

$y = x$ மற்றும் $z = x$ என (2) ல் பிரதியிட, நாம் பெறுவது

$$27x^2 - 3 - 24x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \pm 1$$

$\Rightarrow x = y = z = 1$ மற்றும் $x = y = z = -1$ ஆகியவை (2), (3) மற்றும் (4) ன் விடைகள்.

எனவே நிலையான புள்ளிகள் $(1, 1, 1)$ மற்றும் $(-1, -1, -1)$.

இப்போது $A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6(x + y + z),$

$B = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6(x + y + z)$

$C = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 6(x + y + z),$

$F = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 6(x + y + z) - 24x$

$G = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = 6(x + y + z) - 24y,$

$H = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 6(x + y + z) - 24z$

$(1, 1, 1)$ க்கு,

$A = 18, B = 18, C = 18, F = -6, G = -6$ மற்றும் $H = -6$

$\therefore$ புள்ளி $(1, 1, 1)$ ல் நாம் பெறுவது,

$$A = 18 > 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} A & H \\ H & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 18 & -6 \\ -6 & 18 \end{vmatrix} = 288 > 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} A & H & G \\ H & B & F \\ G & F & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 18 & -6 & -6 \\ -6 & 18 & -6 \\ -6 & -6 & 18 \end{vmatrix} = 3426 > 0$$

எனவே மூன்று கோவைகளும் நேர்மறையானவை என்பதால், (1, 1, 1) என்ற புள்ளியில் u சிறுமம்.

மீண்டும் (-1, -1, -1) க்கு,

$$A = -18, B = -18, C = -18, F = 6, G = 6 \text{ மற்றும் } H = 6$$

∴ புள்ளி (-1, -1, -1) ல் நாம் பெறுவது,

$$A = -18 < 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} A & H \\ H & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -18 & 6 \\ 6 & -18 \end{vmatrix} = 288 > 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} A & H & G \\ H & B & F \\ G & F & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -18 & 6 & 6 \\ 6 & -18 & 6 \\ 6 & 6 & -18 \end{vmatrix} = -3426 < 0$$

எனவே மூன்று கோவைகளும் மாறி மாறி எதிர்மறை மற்றும் நேர்மறையானவை.

எனவே (1, 1, 1) என்ற புள்ளியில் u பெருமம்

எடுத்துக்காட்டு 4.76 : கொடுக்கப்பட்ட கோளத்தில் பொதிக்கப்பட்டுள்ள, அதிகபட்ச கொள்ளளவு கொண்ட செவ்வக திண்மம், ஒரு கனசதுரம் என நிரூபி.

தீர்வு : நீங்களே முயற்சிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 4.77 : $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2 - 8x - 12y + 4$ என்ற சார்பிற்கு ஒப்பீட்டளவில் பெருமம் மற்றும் சிறுமம் மதிப்புகளை, $x = 2, y = 3$ மற்றும் ஆய அச்சுகள் ஆகிய கோடுகளால் வரையப்பட்ட செவ்வக பகுதிக்குள் காண்க.

தீர்வு : நீங்களே முயற்சிக்கலாம்

விடை : கொடுக்கப்பட்ட செவ்வக பகுதியில், (1, 2/3) எனும் புள்ளியில், சார்பின் ஒப்பீட்டு சிறும மதிப்பு, $= -12$

எடுத்துக்காட்டு 4.78 : மூன்று நேர்மறை எண்களின் கூட்டுத்தொகை நிலையானது. அவைகள் சமமாக இருக்கும்போது, அவைகளின் பெருக்கல், பெருமம் என்பதைக் காட்டு.

தீர்வு : நீங்களே முயற்சிக்கலாம்

எடுத்துக்காட்டு 4.79 : முதல், இரண்டாவதின் சதுரம் மற்றும் மூன்றாவதின் கன சதுரம், ஆகிவற்றின் தொடர்ச்சியான பெருக்கல் பெருமம் ஆக இருக்குமாறு, 24-ஐ மூன்று பகுதிகளாக பிரிக்கவும்.

தீர்வு : 24 ஐ x, y மற்றும் z பகுதிகளாகப் பிரிக்கலாம்.

$$\text{பிறகு} \quad x + y + z = 24 \quad \dots(1)$$

$$\text{கொடுக்கப்பட்டுள்ளது,} \quad f(x, y, z) = x^3 y^2 z$$

$$\Rightarrow \quad f(x, y, z) = x^3 y^2 (24 - x - y) \quad [(1) \text{ லிருந்து}]$$

$$\begin{aligned}\text{இப்போது} \quad \frac{\partial f}{\partial x} &= 72x^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= r = 144xy^2 - 12x^2y^2 - 6xy^3, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 48x^3y - 2x^4y - 3x^3y^2, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= t = 48x^3 - 2x^4 - 6x^3y \\ s &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 144x^2y - 8x^3y - 9x^2y^2\end{aligned}$$

பெரும மற்றும் சிறும மதிப்புக்களுக்காக, நாம் பெறுவது

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow (72 - 4x - 3y) x^2 y^2 = 0 \quad \dots(2)$$

$$\text{மற்றும்} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow x^3 y (48 - 2x - 3y) = 0$$

$$\Rightarrow 48 - 2x - 3y = 0, x = 0, y = 0 \quad \dots(3)$$

(2) மற்றும் (3)யை தீர்க்க, நாம் $x = 12, y = 8$ போன்றவற்றைப் பெறுகிறோம்.

(12, 8) ல், $r, t - s^2 = +ve$ மற்றும் $r < 0$, ஆதலால், (12, 8) ல், $f(x, y)$ பெருமம்.

$x = 12$ மற்றும் $y = 8$ யை (1) ல் பிரதியிட, நாம் பெறுவது $z = 4$.

எனவே, $x = 12, y = 8$ மற்றும் $z = 4$,

24 ன் பிரிவு, $f(x, y, z)$ ன் பெருமம்.

எடுத்துக்காட்டு 4.80 : கொடுக்கப்பட்ட திறனைக் கொண்டுள்ள, மேலே திறக்கப்பட்ட ஒரு செவ்வகப் பெட்டியின் கட்டுமானத்திற்கு குறைந்தபட்ச பொருள் தேவைப்படும் வகையில் அதன் பரிமாணங்களைக் கண்டறியவும்.

தீர்வு : நீங்களே முயற்சிக்கலாம்.

பயிற்சி 4.7

- $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ என்ற சார்பின் நிலையான புள்ளிகளைக் கண்டறிந்து, அவற்றின் தன்மையை ஆராயுங்கள்.
- $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x^2 - 15y^3 + 72x$ என்ற சார்பை அறுதி மதிப்புக்காக ஆராயவும்.
- $f(x, y) = xy e^{-(2x+3y)}$ என்ற சார்பின் பெரும மதிப்பை காண்க.
- பின்வருபவற்றின் பெருமம் மற்றும் சிறுமம் பற்றி விவாதிக்கவும்:
 - $u(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{x} + \frac{2}{y}$
 - $u(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 3x + 4y$
 - $f(x, y) = 2 \sin \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x+y) + \cos(x+y)$
 - $f(x, y) = x^2 + y^2 + 6x + 12$

5. $a/7, 2a/7, 3a/7$, ஆகியவை $u = ax^2y^2z^3 - x^2y^2z^3 - xy^3z^3 - 3xy^2z^4$ என்ற சார்பின் நிலையான புள்ளிகள் எனக் காட்டு மற்றும் இவை ஒரு அறுதிப் புள்ளியா என்பதைத் தீர்மானிக்கவும்.
6. $u = y^2 + 2z^2 - 5x^4 + 4x^5$ என்ற சார்பின் பெருமம் மற்றும் சிறுமம் மதிப்புக்களைக் காண்க.
7. $u = \sin^m A \sin^n B \sin^p C$ பெருமம் என்றவாறு, சமதளக்கோணம் ABC யைக் காண்க.
8. ஆரத்தின் r , கோளத்தில் பொறிக்கக்கூடிய அதிகபட்ச அளவின் சிலிண்டரின் உயரம் $\frac{2r}{\sqrt{3}}$ என்பதை நிரூபிக்கவும்.
9. $x = 0, y = 0$ மற்றும் $y = 9 - x$ கோடுகளால் வரையறுக்கப்பட்ட முதல் கால் பகுதியில் உள்ள முக்கோண தட்டில் $u(x, y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$ இன் முழுமையான பெருமம் மற்றும் சிறும மதிப்புகளைக் கண்டறியவும்.
10. $x^2 + y^2 + 6x - 12 = 0$ என்ற சார்பு சிறும மதிப்பை பெரும் வகையில் x மற்றும் y ன் மதிப்பைக் காண்க. மேலும் அச்சார்பின் சிறும மதிப்பைக் காண்க.
11. ஒரு மரத்தின் தண்டு நீளம் L மீட்டர் அதன் முனைகளின் r_1 மற்றும் r_2 ஆரங்களுடன், வட்டமான கூம்பின் விரக்தியின் வடிவத்தைக் கொண்டுள்ளது மீட்டர், இங்கு $r_1 > r_2$, பீம் பெரும அளவைக் கொண்டிருக்கும் வகையில் மரத்தின் தண்டிலிருந்து வெட்டப்பட்ட ஒரே மாதிரியான சதுர குறுக்குவெட்டின் பீமின் நீளத்தைக் கண்டறியவும்.
12. கம்பியின் உருளை சுருளின் மின்சார நேர மாறிலி $\alpha = \frac{mxyz}{ax + by + cz}$ என தோராயமாக வெளிப்படுத்தப்படலாம். இங்கு z என்பது சுருளின் அச்ச நீளம், y என்பது வெளி மற்றும் உள் ஆரம் இடையே உள்ள வேறுபாடு மற்றும் x என்பது சராசரி ஆரம். a, b, c மற்றும் m ஆகியவை நேர்மறை மாறிலிகளைக் குறிக்கின்றன. சுருளின் கொள்ளளவு நிலையானது எனில், நேரத்தை நிலையானதாக மற்றும் முடிந்தவரை பெரியதாக இருக்குமாரு, x மற்றும் y இன் மதிப்பை கண்டறி.
13. $ABCD$ என்பது மறு நுழைவு கோணம் இல்லாத ஒரு நாற்புறமாகும் மற்றும் P அதன் தளத்தில் ஒரு புள்ளியாகும். உச்சநிலைகளிலிருந்து தூரங்களின் தொகை மிகக் குறைவாக இருக்குமாறு என்ற புள்ளியின் நிலையைக் கண்டறியவும்.
14. ஒரு தளம் $\triangle ABC$ ல், $\cos A \cos B \cos C$ இன் பெரும மதிப்பைக் கண்டறியவும்.
[குறிப்பு : $A + B + C = \pi$]
15. தொடக்கத்தில் இல்லாத பெரும அல்லது சிறும புள்ளிகளுக்கு, $u(x, y) = x^3y^2(6 - x - y)$ என்ற சார்பை ஆராயுங்கள்.
16. பின்வருவனவற்றின் அறுதி மதிப்புகளைப் பற்றி விவாதிக்கவும்:

i. $x^3 + y^3 + 3xy$	ii. $x^3 + y^3 - 63(x + y) + 12xy$
iii. $x^3y^2(1 - x - y)$	iv. $x^2 + 2xy + 2y^2 + 2x + y$
v. $\sin x + \sin y + \sin(x + y)$	vi. $x^3 - y^2 - 7x^2 + 4y + 15x - 13$
vii. $x^2y^2 - 5x^2 - 8xy - 5y^2$	
17. $u = (ax^2 + by^2)^{-x^2 - y^2}$, $a \neq b$, ன் பெருமம் அல்லது சிறுமம் பற்றி விவாதிக்கவும். $a = b = 1$ எனில் என்ன நடக்கும்?
18. $\left[\frac{1}{2e} \left(\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} + \frac{c^2}{\gamma^2} \right) \right]^{1/2}$ ன் பெரும மதிப்பை $(ax + by + cz)e^{-(\alpha^2x^2 + \beta^2y^2 + \gamma^2z^2)}$ எனக் காட்டு

விடைகள்

1. $(0, 0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}); (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ மற்றும் $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ என்ற புள்ளியில் z சிறுமம்
2. $(4, 0); 112$ மற்றும் $(6, 0); 108$
3. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right); \frac{1}{6e^2}; (0, 0); \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ என்ற புள்ளியில் f க்கு பெரும மதிப்பு உள்ளது
4. i. $(1, 1)$ ல் சிறுமம் ii. $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}\right)$ ல் சிறுமம்.
iii. $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$ மற்றும் $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ல் சிறுமம். iv. $(-3, 0)$ ல் சிறும மதிப்பு = 3
5. பெரும மதிப்பு = $\frac{108a^7}{7^7}$
6. $(1, 0, 0)$ ல் சிறுமம்; $(0, 0, 0)$ ல் பெருமம் அல்லது சிறுமம் இல்லை.
7. $= \frac{\tan A}{m} = \frac{\tan B}{n} = \frac{\tan C}{p}$ எனில் பெருமம்
9. $(1, 1)$ ல் பெரும மதிப்பு = 4
10. $(-3, 0)$, சிறும மதிப்பு = 3
11. $\frac{8r_1^3 l}{27(r_1 - r_2)}$
13. P என்பது நாற்புறத்தின் மூலைவிட்டங்களின் குறுக்குவெட்டு புள்ளியாகும்
14. $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ ல் பெரும மதிப்பு = $1/8$
15. $(3, 2)$ ல் பெருமம்.
16. i. $(-1, -1)$ ல் பெரும மதிப்பு = 1
ii. $(-7, -7)$ ல் பெரும மதிப்பு = 784 ; $(3, 3)$ ல் சிறும மதிப்பு = -216
iii. $(0, 0)$ ல் அறுதி மதிப்பு இல்லை. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ ல் பெரும மதிப்பு = $\frac{1}{432}$
iv. $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ல் சிறும மதிப்பு = $-\frac{5}{4}$
v. $x = y = \frac{\pi}{3}$ ல் பெருமம்
vi. $(3, 2)$ -ல் பெருமம் அல்லது சிறுமம் இல்லை; $x = 5/3, y = 2$ ல் பெருமம் அல்லது சிறுமம் இல்லை
vii. $x = 0, y = 0$ ல் பெருமம்; $(3, 3), (-3, -3)$ மற்றும் $(1, -1)$ ல் பெருமம்
17. a மற்றும் b ஆகியவை எதிர்மறை அல்லது நேர்மறை யைப் பொறுத்து, $(0, 0)$ ல் பெருமம் அல்லது சிறுமம். $b > 0$ மற்றும் $a > 0$ (அ) $b < 0$ மற்றும் $a < 0$ வைப் பொறுத்து $(0, \pm 1)$ ல் பெருமம் அல்லது சிறுமம். $a > 0$ மற்றும் $b < a$ (அ) $a < 0$ மற்றும் $b > a$ வைப் பொறுத்து $(\pm 1, 0)$ ல் பெருமம் அல்லது சிறுமம். $a = b = 1$, எனில், $x^2 + y^2 = 1$ எனும்போது அனைத்து புள்ளிகளிலும் பெருமம் மற்றும் $(0, 0)$ ல் சிறுமம்.

சுவாரஸ்யமான உண்மைகள்

- ♦ பெருமம் மற்றும் சிறுமம் பயன்படுத்தி காணப்படும் அதிகபட்ச மற்றும் குறைந்தபட்ச மதிப்பு ஒன்றாக அறுதி அறியப்படுகிறது.
- ♦ கஜகஸ்தானின் அஸ்டானாவில் உலக கண்காட்சி 2017 இல் ஒரு சிற்பம் காட்டப்பட்டது, இது பெருமம் மற்றும் சிறுமம்பெயரிடப்பட்டது, அதன் வடிவமைப்பு தன்னை தனித்துவமானது.

Extreme
Values-I**அன்றாட வாழ்வில் பயன்பாடுகள் (பெருமம், சிறுமம் மற்றும் சேணம் புள்ளிகளின் பயன்கள்)**

- ♦ மருத்துவத்தில் மருந்துகளின் செயல்திறன் / நோய்கள் பரவுதலை ஆய்வு செய்வதில் பயன்படுகிறது. (அதிகபட்ச திறன் அனுசரிக்கப்பட்ட பிறகு எவ்வளவு நேரத்தில்).
- ♦ அணுசக்திதுறையில் சிதைவு பற்றிய ஆய்வு.
- ♦ மக்கள் தொகை வளர்ச்சி வளைவு.
- ♦ தொழில் துறையில், தொழில் தங்கள் இலாபங்களை அதிகப்படுத்துவதன் மூலம் அல்லது இழப்பைக் குறைப்பதன் மூலம் இந்த கருத்தைப் பயன்படுத்துகிறது. பொருட்களின் விலைகள் மற்றும் அவை எவ்வளவு பங்குவைத்துகின்றன என்பதை மதிப்பிடுகிறது.
- ♦ ஒரு சார்பின் அல்லது மேற்பரப்பின், ஒரு புள்ளி நிலையான புள்ளி ஆனால் அறுதி புள்ளி அல்ல எனில், அது சேணம் புள்ளிகள் என்று அழைக்கப்படுகிறது. எ.கா. கைக்குட்டை மற்றும் குரங்கு சேணம் ஆகியவை சேணம் புள்ளிகளை உள்ளடக்கிய சில பரப்புகளாகும்.

4.9.2 நிபந்தனைகளுக்கு உட்படுத்தப்பட்ட சார்புகளின் பெருமம் மற்றும் சிறுமம்

பல மாறிகளின் சார்புகளின் பெருமம் மற்றும் சிறுமத்தை வெவ்வேறு வடிவத்தில் தீர்மானிப்பதில் உள்ள சிக்கல்களை இங்கே கருத்தில் கொள்வோம்.

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \dots(1)$$

என்பது n மாறிகள் $x_1, x_2, \dots, x_n$ ஆகியவற்றின் சமன்பாடாகும், இவை அனைத்தும் சார்பற்றவை அல்ல, ஆனால் அவை m ($m < n$) சமன்பாடுகளால் இணைக்கப்பட்டவை

(நிபந்தனைகள்)

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ \phi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ \dots &\dots \dots \\ \phi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots(2)$$

எனவே $n - m$ மாறிகள் மட்டுமே சார்பற்றவை மற்றும் (1) மற்றும் m சமன்பாடுகளுக்கு இடையில் (2) இல் m சார்ந்த மாறிகளை நாம் அகற்றலாம். இவ்வாறு u ஆனது, $(n - m)$ மாறிகளின் சார்பாக

எந்த நிபந்தனையும் இல்லாமல் மாறுகிறது. மேலும் கணக்கு இப்போது $(n - m)$ சார்பற்ற மாறிகளின் சார்பின் பெருமம் மற்றும் சிறுமத்தின் மதிப்பீட்டிற்கு சமம். மாறிகள் அகற்றும் முறை மிகவும் சிரமமாக உள்ளது மற்றும் சில நேரங்களில் அது சாத்தியமற்றது. எனவே, லாக்ரேஞ்சின் தீர்மானிக்கப்படாத பெருக்கிகளின் முறை என அழைக்கப்படும் முறையை கீழே விளக்குகிறோம்.

4.9.3 லாக்ரேஞ்சின் தீர்மானிக்கப்படாத பெருக்கிகளின் முறை

u -க்கான பெருமம் அல்லது சிறுமம்,

$$du = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = 0 \quad \dots(3)$$

வகையீடுகள் $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ அனைத்தும் சார்பற்றவை அல்ல, ஆனால் பின்வரும் சமன்பாடுகளால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன.

$$\left. \begin{aligned} d\phi_1 &= \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n} dx_n = 0 \\ d\phi_2 &= \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_n} dx_n = 0 \\ &\dots\dots\dots \\ d\phi_m &= \frac{\partial \phi_m}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \phi_m}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \phi_m}{\partial x_n} dx_n = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots(4)$$

இது (2) இல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள m சமன்பாடுகளை வகைப்படுத்துவதன் மூலம் பெறப்படுகிறது.

சமன்பாடுகள் (4) ஐ சில நிபந்தனைகளுடன் $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ஆல் முறையே பெருக்கி அவற்றை (3) உடன் கூட்ட,

$$P_1 dx_1 + P_2 dx_2 + \dots + P_n dx_n = 0 \quad \dots(5)$$

இங்கு
$$P_r = \frac{\partial f}{\partial x_r} + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_r} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x_r} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial x_r}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ தன்னிச்சையானது, இவை m சமன்பாடுகளை திருப்திப்படுத்துகின்றன என்று தேர்வு செய்யலாம்.

$$P_1 = P_2 = \dots = P_m = 0 \quad \dots(6)$$

சமன்பாடு (5) பின்வருமாறு குறைகிறது.

$$P_{m+1} dx_{m+1} + P_{m+2} dx_{m+2} + \dots + P_n dx_n = 0 \quad \dots(7)$$

ஏற்கனவே விளக்கப்பட்டுள்ளபடி, $(n - m)$ என்பது n மாறிகளில் சார்பற்றவை (அவற்றில் எதுவாக இருந்தாலும் சரி). நாம் $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ ஐ சார்பற்ற மாறிகள் என்று கருதுகிறோம், இதன் விளைவாக $dx_{m+1}, dx_{m+2}, \dots, dx_n$ சமன்பாட்டு (7) ல் தனித்தனியாக பூஜ்ஜியமாக இருக்க வேண்டும். எனவே,

$$P_{m+1} = P_{m+2} = \dots = P_n = 0 \quad \text{என்று நாம் வைத்திருக்க வேண்டும்.}$$

இந்த வழியில், நாம் $(n + m)$ சமன்பாடுகளைப் பெறுகிறோம்.

$$P_1 = P_2 = \dots = P_n = 0 \quad \text{மற்றும்} \quad \phi_1 = \phi_2 = \dots = \phi_m = 0$$

இது m பெருக்கிகள் $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ மற்றும் n மாறிகள் $x_1, x_2, \dots, x_n$ ஆகியவற்றிற்கான மதிப்புகள் $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ நிபந்தனைகளின் கீழ் (2) பெருமம் அல்லது சிறுமம் உள்ளது என்பதை தீர்மானிக்கிறது.

குறிப்புரை : மேலே உள்ள சமன்பாடுகள், பெருமம் அல்லது சிறுமம் செயல்பாட்டைக் கொண்ட மாறிகளின் மதிப்புகளைத் தீர்மானிக்கும் வசதியாக, பின்வருமாறு வசதியாக எழுதப்படலாம்:

சமன்பாடுகள் (4) ஐ முறையே $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ஆல் பெருக்கி மற்றும் அவற்றை (3) உடன் சேர்த்தால், நமக்கு கிடைப்பது,

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial x_1} \right] dx_1 + \left[\frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial x_2} \right] dx_2 + \dots + \left[\frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x_n} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial x_n} \right] dx_n = 0$$

$$\text{அல்லது } \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = 0 \quad \dots(A)$$

பின்வருமாறு சார்பு F ஐ வரையறுக்கலாம்

$$F = f + \lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2 + \dots + \lambda_m \phi_m \quad \dots(B)$$

வெளிப்படையாக, F என்பது n மாறிகள் $x_1, x_2, \dots, x_n$ ன் சார்பு ஆகும்.

மாறிலிகள் $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ நம் விருப்பப்படி உள்ளன, m சமன்பாடுகளை திருப்தி செய்ய அவற்றைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_3} = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_m} = 0 \quad \dots(C)$$

சமன்பாடு (A) ஆனது,

$$\frac{\partial f}{\partial x_{m+1}} dx_{m+1} + \frac{\partial f}{\partial x_{m+2}} dx_{m+2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = 0 \quad \dots(D)$$

என்று குறைகிறது.

n மாறிகளில் $(n - m)$ என்பது சார்பற்றவையாக இருப்பதால், அவை $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ ஆக இருக்கட்டும்.

எனவே, (D)ல் $dx_{m+1}, dx_{m+2}, \dots, dx_n$ ன் குணகங்கள் தனித்தனியாக பூஜ்ஜியமாக இருக்க வேண்டும்.

$$\frac{\partial f}{\partial x_{m+1}} = \frac{\partial f}{\partial x_{m+2}} = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

எனவே, சார்பு பெருமம் அல்லது சிறுமமாக இருப்பதற்கான நிபந்தனைகள்,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_3} = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \quad \dots(E)$$

இது m சமன்பாடுகளுடன் (2) மாறிகளின் தேவையான மதிப்புகளைத் தீர்மானிக்கிறது.

ஆனால் சமன்பாடுகள் (E) என்பது நிபந்தனைகளாகும். F என்பது n சார்பற்ற மாறிகள் $x_1, x_2, \dots, x_n$ $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ என்பது m கட்டுப்பாடுகளுக்கு உட்பட்டு அதிகரிக்கும் அல்லது குறையும்.

நிபந்தனை (2) அதிகபட்சம் அல்லது குறைந்தபட்ச F ஐ கண்டுபிடிப்பதற்கு சமம்.

செயல் முறை : $u = F(x, y, z)$ என்பது x, y, z ஆகிய மூன்று மாறிகளின் சார்பாக இருக்கட்டும், அவை $\phi(x, y, z) = 0$ என்ற உறவால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன.

- $U = F(x, y, z) + \lambda \phi(x, y, z)$ என்ற புதிய செயல்பாட்டை உருவாக்கவும்.
- $\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \frac{\partial U}{\partial y} = 0$ மற்றும் $\frac{\partial U}{\partial z} = 0$ என்ற சமன்பாடுகளைக் கண்டுபிடிக்கவும்.
- $\phi(x, y, z) = 0$, உடன் மேலே உள்ள சமன்பாடுகளை தீர்க்கவும் x, y, z ன் மதிப்புகள் $F(x, y, z)$ இன் நிலையான மதிப்புகள் கொடுக்கும்.

குறிப்புரை : லாகிராஞ்சின் முறை பெரும்பாலும் பயன்பாடுகளில் மிகவும் பயனுள்ளதாக இருப்பினும், நிலையான புள்ளியின் தன்மையை நாம் தீர்மானிக்க முடியாது. இது சில நேரங்களில் பிரச்சினைகளின் இயற்பியல் பரிசீலனையில் இருந்து தீர்மானிக்கப்படலாம்.

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 4.81: $u(x, y, z) = \sin x \sin y \sin z$, என்ற சார்பின் பெருமம் மற்றும் சிறுமத்தினை விவாதி. இங்கு x, y, z ஆகியவை முக்கோணத்தின் கோணங்களாகும்.

தீர்வு : இங்கு $u(x, y, z) = \sin x \sin y \sin z$, ... (1)

என்பது $x + y + z = \pi$... (2)

என்ற உறவின் மூலம் மாறிகள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன.

u க்கான பெருமம் அல்லது சிறுமம்,

$$du = \cos x \sin y \sin z dx + \sin x \cos y \sin z dy + \sin x \sin y \cos z dz \quad \dots (3)$$

(2) லிருந்து,

$$dx + dy + dz = 0 \quad \dots (4)$$

(4) ஐ λ ஆல் பெருக்கி (3) உடன் சேர்த்து, பின்னர் dx, dy, dz இன் குணகங்களை பூஜ்ஜியத்திற்கு சமன் செய்தால், நமக்கு கிடைப்பது,

$$\cos x \sin y \sin z + \lambda = 0$$

$$\sin x \cos y \sin z + \lambda = 0$$

$$\sin x \sin y \cos z + \lambda = 0$$

இந்த சமன்பாடுகளிலிருந்து,

$$-\lambda = \cos x \sin y \sin z = \sin x \cos y \sin z = \sin x \sin y \cos z$$

அதாவது, $\cot x = \cot y = \cot z$ ($\sin x \sin y \sin z$ ஆல் வகுக்க கிடைப்பது.)

அதாவது, $x = y = z = \frac{\pi}{3}$, ((2)-லிருந்து)

x, y, z ஆகியவற்றுக்கு இடையேயான உறவு (2) மட்டுமே கொடுக்கப்பட்டிருப்பதால், x, y சார்பற்றவை மற்றும் z சார்பானது என நாம் கருதலாம். இப்போது பெருமம் அல்லது சிறுமம் தீர்மானிக்க, நாம் r, s, t , ஐ (2) ஐ வகைப்படுத்துவதிலிருந்து கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

$$1 + \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \text{ மற்றும் } 1 + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$(1) \text{ லிருந்து, } \frac{\partial u}{\partial x} = \cos x \sin y \sin z + \sin x \sin y \cos z \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$= \cos x \sin y \sin z - \sin x \sin y \cos z$$

$$\left[\because \frac{\partial z}{\partial x} = -1 \right]$$

$$= \sin y (\cos x \sin z - \sin x \cos z) = \sin y \sin(z - x)$$

$$\text{மற்றும் } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sin y \cos(z - x) \left(\frac{\partial z}{\partial x} - 1 \right) = -2 \sin y \cos(z - x)$$

$$\text{இதேபோல், } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 \sin x \cos(z - x)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \cos y \sin(z - x) + \sin y \cos(z - x) \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

$$= \cos y \sin(z - x) - \sin y \cos(z - x)$$

$$= \sin(z - x - y)$$

$$x = y = z = \frac{\pi}{3} \text{ என பிரதியிட,}$$

$$r = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2 \sin \frac{\pi}{3} \cos 0 = -\sqrt{3}$$

$$t = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 \sin \frac{\pi}{3} \cos 0 = -\sqrt{3}, \quad s = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore rt - s^2 = (-\sqrt{3})^2 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4} > 0$$

$$r < 0 \text{ மற்றும் } rt - s^2 > 0.$$

$$\therefore x = y = z = \frac{\pi}{3} \text{ ல் } u \text{ ஆனது பெருமம்.}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.82 : $xy + yz + zx = 3a^2$ என்ற நிபந்தனைக்கு உட்பட்டு, $u = x^2 + y^2 + z^2$ -ன் பெரும அல்லது சிறும மதிப்பைக் கண்டறியவும்.

தீர்வு :

$$\text{இங்கு } u = x^2 + y^2 + z^2 \quad \dots(1)$$

$$\text{மற்றும் } \phi = xy + yz + zx - 3a^2 \quad \dots(2)$$

$$F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2) + \lambda(xy + yz + zx - 3a^2)$$

என்ற லாக்ரேஞ்சின் செயல்பாட்டைக் கவனியுங்கள்.

நிலையான புள்ளிகளுக்கு, $dF = 0$

$$[2x + \lambda(y + z)] dx + [2y + \lambda(z + x)] dy + [2z + \lambda(x + y)] dz = 0$$

$$\therefore 2x + \lambda(y + z) = 0 \quad \dots(3)$$

$$2y + \lambda(z + x) = 0 \quad \dots(4)$$

$$2z + \lambda(x + y) = 0 \quad \dots(5)$$

(3) ஐ y ஆலும், (4) ஐ z ஆலும் மற்றும் (5) ஐ x ஆலும் பெருக்கி, கூட்ட, நமக்கு கிடைப்பது,

$$2(xy + yz + zx) + \lambda(y^2 + yz + zx + z^2 + x^2 + yx) = 0$$

$$\Rightarrow 2(3a^2) + \lambda(u + 3a^2) = 0 \quad \dots(A)$$

$$[\because xy + yz + zx = 3a^2 \text{ மற்றும் } u = x^2 + y^2 + z^2]$$

(3) ஐ x ஆலும், (4) ஐ y ஆலும் மற்றும் (5) z ஐ ஆலும் பெருக்கி, கூட்ட, நமக்கு கிடைப்பது,

$$u = -3a^2\lambda$$

$$(A) \Rightarrow 6a^2 + \lambda(-3a^2\lambda + 3a^2) = 0$$

$$\Rightarrow 6a^2 - 3a^2\lambda(\lambda - 1) = 0$$

$$\Rightarrow 2 - \lambda^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1, 2$$

$$\lambda = -\frac{u}{3a^2} \text{ ல் } \lambda = -1 \text{ என பிரதியிட } \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3a^2} = 1; u = 3a^2 \text{ என்பது பெரும் மதிப்பு}$$

$$\lambda = 2, \text{ என பிரதியிட } u = -6a^2 \text{ என்பது சிறும மதிப்பு.}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.83 : $ax + by + cz = P$ எனில் $x^2 + y^2 + z^2$ ன் பெரும் மதிப்பைக் கண்டறியவும்.

தீர்வு : $u(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ என எடுத்துக்கொள்வோம்.

கொடுக்கப்பட்டது,

$$\phi = ax + by + cz - P \quad \dots(1)$$

பெருமம் அல்லது சிறுமத்திற்கு,

$$du = 2xdx + 2ydy + 2zdz = 0$$

$$\text{மற்றும் } adx + bdy + cdz = 0$$

எனவே, லாக்ரேஞ்சின் தீர்மானிக்கப்படாத பெருக்கிகளின் முறையைப் பயன்படுத்த,

$$2x + \lambda a = 0, 2y + \lambda b = 0 \text{ மற்றும் } 2z + \lambda c = 0 \quad \dots(2)$$

இந்த சமன்பாடுகளை முறையே x, y, z ஆல் பெருக்கி கூட்டினால் நமக்கு கிடைப்பது,

$$2(x^2 + y^2 + z^2) + \lambda(ax + by + cz) = 0$$

$$\Rightarrow 2u_m + \lambda P = 0 \quad \dots(3)$$

um என்பது u ன் சிறும மதிப்பை குறிக்கிறது. மேலும் (1) மற்றும் (2) இருந்து, நாம் பெறுவது,

$$a\left(-\frac{\lambda a}{2}\right) + b\left(-\frac{\lambda b}{2}\right) + c\left(-\frac{\lambda c}{2}\right) = P$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{2P}{a^2 + b^2 + c^2}$$

இந்த மதிப்புகளை சமன்பாடு (3) ல் பிரதியிட,

$$u_m = \frac{P^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

இது குறைந்தபட்ச மதிப்பு (மற்றும் அதிகபட்சம் அல்ல) வடிவியல் கருத்தில் இருந்து, நீங்கள் விமானத்தில் (1) தோற்றத்திலிருந்து ஒரு புள்ளியின் தூரத்தின் சதுரத்தைக் குறிக்கிறது. புள்ளி முடிவிலியிலிருந்து தோற்றத்தை நோக்கி நெருங்கும்போது இந்த தூரம் குறைகிறது மற்றும் குறைந்தபட்சம் அடைந்த பிறகு மீண்டும் புள்ளி விலகும்போது மடிப்புகளில் தொடங்குகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 4.84 : $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ மற்றும் $lx + my + nz = 0$ நிபந்தனைகளுக்கு உட்பட்டு $x^2 + y^2 + z^2$ இன் பெரும மற்றும் சிறும மதிப்பைக் கண்டறியவும்.

தீர்வு :

$$\text{இங்கே} \quad u = x^2 + y^2 + z^2 \quad \dots(1)$$

மற்றும் மாறிகள் x, y மற்றும் z ஆகியவற்றுக்கு இடையேயான உறவுகள்

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1 \quad \dots(2)$$

$$\text{மற்றும்} \quad lx + my + nz = 0 \quad \dots(3)$$

பெருமம் மற்றும் சிறுமத்திற்கு,

$$du = 0$$

$$\Rightarrow 2x dx + 2y dy + 2z dz = 0$$

$$\Rightarrow x dx + y dy + z dz = 0 \quad \dots(4)$$

(2) மற்றும் (3) லிருந்து,

$$ax dx + by dy + cz dz = 0 \quad \dots(5)$$

$$\text{மற்றும்} \quad l dx + m dy + n dz = 0 \quad \dots(6)$$

(4) ஐ 1 ஆலும், (5) ஐ l_1 ஆலும் மற்றும் (6) ஐ l_2 ஆலும் பெருக்கி, கூட்ட, நமக்கு கிடைப்பது,

$$(x dx + y dy + z dz) + l_1 (ax dx + by dy + cz dz) + l_2 (l dx + m dy + n dz) = 0$$

$$\text{அல்லது} (x + a l_1 x + l l_2) dx + (y + b l_1 y + m l_2) dy + (z + c l_1 z + n l_2) dz = 0$$

இப்போது dx, dy, dz இன் குணகங்களை பூஜ்ஜியத்திற்கு சமன் செய்ய,

$$x + a l_1 x + l l_2 = 0 \quad \dots(7)$$

$$y + b l_1 y + m l_2 = 0 \quad \dots(8)$$

$$\text{மற்றும்} \quad z + c l_1 z + n l_2 = 0 \quad \dots(9)$$

சமன்பாடுகள் (7), (8) மற்றும் (9) ஐ முறையே x, y மற்றும் z ஆல் பெருக்கி, பின்னர் கூட்டக் கிடைப்பது,

$$(x^2 + y^2 + z^2) + l_1 (ax^2 + by^2 + cz^2) + l_2 (lx + my + nz) = 0$$

$$\Rightarrow u + l_1 \cdot 1 + l_2 \cdot (0) = 0 \quad [(1), (2) \text{ மற்றும் } (3) \text{ லிருந்து}]$$

$$\Rightarrow u = -l_1$$

(7), (8) மற்றும் (9) சமன்பாடுகளில் l_1 ஐ பிரதியிட நமக்கு கிடைப்பது,

$$x = \frac{l_2 l}{a u - 1}, y = \frac{l_2 m}{b u - 1}, z = \frac{l_2 n}{c u - 1} \quad \dots(10)$$

$$(3) \text{ மற்றும் } (10)\text{-லிருந்து,} \quad \frac{l_2 l^2}{a u - 1} + \frac{l_2 m^2}{b u - 1} + \frac{l_2 n^2}{c u - 1} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{l^2}{au-1} + \frac{m^2}{bu-1} + \frac{n^2}{cu-1} = 0 \quad \dots(11)$$

இது $u = x^2 + y^2 + z^2$ என்பெரும மற்றும் சிறும மதிப்பை அளிக்கிறது

குறிப்பு :

- (i) சமன்பாடு (11), u இல் ஒரு இருபடி ஆகும். எனவே இது u ன் இரண்டு நிலையான மதிப்புகளை வழங்குகிறது.
- (ii) வடிவியல் ரீதியாக, மேற்பரப்பு $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ ஒரு நீள்வட்டத்தைக் குறிக்கிறது, அதன் மையம் தோற்றம் மற்றும் $lx + my + nz = 0$ தோற்றம் வழியாக செல்லும் ஒரு விமானத்தைக் குறிக்கிறது. புள்ளிகள் (x, y, z) நிபந்தனைகள் (2) மற்றும் (3) இரண்டையும் திருப்திப்படுத்துகின்றன (2) மற்றும் (3) குறுக்கிடும் கூம்பில். இந்த தூரத்தின் அதிகபட்ச மதிப்பு இந்த கூம்பின் முக்கிய அச்ச மற்றும் இந்த தூரத்தின் குறைந்தபட்ச மதிப்பு இந்த கூம்பின் சிறிய அச்சாகும். எனவே, சமன்பாடு (11) வெட்டும் கூம்பின் அரை அச்சுகளின் நீளத்தின் சதுரங்களைக் கொடுக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 4.85: $lx + my + nz = 0$ மற்றும் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ நிபந்தனைகளுக்கு உட்பட்டு $u = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}$ ன்

பெரும மற்றும் சிறும மதிப்பைக் கண்டறியவும்.

தீர்வு :

$$F = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} + \lambda_1 (lx + my + nz) + \lambda_2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right) \quad \text{என எடுத்துக்கொள்வோம். பெருமம் மற்றும்}$$

சிறுமத்திற்கு,

$$\therefore \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{a^4} + \lambda_1 l + \lambda_2 \cdot \frac{2x}{a^2} = 0 \quad \dots(1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y}{b^4} + \lambda_1 m + \lambda_2 \cdot \frac{2y}{b^2} = 0 \quad \dots(2)$$

$$\text{மற்றும் } \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{2z}{c^4} + \lambda_1 n + \lambda_2 \cdot \frac{2z}{c^2} = 0 \quad \dots(3)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2) மற்றும் (3) ஐ முறையே x, y மற்றும் z ஆல் பெருக்கி, பின்னர் கூட்டக் கிடைப்பது,

$$2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right) + \lambda_1 (lx + my + nz) + 2\lambda_2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) = 0$$

$$2u + \lambda_1 (0) + 2\lambda_2 (1) = 0 \Rightarrow \lambda_2 = -u$$

(1) லிருந்து,

$$\frac{2x}{a^4} + \lambda_1 l - \frac{2ux}{a^2} = 0$$

$$\Rightarrow x = -\frac{\lambda_1 l a^4}{2(1 - ua^2)}$$

$$\text{இதேபோல், } y = -\frac{\lambda_1 m b^4}{2(1-ub^2)}$$

$$\text{மற்றும் } z = -\frac{\lambda_1 n c^4}{2(1-uc^2)}$$

x, y, z இன் இந்த மதிப்புகளை $lx + my + nz = 0$ ல் பிரதியிட,

$$\frac{l^2 a^4}{1-a^2 u} + \frac{m^2 b^4}{1-b^2 u} + \frac{n^2 c^4}{1-c^2 u} = 0 \quad \dots(4)$$

இந்த சமன்பாடு தேவையான அதிகபட்ச அல்லது குறைந்தபட்ச மதிப்பை வழங்குகிறது.

வடிவியல் விளக்கம்; $u = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}$ என்பது $\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} + \frac{Zz}{c^2} = 1$ என்ற தொடுதளத்திற்கும், $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

என்ற ஆதியிலிருந்துள்ள நீள்வட்டத்திற்கும் இடையேயான தூரத்தின் சதுரத்தின் தலைகீழ் ஆகும். புள்ளி (x, y, z) தளம் $lx + my + nz = 0$ இல் இருந்தால், தொடுதளத்திற்கும் ஆதியிலிருந்துள்ள நீள்வட்டத்திற்கும் இடையேயான தூரத்தின் சதுரத்தின் தலைகீழின் அதிகபட்ச அல்லது குறைந்தபட்சத்தை $lx + my + nz = 0$ என்ற தளத்தின் பொதுவான புள்ளிகள் மற்றும் நீள்வட்டத்தில் கண்டுபிடிப்பதாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.86 : லாக்ரேஞ்சின் முறையைப் பயன்படுத்தி (தீர்மானிக்கப்படாத பெருக்கிகளின்). $(1, 2, 2)$ என்ற புள்ளியில் இருந்து $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ க்கு குறுகிய தூரத்தைக் கண்டறியவும்.

தீர்வு : ஒரு புள்ளி (x, y, z) கோளத்தில் இருக்கட்டும், $(1, 2, 2)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து அதன் தூரம்

$$F = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2}$$

வெளிப்படையாக, தூரம் மற்றும் தூரத்தின் சதுரம் x, y, z இன் அதே மதிப்புகளுக்கு சார்பின் எல்லை மதிப்புகளைக் கொண்டுள்ளன.

$$F(x, y, z) = \{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2\} + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 36) \text{ என எடுத்துக்கொள்வோம்.}$$

இங்கு λ ஒரு பெருக்கி. F இன் நிலையான மதிப்புக்கு,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad 2(x-1) + 2\lambda x = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad 2(y-2) + 2\lambda y = 0$$

$$\text{மற்றும் } \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad 2(z-2) + 2\lambda z = 0$$

$$\text{இதிலிருந்து } x = \frac{1}{1+\lambda}, y = \frac{2}{1+\lambda}, z = \frac{2}{1+\lambda} \text{ எனப் பெறலாம்.}$$

இந்த மதிப்புகளை $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ ல் பிரதியிட,

$$\frac{1}{(1+\lambda)^2} + \frac{4}{(1+\lambda)^2} + \frac{4}{(1+\lambda)^2} = 36$$

$$\Rightarrow (1+\lambda) = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$$

எனவே புள்ளிகள் (2, 4, 4) மற்றும் (-2, -4, -4). ஆகவே சிறும மதிப்பு,

$$\begin{aligned} &= \sqrt{(1-2)^2 + (2-4)^2 + (2-4)^2} \\ &= \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3 \end{aligned}$$

பெரும மதிப்பு

$$\begin{aligned} &= \sqrt{(1+2)^2 + (2+4)^2 + (2+4)^2} \\ &= \sqrt{9+36+36} = \sqrt{81} = 9 \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.87 : இரண்டு மாறிகள் x மற்றும் y உறவு $ax^2 + by^2 = ab$ உடன் இணைக்கப்பட்டிருந்தால், $x^2 + y^2 + xy$ சார்பின் அதிகபட்ச மற்றும் குறைந்தபட்ச மதிப்புகள் உறவு $4(u-a)(u-b) = ab$ ல் u -ன் மதிப்புகளுக்கு இணையாக இருக்கும் என நிரூபி.

தீர்வு : நீங்களே முயற்சி செய்யுங்கள்.

எடுத்துக்காட்டு 4.88 : $ax + by + cz = p + q + r$ நிபந்தனைக்கு உட்பட்டு $x^p y^q z^r$ இன் அதிகபட்ச அல்லது குறைந்தபட்ச மதிப்புகளைக் கண்டறியவும்.

தீர்வு : நீங்களே முயற்சி செய்யுங்கள்.

எடுத்துக்காட்டு 4.89 : $s = 400xyz^2$ என்ற வெளியின் (x, y, z) என்ற ஏதேனும் ஒரு புள்ளியின் வெப்பநிலை t எனக் கொள்வோம். $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ என்ற ஓர் அலகு கோளத்தின் மேற்பரப்பில் அதிகபட்ச வெப்பநிலையைக் கண்டறியவும்.

தீர்வு : $s = 400xyz^2$ மற்றும் $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ என்று எடுத்துக்கொள்வோம்.

லாக்ரேஞ்சின் முறைப் படி,

$$\frac{\partial s}{\partial x} + \lambda \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow 400 yz^2 + \lambda(2x) = 0 \quad \dots(1)$$

$$\text{மற்றும்} \quad \frac{\partial s}{\partial y} + \lambda \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow 400 xz^2 + \lambda(2y) = 0 \quad \dots(2)$$

$$\text{மற்றும்} \quad \frac{\partial s}{\partial z} + \lambda \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

$$\Rightarrow 800 xyz + \lambda(2z) = 0 \quad \dots(3)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2) மற்றும் (3) ஐ முறையே x, y மற்றும் z ஆல் பெருக்கி, பின்னர் கூட்டக் கிடைப்பது,

$$1600xyz^2 + 2\lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

$$\Rightarrow 1600xyz^2 + 2\lambda(1) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -800xyz^2$$

λ ன் மதிப்பை (1)ல் பிரதியிட,

$$400yz^2 + 2x(-800xyz^2) = 0$$

$$1 - 4x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

இதேபோல்

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

λ ன் மதிப்பை (3)ல் பிரதியிட,

$$800xyz - 1600xyz^3 = 0$$

$$1 - 2z^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

x, y மற்றும் z ன் மதிப்புகளை s ல் பிரதியிட,

$$s = 400 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 50$$

எடுத்துக்காட்டு 4.90 : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ என்ற நீள்வட்டத்தில் பொதிக்கப்படக்கூடிய மிகப்பெரிய செவ்வக

இணைகரத் திண்மத்தின் கொள் அளவைக் கண்டறியவும்.

தீர்வு : நீங்களே முயற்சிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 4.91 : x, y, z ஆகியவை $x + y + z = 1$ என்ற நிபந்தனைக்கு உட்படும்போது

$x^3 + y^3 + z^3 + 3kxyz, k \neq 2$ ன் அறுதி மதிப்புக்களைக் காண்க மற்றும் சமச்சீர் அறுதி மதிப்பு, பெருமம் அல்லது சிறுமம் ஆக இருப்பது, $k > 2$ அல்லது $k < 2$ யைப் பொறுத்தது என்று நிரூபிக்கவும்

தீர்வு :

$$u = x^3 + y^3 + z^3 + 3kxyz$$

இங்கு

$$x + y + z = 1$$

லாக்ரேஞ்சின் சார்பைக் கருதுக

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + 3kxyz + \lambda(x + y + z - 1)$$

u ன் அறுதி மதிப்பிற்காக $df = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3(x^2 + kyz) + \lambda = 0 \quad \dots(1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3(y^2 + kxz) + \lambda = 0 \quad \dots(2)$$

$$\text{மற்றும்} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 3(z^2 + kxy) + \lambda = 0 \quad \dots(3)$$

(2) லிருந்து (1) யைக் கழிக்க நாம் பெறுவது,

$$(x - y)(x + y - kz) = 0$$

(3) லிருந்து (1) யைக் கழிக்க நாம் பெறுவது

$$(x - z)(x + z - ky) = 0$$

எனவே ஒன்று

$$i. \quad x = y = z = \frac{1}{3} \text{ அல்லது}$$

$$ii. \quad x = y = \frac{z}{k-1} = \frac{1}{k+1}$$

$$iii. \quad x = z = \frac{y}{k-1} = \frac{1}{k+1} \text{ அல்லது}$$

$$iv. \quad y = z = \frac{x}{k-1} = \frac{1}{k+1},$$

எனவே (i) ன் தீர்வு x, y, z ல் சமச்சீர், இது $u = \frac{1}{9}(1+k)$ எனக் கொடுக்கும். (ii), (iii) மற்றும் (iv) ஆகியவற்றின்

தீர்வுகள், எதிர் சமச்சீர் ஆனால் ஒவ்வொரு முறையிலும் $u = \frac{k^3+1}{(1+k)^3}$ எனக் கொடுக்கும். $k = 2$ என்றால்

ஒரே ஒரு தீர்வு இருக்கிறது என்பதை கவனி, அதாவது, (i). மேலும் நாம் பெறுவது,

$$\begin{aligned} d^2 f &= 6(x dx^2 + y dy^2) + 6k(x dy dz + y dz dx + z dx dy) \\ &= 2(dx^2 + dy^2 + dz^2) + 2x(dy dz + dz dx + dx dy) \end{aligned} \quad ((1) \text{ லிருந்து})$$

ஆனால் $dx + dy + dz = 0$, அனைத்து $x + y + z = 1$

ஆதலால் $dx^2 + dy^2 + dz^2 = -2(dy dz + dz dx + dx dy)$

எனவே தெளிவாக, $k > 2$ எனில் $d^2 f$ எதிர்மறை மற்றும் $k < 2$ எனில் $d^2 f$ நேர்மறை.

எனவே, சமச்சீர் அறுதி மதிப்பு, பெருமம் அல்லது சிறுமம் ஆக இருப்பது, $k > 2$ அல்லது $k < 2$ யைப் பொறுத்தது

எடுத்துக்காட்டு 4.92 : $f(x, y) = y^2 + 4xy + 3x^2 + x^3$ நிலையான புள்ளியைக் கண்டறியவும். தீவிர மதிப்புகளுக்கான செயல்பாட்டையும் சோதிக்கவும்.

தீர்வு : நீங்களே முயற்சிக்கலாம்.

விடை : $\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ ல் சிறுமம் மற்றும் சிறும மதிப்பு $= -\frac{4}{37}$

எடுத்துக்காட்டு 4.93 : $ax + by - c = 0$ என்ற நிபந்தனைக்கு உட்பட்டு $x^2 + y^2$ ன் சிறும மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு : லாக்ரேஞ்சின் சார்பைக் கருதுக.

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(ax + by - c)$$

இப்போது $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + \lambda a = 0$ மற்றும், $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + \lambda b = 0$

$$x = -\frac{1}{2}a\lambda, \quad y = -\frac{1}{2}b\lambda \quad \text{யை தீர்க்க}$$

இந்த மதிப்புகளை $ax + by = c$ ல் பிரதியிட, நாம் பெறுவது $\lambda = \frac{-2c}{a^2 + b^2}$

இது $\left(-\frac{a}{2}\lambda, -\frac{b}{2}\lambda\right)$ ல் $(x^2 + y^2)$ ன் சிறும மதிப்பைக் கொடுக்கிறது, இங்கு $\lambda = \frac{-2c}{a^2 + b^2}$.

எடுத்துக்காட்டு 4.94 : $f(x, y) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + ax + by$ என்ற சார்பின் சிறும மதிப்பைக் காண்க.
இங்கு a, b ஆகியவை மாறிலிகள்.

தீர்வு : $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y + a = 0$ (பெருமம் மற்றும் சிறுமதிற்கு)

மற்றும் $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + x + b = 0$

இந்த சமன்பாடுகளை தீர்க்க, நாம் பெறுவது,

$$x = \frac{b-2a}{3}, y = \frac{a-2b}{3}$$

மீண்டும்

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1, t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

எனவே $\left(\frac{b-2a}{3}, \frac{a-2b}{3}\right)$ ல் கொடுக்கப்பட்ட சார்பு சிறுமம் மற்றும் சிறும மதிப்பு $= -\frac{3a^2 + 3b^2 - 2ab}{9}$.

எடுத்துக்காட்டு 4.95 : $u = \frac{xyz}{(x+a)(x+y)(y+z)(z+b)}$ எனில் u ன் பெரும மற்றும் சிறும மதிப்புகளைக் காண்க

தீர்வு : இருபுறமும் மடக்கை எடுக்க, நாம் பெறுவது

$$\begin{aligned} \log u &= \log x + \log y + \log z - \log(x+a) - \log(x+y) \\ &= -\log(y+z) - \log(z+b) \end{aligned}$$

இப்போது, வகைபடுத்துவதில்

$$\frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{ay - x^2}{x(x+a)(x+y)}$$

$$\frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xz - y^2}{y(x+y)(y+z)}$$

$$\text{மற்றும்} \quad \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{by - z^2}{z(y+z)(z+b)}$$

பெருமம் மற்றும் சிறுமதிற்கு

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = ay, y^2 = zx, z^2 = by$$

$\Rightarrow a, x, y; x, y, z$ மற்றும் y, z, b ஆகியவை பெருக்கு விருத்தியில் உள்ளன

$\therefore a, x, y, z, b$ பெருக்கு விருத்தியில் உள்ளன

r என்பது பொதுவான விகிதமாக இருக்கட்டும்.

பிறகு

$$b = ar^4, x = ar, y = ar^2, z = ar^3$$

A, B, C, D, F, G, H யைக் காண,

$$\begin{vmatrix} A & H & G \\ H & B & F \\ G & F & C \end{vmatrix} = -ve, A < 0, AB - H^2 > 0$$

எனவே u பெருமம் மற்றும் பெறும் மதிப்பு $u = \frac{1}{(a^{1/4} + b^{1/4})^4}$.

எடுத்துக்காட்டு 4.96 : இங்கு $u = ax^2 + by^2 + cz^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ மற்றும் $lx + my + nz = 0$ எனில், u -ன் நிலையான புள்ளிகள் $\frac{l^2}{a-u} + \frac{m^2}{b-u} + \frac{n^2}{c-u} = 0$ என்ற சமன்பாட்டை திருப்திப்படுத்தும் என நிரூபி.

தீர்வு : $u = ax^2 + by^2 + cz^2$, $f = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, $g = lx + my + nz$, என்க

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 2ax, \frac{\partial u}{\partial y} = 2by, \frac{\partial u}{\partial z} = 2cz$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \frac{\partial f}{\partial z} = 2z$$

மற்றும்

$$\frac{\partial g}{\partial x} = l, \frac{\partial g}{\partial y} = m, \frac{\partial g}{\partial z} = n$$

லாக்ரேஞ்சின் பெருக்க முறை மூலம், நாம் பெறுவது

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow 2ax + 2x\lambda_1 + \lambda_2 l = 0 \quad \dots(1)$$

$$\text{இதேபோல், } 2by + 2y\lambda_1 + \lambda_2 m = 0 \quad \dots(2)$$

$$\text{மற்றும் } 2cz + 2z\lambda_1 + \lambda_2 n = 0 \quad \dots(3)$$

(1), (2), (3) முறையே x, y , மற்றும் z ஆல் பெருக்கினால், நாம் பெறுவது

$$\lambda_1 = -u$$

λ_1 இன் மதிப்பை (1), (2) மற்றும் (3) இல் பிரதியிட, நாம் பெறுவது

$$x = -\frac{\lambda_2 l}{2(a-u)}, y = -\frac{\lambda_2 m}{2(b-u)} \quad \text{மற்றும் } z = -\frac{\lambda_2 n}{2(c-u)}$$

x, y, z, z இன் இந்த மதிப்புகளை $lx + my + nz = 0$ இல் பிரதியிட, நாம் பெறுவது

$$-\frac{\lambda_2 l^2}{2(a-u)} - \frac{\lambda_2 m^2}{2(b-u)} - \frac{\lambda_2 n^2}{2(c-u)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{l^2}{a-u} + \frac{m^2}{b-u} + \frac{n^2}{c-u} = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 4.97 : ஆதி புள்ளிக்கு அருகில் $z^2 = xy + 1$ -ன் மேற்பரப்பில் உள்ள புள்ளியைக் கண்டறியவும்.

தீர்வு : ஆதி புள்ளிலிருந்து (x, y, z) என்பது $z^2 = xy + 1$ -ல் ஏதெனும் ஒரு புள்ளி என்க $\dots(1)$

ஆதி புள்ளிலிருந்து இந்த புள்ளியின் தூரம் $s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ என இருக்கட்டும் .

⇒

$$f(x, y, z) = s^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

பிறகு

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + xy + 1$$

(1) லிருந்து

இப்போது,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y, r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + x, t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

மற்றும்

$$s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$$

பெருமம் மற்றும் சிறுமதிற்கு,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \text{ மற்றும் } \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \dots(2)$$

$$\Rightarrow 2x + y = 0 \text{ அல்லது } 2y + x = 0 \quad \dots(3)$$

(2) மற்றும் (3),யைத் தீர்க்க நாம் பெறுவது $x = 0, y = 0$.

இங்கு $r^2 - s^2 = 3$ (+ve) மற்றும் r - ம் நேர்மறை.

∴ $f(x, y)$, (0, 0) ல் சிறுமம். $x = 0, y = 0$ என (1) ல் பிரதியிட நாம் பெறுவது $z = \pm 1$.

எனவே, ஆதி புள்ளிக்கு அருகில் $z^2 = xy + 1$ ன் மேற்பரப்பில் உள்ள புள்ளி (0, 0, ±1) ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.98 : $ax^2 + by^2 + 2hxy = 1$ என்ற நிபந்தனைக்கு உட்பட்டு $x^2 + y^2$ ன் பெருமம் மற்றும் சிறுமம் மதிப்பைக் காண்க.

$$\text{தீர்வு : இங்கு } u = x^2 + y^2 \quad \dots(1)$$

மற்றும் x, y ஆகியவை பின் வரும் தொடர்பை கொண்டு உள்ளது

$$ax^2 + by^2 + 2hxy = 1 \quad \dots(2)$$

u ன் பெருமம் மற்றும் சிறுமதிற்கு, $du = 0$

$$\Rightarrow 2x dx + 2y dy = 0$$

$$\Rightarrow x dx + y dy = 0 \quad \dots(3)$$

$$\text{மற்றும் } (ax + hy) dx + (hx + by) dy = 0 \quad \dots(4)$$

லாக்ரேஞ்சின் பெருக்கல் முறையைப் பயன்படுத்துவதன் மூலம், நாம் பெறுவது

$$x + \lambda(ax + hy) = 0 \quad \dots(5)$$

$$\text{மற்றும் } y + \lambda(hx + by) = 0 \quad \dots(6)$$

(5) ஐ x மற்றும் (6) ஐ y ஆல் பெருக்கி, கூட்டினால் கிடைப்பது

$$x^2 + y^2 + \{\lambda(ax^2 + 2hxy + by^2)\} = 0$$

$$\Rightarrow u + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -u$$

$$(5) \text{ லிருந்து, } x - u(ax + hy) = 0$$

$$\Rightarrow x(1 - au) - huy = 0 \Rightarrow \left(a - \frac{1}{u}\right)x + hy = 0 \quad \dots(7)$$

$$\begin{vmatrix} a - \frac{1}{u} & h \\ h & b - \frac{1}{u} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left(a - \frac{1}{u}\right)\left(b - \frac{1}{u}\right) = h^2 \quad \dots(9)$$

பயிற்சி 4.8

1. $\left(\frac{a}{x}\right) + \left(\frac{b}{y}\right) + \left(\frac{c}{z}\right) = 1$ என்ற நிபந்தனைக்கு உட்பட்டு, $x + y + z$ ன் சிறும மதிப்பைக் காண்க.
2. $F = \frac{5xyz}{x+2y+4z}$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது $xyz = 8$ என்ற நிபந்தனைக்கு உட்பட்டு F , பெரும மதிப்பை அடையுமாறு m x, y, z ன் மதிப்புகளைக் காண்க.
3. $ax + by + cz = d$ என்ற நிபந்தனைக்கு உட்பட்டு $x^2 + y^2 + z^2$ என்ற சார்பின் சிறும மதிப்பைக் காண்க.
4. $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ மற்றும் $lx + my + nz = 0$ என்ற நிபந்தனைகளுக்கு உட்பட்டு $u = x^2 + y^2 + z^2$ -ன் நிலையான மதிப்பைக் காண்க.
5. $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ எனும் போது, பெருக்கிகளின் முறையைப் பயன்படுத்தி, x, y மற்றும் z என்ன எண்களின் அதிகபட்ச பெருக்கலைக் கண்டறியவும்
6. $(1, 2, -1)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து குறைந்தபட்ச மற்றும் அதிகபட்ச தூரத்தை $x^2 + y^2 + z^2 = 24$ என்ற கோளம் வரைக் கண்டறியவும்
7. பின்வரும் நிபந்தனைகளுக்கு உட்பட்டு $x^2 + y^2 + z^2$ ன் பெருமம் மற்றும் சிறுமம் பற்றி விவாதிக்கவும்
i. $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$
ii. $yz + zx + xy = 3a^2$
iii. $x + y + z = 3a$
iv. $xyz = a^3$
8. ஒரு முக்கோணத்தின் சுற்றளவு நிலையானதாக இருந்தால், அது சமபக்கமாக இருக்கும்போது அதன் பரப்பளவு அதிகபட்சமாக இருக்கும் என்பதைக் காட்டுங்கள்.
9. $x + y + z = 1, xyz = -1$ என்ற நிபந்தனைக்கு உட்பட்டு, லாக்ரேஞ்சின் பெருக்கல் முறையைப் பயன்படுத்தி $x^2 + y^2 + z^2$ ன் சிறும மதிப்பை கண்டுபிடி
10. ஆதி முதல் $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0$ என்ற வளைவரை, வரை குறுகிய மற்றும் மிகப்பெரிய தூரங்களைக் கண்டறியவும்
11. $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 1$ என்ற நிபந்தனைக்கு உட்பட்டு $x^2 + y^2 + z^2$ ன் பெரும மற்றும் சிறும மதிப்பைக் காண்க.
12. இங்கு $a_1^2 > a_2^2 > \dots > a_n^2$, $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n^2}$ எனில் $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ ன் நிலையான புள்ளிகள் $a_1^2 a_2^2 \dots a_n^2$ என நிரூபி இந்த மதிப்பில், a_1^2 மட்டுமே உண்மையான பெருமம் மற்றும் a_n^2 மட்டுமே உண்மையான சிறுமம் என்பதை நிரூபிக்கவும்.

13. $x + y + z = l, x > 0, y > 0, z > 0$ என்ற நிபந்தனைக்கு உட்பட்டு $x^a y^b z^c$ -ன் பெரும மதிப்பைக் காண்க. இங்கு a, b, c ஆகியவை நேர்மறையான மாறிலிகள்
14. கொடுக்கப்பட்ட அடிப்பகுதி, உயரம் மற்றும் குறைந்தபட்ச மேற்பரப்பைக் கொண்ட முக்கோண பிரமிட்டை கண்டறியவும்.

விடைகள்

1. $(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$ 2. $x = 4, y = 2, z = 1$ ல் பெருமம்
3. $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ ல் சிறும மதிப்பு; $\frac{d}{a^2 + b^2 + c^2}$
4. நிலையான மதிப்புகள் $\frac{l^2}{au-1} + \frac{m^2}{bu-1} + \frac{n^2}{cu-1} = 0$ ஆகும்.
5. $3\sqrt{3}$
6. குறைந்தபட்ச தூரம் = $\sqrt{6}$ மற்றும் அதிகபட்ச தூரம் = $3\sqrt{6}$.
7. i. பெருமம் மற்றும் சிறுமம், இதன் மூலங்கள் $\left(\frac{1}{a}-u\right)\left(\frac{1}{b}-u\right)\left(\frac{1}{c}-u\right) = 0$.
ii. (a, a, a) ல் சிறும மதிப்பு = $3a^3$
iii. (a, a, a) ல் சிறும மதிப்பு = $3a^3$ iv. (a, a, a) ல் சிறும மதிப்பு = $3a^3$
9. சிறும மதிப்பு = 3
10. மிகக் குறைந்த தூரம் = 1, மிகஅதிக தூரம் = 4
11. u ன் பெருமம் மற்றும் சிறுமம் மதிப்புகள் $\begin{vmatrix} a-u^{-1} & h & g \\ h & b-u^{-1} & f \\ g & f & c-u^{-1} \end{vmatrix} = 0$ ல் கிடைக்கும்.
12. நிலையான புள்ளிகள் $\begin{vmatrix} 0 & c & b & \frac{2u}{n} \\ c & 0 & a & \frac{2u}{n} \\ b & a & 0 & \frac{2u}{n} \\ 1 & 1 & 1 & n \end{vmatrix}$, ல் கிடைக்கும், மதிப்பு பெருமம்
13. $a^a b^b c^c \left(\frac{\lambda}{a+b+c}\right)^{a+b+c}$
14. முக்கோண பிரமிடின், உயரத்தின் அடி, அடிப்பகுதியின் உள்மையம் மற்றும் குறைந்தபட்ச மேற்பரப்பு (அடித்தளத்தை தவிர்த்து $(p^2 s^2 + D^2)1/2$ ஆகும். இங்கு p என்பது உயரம், s என்பது அடித்தளத்தின் அரை சுற்றளவு மற்றும் D என்பது ஒரு பரப்பளவு.

சுவாரஸ்யமான உண்மைகள்

- ♦ பொருளாதாரத்தில், லாக்ரேஞ்ச் பெருக்கல் $l\lambda$ ஒரு குறிப்பிட்ட பொருளைக் கொண்டுள்ளது.
- ♦ நீங்கள் லாபப் பொருளை வரையறுக்கப்பட்ட வளத்திற்கு அதிகப்படுத்தினால் λ என்பது அந்த வளத்தின் ஓரளவு மதிப்பு பெரம்பாலும் 'நிழல் விலை' என்று குறிப்பிடப்படுகிறது.



அன்றாட வாழ்வில் பயன்பாடுகள்

- ♦ ஒரு சார்பின் நெருங்கிய பெருமம் அல்லது சிறுமத்தைக் கண்டுபிடிக்க இது பயன்படுகிறது.
- ♦ பொருளாதாரத்தில், உள்ளீடுகளின் மதிப்பு அதிகரிப்பைப் பொறுத்து இந்தக் கருத்து உற்பத்தியை அதிகரிக்கப் பயன்படுகிறது.
- ♦ இந்த நுட்பம், ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட சம நிபந்தனைகளை உடைய சில தேர்வுமுறை
- ♦ சிக்கல்களைத் தீர்க்கப் பயன்படுகிறது:
- ♦ இந்த நுட்பம் SVM (ஆதரவு திசையன் இயந்திரங்கள்) இல் பயன்படுத்தப்படுகிறது.
- ♦ அறிவியல், பொருளாதாரம் மற்றும் பொறியியலில் சில அறுதி மதிப்புப் பிரச்சினைகளைத்
- ♦ தீர்க்கவும் இது பயன்படுகிறது.
- ♦ தடை மற்றும் உள்துறை புள்ளி முறை போன்ற பல கணக்கீட்டு நிரலாக்க முறைகள், அபராதம் மற்றும் அதிகரித்த லாக்ரேஞ்ச் முறை, முதலியன, லாக்ரேஞ்ச் பெருக்கல் முறை, அடிப்படை விதிகளின் அடிப்படையில் உருவாக்கப்பட்டுள்ளன

4.10 வெக்டர்கள்

அறிமுகம்

இந்த தலைப்பு 3 டி - தளத்தில் வெக்டர்கள் மற்றும் வெக்டர் செயல்பாடுகளைக் கையாளுகிறது மற்றும் இந்த வெக்டர் சார்பு சக்திகள், வேகம் மற்றும் பல்வேறு அளவுகள் வெக்டர்களாக வகையீட்டு நுண்கணிதத்திற்கு விரிவுபடுத்துகிறது. இந்த வெக்டர் சார்பின் இயற்கணிதம் மற்றும் கணிதமானது பொறியியலாளர் மற்றும் இயற்பியலாளருக்கான திடமான இயக்கவியல், திரவ ஓட்டம், வெப்ப ஓட்டம், மின்னியல் மற்றும் பலவற்றிற்கான இயற்கை கருவியாகும். கணினி அல்லது ரோபோக்களின் வடிவமைப்பு மற்றும் கட்டுமானத்தின் அடிப்படையில் இந்த துறைகளை பொறியாளர் புரிந்து கொள்ள வேண்டும். மூன்று பரிமாணங்களில் (உயர் பரிமாணங்களுக்கு மாறாக), வடிவியல் யோசனைகள் செல்வாக்கு செலுத்துகின்றன, கோட்பாட்டை வளமாக்குகின்றன மற்றும் பல வடிவியல் அளவுகள் (எடுத்துக்காட்டாக, தொடுதல்கள் மற்றும் இயல்பானவை) வெக்டர்களால் கொடுக்கப்படலாம்.

3 டி - தளத்தில் உள்ள வெக்டர்களுடன் அடிப்படை இயற்கணித செயல்பாடுகளை நாங்கள் முதலில் விளக்குகிறோம். வெக்டர் வகையீட்டு நுண்கணிதம், வெக்டர் சார்புகளைப் பற்றிய விவாதத்துடன் அடுத்ததாகத் தொடங்குகிறது. அவை வெக்டர் புலங்களைக் குறிக்கும் மற்றும் பல்வேறு இயற்பியல் மற்றும் வடிவியல் பயன்பாடுகள் கொண்டவை. பின்னர் வகையீட்டு நுண்கணிதத்தின் அடிப்படை கருத்துகள், எளிய மற்றும் இயற்கை முறையில் உள்ள வெக்டருக்கு நீட்டிக்கப்படுகின்றன. வெக்டர் சார்புகள் வளைவுகளையும் அவற்றின் பயன்பாடுகளையும் பாதைகளாக அல்லது இயக்கவியலில் உடல்களை நகர்த்துவதைப் படிக்க பயனுள்ளதாக இருக்கும்.

இறுதியாக, எண்ணி மற்றும் வெக்டர் தொடர்பான மூன்று உடல் மற்றும் வடிவியல் ரீதியாக முக்கியமான கருத்துகளை அதாவது வாட்டம், பாய்வு மற்றும் சுழல் பற்றி விவாதிக்கிறோம்.

4.10.1 எண்ணி மற்றும் வெக்டர் அளவுகள்

அளவு மற்றும் வெக்டர் கொண்ட ஒரு அளவு, வெக்டர் என்றும், அளவு மட்டுமே கொண்டு மற்றும் திசை இல்லாத அளவு அளவிடுதல் என்றும் அழைக்கப்படுகிறது. ஒரு வெக்டர் ஒரு அம்புடன் $\vec{a}$ குறிக்கப்படுகிறது மற்றும் அதன் அளவு $|\vec{a}|$. இந்த தலைப்பில், வெக்டர்களைப் பற்றிய வேலை அறிவை நாங்கள் தருகிறோம். இவற்றில் சில அறிவியல் மற்றும் பொறியியல் துறையில் பரந்த பயன்பாட்டைக் கொண்டுள்ளன.

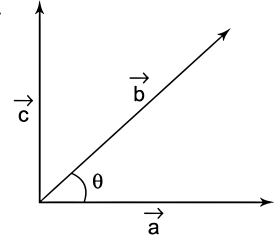
4.10.2 எண்ணி மற்றும் வெக்டர் பெருக்கல், கோண திசைவேகம்

a. எண்ணிப் பெருக்கல் :

$\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ என்பன இரு வெக்டர்கள். $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஆகியவற்றுக்கிடையேயான கோணம் θ எனில் இந்த வெக்டர்களின் எண்ணிப் பெருக்கல் $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

b. வெக்டர் பெருக்கல் அல்லது குறுக்கு பெருக்கல் :

$\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ என்பன இரு வெக்டர்கள். $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ ஆகியவற்றுக்கிடையேயான கோணம் θ எனில் $\vec{b}$ இந்த வெக்டர்களின் குறுக்கு பெருக்கல் $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. அதன் திசை $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ இரண்டிற்கும் செங்குத்தாக உள்ளது மற்றும் வலது கை அமைப்பை உருவாக்குகிறது. $\hat{n}$ என்பது $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ இரண்டிற்கும் செங்குத்தான ஓர் அலகு வெக்டராக இருந்தால், பிறகு $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \hat{n}$



படம் 4.1

c. கோண திசைவேகம் :

வெக்டர் $\vec{\omega}$ என்ற கோண திசைவேகத்துடன் OA அச்சில் சுழலும் ஒரு விறைப்புள்ள பொருளைக் கருதுவோம்.

P என்பது பொருளில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியாக இருக்கட்டும்,

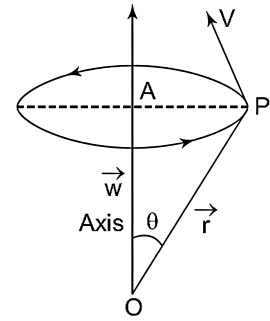
$$\vec{OP} = \vec{r}, AOP = \theta \text{ மற்றும் } AP \perp OA.$$

V என்பது P இன் திசைவேகமாகவும், $\hat{n}$ என்பது க்கு செங்குத்தான ஒரு அலகு வெக்டராகவும் இருக்கட்டும்.

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = (\omega \sin \theta) \hat{n} = (\omega AP) \hat{n}$$

$$= (P \text{ன் வேகம்}) \hat{n} = P \text{ன் கன அளவு} \perp \vec{\omega} \text{ மற்றும் } \vec{r}.$$

$$\therefore \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$



படம் 4.2

4.10.3 வெக்டர்களின் வகையீடு

O என்பது ஆரம்பம் மற்றும் P என்பது 't' நேரத்தில் நகரும் துகளின் நிலையாக இருக்கட்டும்.

$$\vec{OP} = \vec{r} \text{ என எடுத்துக்கொள்வோம்.}$$

Q ஆனது துகளின் நிலை $t + \delta t$ போன்றதாக இருக்கட்டும்.

$$\overrightarrow{OQ} = \vec{r} + \delta\vec{r}$$

$$\therefore \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (\vec{r} + \delta\vec{r}) - \vec{r} = \delta\vec{r}$$

$\frac{\delta\vec{r}}{\delta t}$ என்பது ஒரு வெக்டர். $\delta t \rightarrow 0$ ஆக, Q ஆனது P ஆகவும்,

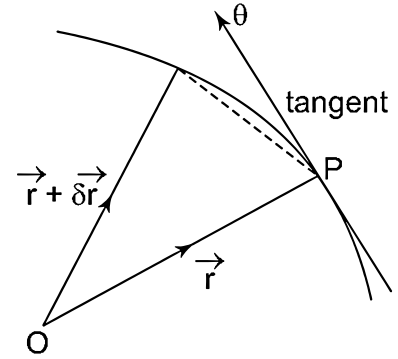
நான் PQ, P ல் தொடுகோடு ஆகவும் மாறும்.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta\vec{r}}{\delta t} \text{ என வரையறுத்தால், } \frac{d\vec{r}}{dt} \text{ என்பது P ல் உள்ள}$$

தொடுகோட்டின் திசையில் உள்ள வெக்டர் ஆகும்.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \text{ என்பது } t \text{ ஐப் பொறுத்த } \vec{r} \text{ இன் வகையீட்டு குணகம்}$$

என்றும் அழைக்கப்படுகிறது.



படம் 4.3

4.10.4 வகையீட்டின் சூத்திரங்கள்

$$i. \quad \frac{d}{dt}(\vec{F} + \vec{G}) = \frac{d\vec{F}}{dt} + \frac{d\vec{G}}{dt}$$

$$ii. \quad \frac{d}{dt}(\vec{F} \cdot \vec{G}) = \frac{d\vec{F}}{dt} \cdot \vec{G} + \vec{F} \cdot \frac{d\vec{G}}{dt}$$

$$iii. \quad \frac{d}{dt}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{F} \times \frac{d\vec{G}}{dt} + \frac{d\vec{F}}{dt} \times \vec{G}$$

$$iv. \quad \frac{d}{dt}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{F} \times \frac{d\vec{G}}{dt} + \frac{d\vec{F}}{dt} \times \vec{G}$$

4.10.5 திசையிலி மற்றும் வெக்டர் புள்ளி சார்புகள் (Scalar and Vector Point Functions)

- புலம்:** பிராந்தியத்தின் ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் எந்தப் பகுதியிலும் ஒரு செயல்பாடு வரையறுக்கப்பட்டால், இந்தப் பகுதி புலம் எனப்படும்.
- திசையிலி புள்ளி சார்பு :** ஒரு சார்பு $f(x, y, z)$ என்பது ஒரு திசையிலி விண்வெளியில் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியுடனும் தொடர்புபடுத்தினால் அது திசையிலி புள்ளி சார்பு என்று அழைக்கப்படும். ஒரு வெப்பமான உடலில் வெப்பநிலை விநியோகம், ஒரு உடலின் அடர்த்தி, ஒரு உடலின் வேகம் ஆகியவை ஒரு திசையிலி புள்ளி சார்புகளுக்கு சில உதாரணங்கள்.
- வெக்டர் புள்ளி சார்பு :** ஒரு சார்பு $F(x, y, z)$ ஒரு பிராந்தியத்தின் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் ஒரு வெக்டரை வரையறுத்தால், $F(x, y, z)$ ஒரு வெக்டர் புள்ளி சார்பு என்று அழைக்கப்படுகிறது. நகரும் திரவத்தின் வேகம், ஈர்ப்பு விசைகள் ஒரு வெக்டர் புள்ளி சார்பின் எடுத்துக்காட்டுகள்.

4.11 வெக்டர் வகையீட்டு செயலி டெல் ∇

∇ என்ற செயலி $\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

4.11.1 சாய்வு

ஒரு திசையிலி புள்ளி சார்பின் சாய்வு $\nabla \phi$ ஆல் குறிக்கப்படுகிறது, மேலும் இது சாய்வு ϕ என எழுதப்பட்டு,

$$\text{grad } \phi = \nabla \phi = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{k} \right) \text{ என்று வரையறுக்கப்படுகிறது.}$$

சாய்வு ϕ என்பது ஒரு வெக்டர் அளவு என்பதை இது காட்டுகிறது.

சாய்வின் வடிவியல் விளக்கம்

$\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{k} \right)$ என நாம் அறிந்ததே.

ஒரு நிலை மேற்பரப்பை அனுமதிக்கவும் (சார்பின் மதிப்பு இருக்கும் மேற்பரப்பு அப்படியே உள்ளது) $\phi(x, y, z) = k$ என்பது நிலை வெக்டர் $\vec{R}$ கொண்டு புள்ளி 'P' வழியாக செல்கிறது.

மற்றொரு நிலை மேற்பரப்பு $\phi + \delta\phi = k$ அண்டை மேற்பரப்பாக இருக்கட்டும். Q வழியாக செல்லும் மேற்பரப்பு அதன் நிலை வெக்டர் $\vec{R} + \delta\vec{R}$ ஆகும்.

$$\therefore \vec{PQ} = \delta\vec{R}$$

$$\begin{aligned} \nabla\phi \cdot \delta\vec{R} &= \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{k} \right) (\delta x\hat{i} + \delta y\hat{j} + \delta z\hat{k}) \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\delta z \end{aligned} \quad \left[\because \vec{R} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \right]$$

$$\nabla\phi \cdot \delta\vec{R} = \delta\phi$$

இப்போது, இரண்டு நிலைகள் உள்ளன:

நிலை I : P இருக்கும் மேற்பரப்பில் Q இருக்கும் போது, பிறகு $\delta\phi = 0 \Rightarrow \nabla\phi \cdot \delta\vec{R} = 0$

$\therefore \nabla\phi$ என்பது மேற்பரப்பில் இருக்கும் ஒவ்வொரு R க்கும் செங்குத்தாக உள்ளது.

$\nabla\phi$ என்பது P இல் மேற்பரப்பில் சாதாரணமானது.

மேற்பரப்பில் P இல் $\hat{n}$ அலகு சாதாரணமாக இருக்கட்டும், $\Rightarrow \nabla\phi = |\nabla\phi|\hat{n}$

எனவே, P என்பது மேற்பரப்பில் ஒரு வெக்டர் சாதாரணமானது மற்றும் அளவு $|\nabla\phi|$.

நிலை II : P மற்றும் Q இரண்டு வெவ்வேறு நிலை பரப்புகளில் இருக்கும்போது,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial n} &= \lim_{\delta n \rightarrow 0} \frac{\delta\phi}{\delta n} = \lim_{\delta n \rightarrow 0} \frac{\nabla\phi \cdot \delta\vec{R}}{\delta n} = |\nabla\phi| \lim_{\delta n \rightarrow 0} \frac{|\delta\vec{R}| \cos \theta}{\delta n} \\ |\delta\vec{R}| \cos \theta &= PQ \cos \theta = \delta n \end{aligned}$$

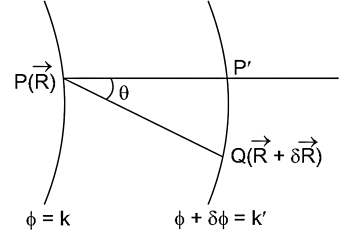
$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = |\nabla\phi| \lim_{\delta n \rightarrow 0} \frac{|\delta\vec{R}| \cos \theta}{\delta n} = \lim_{\delta n \rightarrow 0} |\nabla\phi| \frac{\delta n}{\delta n} = |\nabla\phi|$$

எனவே $\nabla\phi$ இன் அளவு என்பது மேற்பரப்புக்கு இயல்பான திசையில் ϕ இன் மாற்ற விகிதமாகும்.

4.11.2 $\vec{PQ}$ என்ற திசையில் ϕ ன் திசை வகைக்கெழு

$PQ = |\delta\vec{R}|$, δr மற்றும் $\hat{n}$ என்பன PQ என்ற திசையில் அலகு இயல்பான வெக்டர் எனில், பின்னர் எல்லை மதிப்பு $\delta r \rightarrow 0$ ல், $\frac{\delta\phi}{\delta r}$ என $Qr \rightarrow 0$ PQ இன் திசையில் P ல் ϕ ன் திசை வகைக்கெழு என அறியப்படுகிறது.

$$\delta r = \frac{\delta n}{\cos \theta} = \frac{\delta n}{\hat{n} \cdot \hat{n}'}, \quad \delta n = PP'$$



படம் 4.4

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \phi}{\partial r} &= \lim_{\delta r \rightarrow 0} \frac{\delta \phi}{\delta r} = \lim_{\delta r \rightarrow 0} \frac{\nabla \phi \cdot \delta \vec{R}}{\delta r} \\
 &= \lim_{\delta r \rightarrow 0} \frac{|\nabla \phi| |\delta \vec{R}| \cos \theta}{\delta r} = \lim_{\delta r \rightarrow 0} \frac{|\nabla \phi| \delta r \cos \theta}{\delta r} \\
 &= \lim_{\delta r \rightarrow 0} |\nabla \phi| \cos \theta \quad \left[\because \delta r = |\delta \vec{R}| \right] \\
 &= \lim_{\delta r \rightarrow 0} |\nabla \phi| \hat{n} \cdot \hat{n}' = \nabla \phi \cdot \hat{n}'
 \end{aligned}$$

இது $\hat{n}'$ இன் திசையில் ϕ ன் திசை வகைக்கெழு ஆகும். இவ்வாறு $\hat{n}'$ இன் திசையில் ϕ இன் திசை வகைக்கெழு $\hat{n}'$ ன் தீர்க்கப்பட்ட பகுதியாகும்.

$$\nabla \phi \cdot \hat{n}' = |\nabla \phi| \cos \theta \leq |\nabla \phi|$$

$|\nabla \phi|$ என்பது $\nabla \phi$ என்ற திசையில் பெருமமாக உள்ளது.

4.11.3 தொடு தளம் மற்றும் செங்கோடுகள்

i. தொடு தளத்தின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடித்தல்

கொடுக்கப்பட்ட மேற்பரப்புடன் தொடுகோட்டு தளத்தின் தொடர்பு

புள்ளி P என்க. தொடு தளத்தில் Q ஏதேனும் ஒரு புள்ளியாக இருக்கட்டும்.

P ன் நிலை வெக்டர் $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ எனவும், Q ன் நிலை வெக்டர்

$\vec{R} = X\hat{i} + Y\hat{j} + Z\hat{k}$ எனவும் எடுத்துக்கொள்வோம்.

$\vec{PQ} = \vec{R} - \vec{r} = (X-x)\hat{i} + (Y-y)\hat{j} + (Z-z)\hat{k}$ என்பது தொடு தளத்தில் இருக்கும்.

இப்போது, நமக்குத் தெரிந்தபடி, $\text{grad } f$ என்பது தொடு தளத்திற்கு

செங்குத்து திசையில் உள்ளது.

எனவே, $\vec{R} - \vec{r}$ என்பது $\text{grad } f$ க்கு செங்குத்தாக இருக்கும்.

($\because$ ஒரு கோடு தளத்திற்கு செங்குத்தாக இருந்தால், அது தளத்தில் இருக்கும் ஒவ்வொரு கோட்டிற்கும் செங்குத்தாக இருக்கும்.)

$$\therefore \vec{PQ} \cdot \nabla f = 0$$

$$\Rightarrow \left[(X-x)\hat{i} + (Y-y)\hat{j} + (Z-z)\hat{k} \right] \cdot \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k} \right\} = 0$$

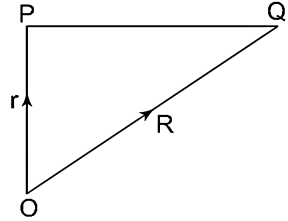
$$\Rightarrow (X-x) \frac{\partial f}{\partial x} + (Y-y) \frac{\partial f}{\partial y} + (Z-z) \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

ii. செங்குத்துக்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் கண்டறிதல்:

P என்பது மேற்பரப்பின் செங்குத்துக்கோட்டின் மேலுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி எனவும் அதன் நிலை வெக்டர் $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ எனவும் கொள்வோம்.

Q என்பது மேற்பரப்பின் செங்குத்துக்கோட்டின் மேலுள்ள மற்றுமொரு புள்ளி எனவும் அதன் நிலை வெக்டர் $\vec{R} = X\hat{i} + Y\hat{j} + Z\hat{k}$ எனவும் கொள்வோம்.

$\text{grad } f$ மேற்பரப்புக்கு செங்குத்தானதால், $\vec{PQ} = \vec{R} - \vec{r} = (X-x)\hat{i} + (Y-y)\hat{j} + (Z-z)\hat{k}$ என்பதும் மேற்பரப்புக்கு செங்குத்தாக இருக்கும்.



படம் 4.5

$$\begin{aligned}
&\therefore \vec{PQ} \parallel \nabla f \\
&\therefore \vec{PQ} \times \nabla f = \vec{0} \\
&\therefore (\vec{R} - \vec{r}) \times \nabla f = \vec{0} \\
&\therefore [(X-x)\hat{i} + (Y-y)\hat{j} + (Z-z)\hat{k}] \times \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k} \right\} = \vec{0} \\
&\Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \vec{0} \\
&\Rightarrow \hat{i} \left[(Y-y)\frac{\partial f}{\partial z} - (Z-z)\frac{\partial f}{\partial y} \right] - \hat{j} \left[(X-x)\frac{\partial f}{\partial z} - (Z-z)\frac{\partial f}{\partial x} \right] + \hat{k} \left[(X-x)\frac{\partial f}{\partial y} - (Y-y)\frac{\partial f}{\partial x} \right] = \vec{0} \\
&\text{L.H.S மற்றும் R.H.S இன் கூறுகளை ஒப்பிட, நாம் பெறுவது,} \\
&\frac{Y-y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial f}{\partial z}}, \frac{Z-z}{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{X-x}{\frac{\partial f}{\partial x}} \text{ மற்றும் } \frac{X-x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial f}{\partial y}} \\
&\therefore \frac{X-x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial f}{\partial z}} \text{ என்பது } P \text{ ல் செங்குத்து சமன்பாடு ஆகும்.}
\end{aligned}$$

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 4.99 : $\phi = x^2y + y^2x + z^2$ க்கு $(1, 1, 1)$ என்ற புள்ளியில் $\nabla \phi$ ஐக் காண்க.

தீர்வு : $\phi = x^2y + y^2x + z^2$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2xy + y^2, \frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2 + 2xy, \frac{\partial \phi}{\partial z} = 2z \quad \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\hat{k}$$

$$\therefore \nabla \phi = (2xy + y^2)\hat{i} + (x^2 + 2xy)\hat{j} + (2z)\hat{k}$$

$$(1, 1, 1) \text{ ல், } \nabla \phi = (2+1)\hat{i} + (1+2)\hat{j} + 2\hat{k} = 3\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.100 : $\phi = |\log \vec{r}|$ எனில், $\text{grad} \phi = \frac{\vec{r}}{r^2}$ என நிறுவுக.

தீர்வு : $|\vec{r}| = r$ எனில் $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$$\Rightarrow 2r \frac{\partial r}{\partial x} = 2x \text{ அல்லது } \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

$$\text{இதேபோல், } \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

இப்போது, $\text{grad}\{\log r\} = \text{grad}(\log r)$

$$\begin{aligned} &= \hat{i} \frac{\partial}{\partial x}(\log r) + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y}(\log r) + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}(\log r) \\ &= \hat{i} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \right) + \hat{j} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial y} \right) + \hat{k} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial z} \right) \\ &= \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{r^2} = \frac{\vec{r}}{r^2} \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.101 : $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ எனும்போது $\nabla r^n = n r^{n/2} \vec{r}$ என நிறுவுக.

தீர்வு : $r^n = (x^2 + y^2 + z^2)^{n/2}$ என எடுத்துக்கொள்வோம்

$$\begin{aligned} \nabla r^n &= \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{n/2} \\ &= \hat{i} \frac{n}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}-1} \times 2x \\ &= \hat{i} n (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n-2}{2}} (\hat{i} x) \\ &= \hat{i} n r^{n-2} (\hat{i} x) \\ &= n r^{n-2} \sum \hat{i} x = n r^{n-2} \vec{r} \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.102 : $(1, -2, -1)$ என்ற புள்ளியில் $2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$ என்ற திசையில் $f = x^2 yz + 4xz^2$ ன் திசை வகைக்கெழுவைக் காண்க.

தீர்வு : $2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$ என்ற திசையில், $\hat{n} = \frac{2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}}{3}$

$$\begin{aligned} \nabla f &= \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 yz + 4xz^2) + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} (x^2 yz + 4xz^2) + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} (x^2 yz + 4xz^2) \\ &= \hat{i} (2xyz + 4z^2) + \hat{j} (x^2 z) + \hat{k} (x^2 y + 8xz) \end{aligned}$$

$(1, -2, -1)$ என்ற புள்ளியில் $2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$ என்ற திசையில் $f = x^2 yz + 4xz^2$ ன் திசை வகைக்கெழு

$$\begin{aligned} \nabla f \cdot \hat{n} &= \frac{1}{3} [2(2xyz + 4z^2) + (-x^2 z) - 2x^2 y - 16xz] \\ &= \frac{1}{3} [4xyz + 8z^2 - x^2 z - 2x^2 y - 16xz] \\ &= \frac{1}{3} [8 + 8 + 1 + 4 + 16] = \frac{1}{3} [37] = \frac{37}{3} \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.103 : வெளியில் எந்த இடத்திலும் வெப்பநிலை $T = xy + yz + zx$ ஆல் வழங்கப்படுகிறது.

$(1, 1, 1)$ என்ற புள்ளியில் $3\hat{i} - 4\hat{k}$ என்ற வெக்டர் திசையில் திசை வகைக்கெழுவைத் தீர்மானிக்கவும்.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டது $T = xy + yz + zx$

$$\nabla T = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) T$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) (xy + yz + zx)$$

$$= \hat{i}(y+z) + \hat{j}(z+x) + \hat{k}(x+y)$$

(1, 1, 1) என்ற புள்ளியில்,

$$\nabla T = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

(1,1,1) என்ற புள்ளியில் $3\hat{i} - 4\hat{k}$ என்ற வெக்டர் திசையில் திசை வகைக்கெழு

$$= (2\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}) \cdot \frac{3\hat{i} - 4\hat{k}}{\sqrt{9+16}} = \frac{1}{5}(6-8) = -\frac{2}{5}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.104 : $t = 0$ ல் $x = e^t$, $y = 2 \sin t + 1$ மற்றும் $z = t - \cos t$ க்கு தொடுகோட்டின் திசையில்

(1, 1, -1) புள்ளியில் $f(x, y, z) = x^2 y^2 z^2$ இன் திசை வகைக்கெழுவைக் கண்டறியவும்.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டது $f(x, y, z) = x^2 y^2 z^2$

$$\nabla f = 2xy^2 z^2 \hat{i} + 2x^2 yz^2 \hat{j} + 2x^2 y^2 z \hat{k}$$

$t = 0$ ல், $x = 1$, $y = 1$, $z = 0 - 1 = -1$, அதாவது (1, 1, -1) ல்

$$\nabla f = 2\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$$

(1, 1, -1) என்ற புள்ளியில் $f(x, y, z) = x^2 y^2 z^2$ என்ற மேற்பரப்பின் செங்குத்து வெக்டர் $2\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$.

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$\Rightarrow$

$$\vec{r} = e^t \hat{i} + (2 \sin t + 1) \hat{j} + (t - \cos t) \hat{k}$$

தொடுகோடு

$$= \frac{d\vec{r}}{dt} = e^t \hat{i} + 2 \cos t \hat{j} + (1 + \sin t) \hat{k}$$

(1, 1, -1) ல் தொடுகோடு அதாவது $t = 0$ ல், $\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

தொடுகோட்டின் திசையில் திசை வகைக்கெழு

$$= (2\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}) \cdot \frac{\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{1+4+1}}$$

$$= \frac{2+4-2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.105 : $ax^2 - byz = (a+2)x$ என்ற மேற்பரப்பு $4x^2 y + z^3 = 4$ என்ற மேற்பரப்பிற்கு (1, -1, 2)

என்ற புள்ளியில் செங்குத்து எனில் 'a' மற்றும் 'b' மாறிலிகளைக் கண்டறியவும்.

தீர்வு :

$$\phi_1 = ax^2 - byz - (a+2)x = 0$$

மற்றும் $\phi_2 = 4x^2 y + z^3 - 4$ என எடுத்துக்கொள்வோம்.

$\phi_1 = 0$ மற்றும் $\phi_2 = 0$ என்ற மேற்பரப்புக்கு $\vec{n}_1$ மற்றும் $\vec{n}_2$ என்பன செங்குத்து வெக்டர்கள் எனக் கொள்வோம்.

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$$

$$\Rightarrow [(a-2)\hat{i} - 2b\hat{j} + b\hat{k}] \cdot [-8\hat{i} + 4\hat{j} + 12\hat{k}] = 0$$

$$-8(a-2) - 2b \times 4 + 12b = 0$$

$$-8a + 16 + 4b = 0$$

$$2a - b = 4$$

...(1)

(1, -1, 2) என்ற புள்ளி $ax^2 - byz = (a + 2)x$ என்ற மேற்பரப்பில் உள்ளது.

$$a + 2b = a + 2 \Rightarrow b = 1$$

$b = 1$ என (1) ல் பிரதியிட,

$$2a - 1 = 4 \Rightarrow 2a = 5 \Rightarrow a = 5/2$$

எனவே $a = 2.5$ மற்றும் $b = 1$

எடுத்துக்காட்டு 4.106 : (1, -1, 3) என்ற புள்ளியில் $u = x^2 + yz^2$ ன் மிக உயர்ந்த விகிதம் என்ன?

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டது

$$u = x^2 + yz^2$$

பிறகு

$$\nabla u = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + yz^2) + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + yz^2) + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}(x^2 + yz^2)$$

$$= 2x\hat{i} + z^2\hat{j} + 2yz\hat{k}$$

$$= 2\hat{i} + 9\hat{j} - 6\hat{k}, (1, -1, 3) \text{ -ல்}$$

(1, -1, 3) என்ற புள்ளியில் u ன் மிக உயர்ந்த விகிதம்

$$= |\nabla u|$$

$$= |2\hat{i} + 9\hat{j} - 6\hat{k}| = \sqrt{4 + 81 + 36} = 11$$

எடுத்துக்காட்டு 4.107 : (1, -1, 2) என்ற புள்ளியில் தொடு தளம் மற்றும் $2xz^2 - 3xy - 4x = 7$ என்ற மேற்பரப்புக்கு செங்குத்து சமன்பாடுகளைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு : மேற்பரப்பின் சமன்பாடு $f(x, y, z) = 2xz^2 - 3xy - 4x - 7$

$$\nabla f = (2z^2 - 3y - 4)\hat{i} - 3x\hat{j} + 4xz\hat{k}$$

$$= 7\hat{i} - 3\hat{j} + 8\hat{k}, (1, -1, 2) \text{ -ல்}$$

$\therefore 7\hat{i} - 3\hat{j} + 8\hat{k}$ என்பது (1, -1, 2) என்ற புள்ளியில் மேற்பரப்பில் செங்குத்தாக உள்ள ஒரு வெக்டர் ஆகும்.

(1, -1, 2) என்ற புள்ளியின் நிலை வெக்டர் $\vec{r} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$.

$\vec{R} = X\hat{i} + Y\hat{j} + Z\hat{k}$ என்பது (1, -1, 2) என்ற புள்ளியின் தொடு தளத்தின் மேலுள்ள (X, Y, Z) என்ற ஏதேனும் புள்ளியின் நிலை வெக்டர் எனில், $\vec{R} - \vec{r}$ என்ற வெக்டர் ∇f என்ற வெக்டருக்கு செங்குத்தாக இருக்கும்.

$\therefore$ தொடு தளத்தின் சமன்பாடு $(\vec{R} - \vec{r}) \cdot \nabla f = 0$

அதாவது, $\{(X\hat{i} + Y\hat{j} + Z\hat{k}) - (\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})\} \cdot (7\hat{i} - 3\hat{j} + 8\hat{k}) = 0$

அதாவது, $\{(X-1)\hat{i} + (Y+1)\hat{j} + (Z-2)\hat{k}\} \cdot (7\hat{i} - 3\hat{j} + 8\hat{k}) = 0$

அதாவது, $7(X-1) - 3(Y+1) + 8(Z-2) = 0$

(1, -1, 2) என்ற புள்ளியின் மேற்பரப்பில் இயல்பான சமன்பாடுகள்

$$\frac{X-1}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y+1}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{Z-2}{\frac{\partial f}{\partial z}} \text{ அதாவது, } \frac{X-1}{7} = \frac{Y+1}{-3} = \frac{Z-2}{8}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.108 : $(4, 0, 3)$ என்ற புள்ளியில் $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ என்ற மேற்பரப்பில் தொடுதளம் மற்றும் இயல்பான கோட்டின் சமன்பாட்டைக் கண்டறியவும்.

தீர்வு : $f = x^2 + y^2 + z^2 - 25$ என எடுத்துக்கொள்வோம்

$$\begin{aligned} \text{grad} f &= \hat{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial f}{\partial z} \\ &= 2x\hat{i} + 2y\hat{j} + 2z\hat{k} \\ &= 8\hat{i} + 0\hat{j} + 6\hat{k} = 8\hat{i} + 6\hat{k}, (4, 0, 3) \text{ ல்} \end{aligned}$$

மேலும்

$$\vec{R} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}, \vec{r} = 4\hat{i} + 0\hat{j} + 3\hat{k}$$

$\therefore$

$$\vec{R} - \vec{r} = (x-4)\hat{i} + y\hat{j} + (z-3)\hat{k}$$

தொடு தளத்தின் சமன்பாடு $(\vec{R} - \vec{r}) \cdot \text{grad} f = 0$

$$\Rightarrow [(x-4)\hat{i} + y\hat{j} + (z-3)\hat{k}] \cdot [8\hat{i} + 6\hat{k}] = 0$$

$$\Rightarrow 8(x-4) + 6(z-3) = 0 \Rightarrow 4x + 3z = 25$$

இயல்பான கோட்டின் சமன்பாடு $(\vec{R} - \vec{r}) \times \text{grad} f = \vec{0}$

$$[(x-4)\hat{i} + y\hat{j} + (z-3)\hat{k}] \times [8\hat{i} + 6\hat{k}] = \vec{0} \Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x-4 & y & z-3 \\ 8 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow 3y\hat{i} + [4(z-3) - 3(x-4)]\hat{j} + (-4y)\hat{k} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$$

இரண்டு பக்கங்களிலிருந்தும் $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ -ன் குணகங்களை சமன்படுத்துவதன் மூலம் நாம் பெறுவது

$$3y = 0, 4(z-3) - 3(x-4) = 0, -4y = 0$$

$$\Rightarrow y = 0, \frac{x-4}{4} = \frac{z-3}{3}$$

$$\text{தேவையான இயல்பான சமன்பாடு } \frac{x-4}{4} = \frac{y}{0} = \frac{z-3}{3}$$

சுவாரஸ்யமான உண்மைகள்

- தொடுதலுக்கும் இயல்புக்கும் இடையிலான தொடர்பு என்னவென்றால், அவை ஒன்றுக்கு ஒன்று எதிர்மறையான தலைகீழ்.



அன்றாட வாழ்வில் பயன்பாடுகள்

- ♦ உங்கள் குழந்தைப் பருவத்தை நினைவில் கொள்ளுங்கள். நீங்கள் ஒரு மகிழ்ச்சியான சுற்றுப்பயணத்தில் இருக்கிறீர்கள், நீங்கள் வெளிப்புறத்தை நோக்கி ஒரு சக்தியை அனுபவிக்கிறீர்கள். உங்களை வெளியே தள்ளும் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் அந்த திசை இந்த கருத்து மூலம் கணக்கிடப்படுகிறது..
- ♦ நீங்கள் ஒரு சரத்துடன் ஒரு கல்லை இணைத்துள்ளீர்கள், அதை ஒரு வட்ட இயக்கத்தில் வானில் சுழற்றுகிறீர்கள். இடையில் உள்ள சரம் உடைப்புகளைக் கருத்தில் கொண்டு, கல் வெளிப்புறமாகத் தள்ளப்படுகிறது, அதன் திசை அந்த வட்டத்தின் தொடுகையில் உள்ளது.
- ♦ நாம் ஒரு மூலையில் ஒரு காரில் பயணித்து, சாலையில் வழக்கும் (எண்ணெய், பனி, நீர் அல்லது தளர்வான சரளை போன்றவை) ஓட்டினால், எங்கள் கார் சறுக்கத் தொடங்கினால், அது ஒரு திசையில் தொடுதலில் தொடரும் வளைவு, இது தொடுகோடுகளின் பயன்பாடு ஆகும்.
- ♦ நீங்கள் ஒரு காரில் வட்டப் பாதையில் வேகமாகச் செல்லும்போது, உங்களை வெளியே தள்ளுவதை நீங்கள் உணரும் சக்தி சாலையின் வளைவுக்கு இயல்பானது. சுவாரஸ்யமாக, உங்களை அந்த மூலையை சுற்றி செல்ல வைக்கும் சக்தி உண்மையில் வட்டத்தின் மையத்தை நோக்கி இயக்கப்படுகிறது, வட்டத்திற்கு இயல்பானது, இது இயல்பான ஒரு பயன்பாடு ஆகும்.

4.11.4 பாய்வு (Divergent)

$\vec{F} = F_1(x, y, z)\hat{i} + F_2(x, y, z)\hat{j} + F_3(x, y, z)\hat{k}$ என்ற வெக்டர் தளத்தின் பாய்வு $\text{div } \vec{F}$ என குறிக்கப்படுகிறது. மேலும் பின்வருமாறு விளக்கப்படுகிறது.

$$\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \hat{i} \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial \vec{F}}{\partial z} \quad \vec{F} = F_1 \hat{i} + F_2 \hat{j} + F_3 \hat{k} \text{ எனில்}$$

$$\text{div } \vec{F} = \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) (F_1 \hat{i} + F_2 \hat{j} + F_3 \hat{k})$$

$$\Rightarrow = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

4.11.5 சுழல் (Curl)

$\vec{F}$ என்ற வெக்டர் புள்ளி சார்பின் சுழல்

$$\text{curl } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (F_1 \hat{i} + F_2 \hat{j} + F_3 \hat{k})$$

$$\text{curl } \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i} \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) + \hat{j} \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

குறிப்பு : $\text{curl } \vec{F}$ ஐ

$$\text{curl } \vec{F} = \sum \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \hat{i} \text{ என்றும் எழுதலாம்}$$

பாய்வின் இயற்பியல் விளக்கம்

$P(x, y, z)$ என்ற புள்ளியில் வேகம் $\vec{V} = V_x \hat{i} + V_y \hat{j} + V_z \hat{k}$ கொண்ட

திரவத்தின் இயக்கத்தைக் கவனியுங்கள். விளிம்பு $\delta x, \delta y, \delta z$

உடன் இணைந்த சிறிய இணைகரத் திண்மத்தின் திரவத்தின் பெருந்திரளான அச்சுகளுக்கு இணையாக அதன் ஒரு மூலையுடன் P ஐக் கருதுக.

இப்போது PB' க்குள் நுழையும் திரவத்தின் அளவு அலகு

நேரத்தில் $= V_y \delta z \delta x$ மற்றும் $P'B$ ஐ விட்டு விலகும் போது

திரவத்தின் அளவு அலகு நேரத்தில் $= V_{y+\delta y} \delta z \delta x$

ஆனால், தோராயமாக $P'B$ ஐ விட்டு விலகும் போது திரவத்தின் அளவு அலகு நேரத்தில்

$$= \left[V_y + \frac{\partial V_y}{\partial y} \delta y \right] \delta z \delta x$$

இந்த இரண்டு பக்கங்களிலும் ஓட்டம் காரணமாக திரவத்தின் நிகர குறைவு $= \frac{\partial V_y}{\partial y} \delta x \delta y \delta z$

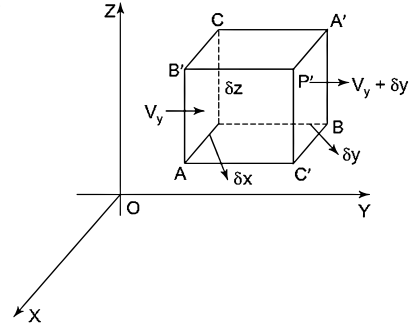
எனவே, இணைகரத்திண்மத்தின் உள்ளே உள்ள திரவத்தின் மொத்த குறைவு

$$\text{அலகு நேரத்தில்} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \delta x \delta y \delta z$$

$$\text{எனவே, ஒரு அலகு கனஅளவுக்கு திரவ இழப்பு விகிதம்} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = \text{div } \vec{V}$$

எனவே $\text{div } \vec{V}$ ஆனது அத்தகைய திரவத்தின் வீதம் ஒரு அலகு கனஅளவுக்கு ஒரு புள்ளியில் தருகிறது. இதேபோல் $\vec{V}$ என்பது ஒரு மின்சார இளக்கியைக் குறிக்கிறது என்றால் $\text{div } \vec{V}$ என்பது ஒரு அலகு கனஅளவுக்கு மாறுபடும் இளக்கி அளவு ஆகும். $\vec{V}$ என்பது வெப்ப இளக்கி என்றால், $\text{div } \vec{V}$ என்பது ஒரு புள்ளியில் இருந்து ஒரு அலகு கனஅளவுக்கு வெப்பத்தை வெளியிடும் விகிதம் ஆகும். பொதுவாக, $\vec{V}$ எந்த இயற்பியல் அளவையும் குறிக்கிறது என்றால், பின்னர் $\text{div } \vec{V}$ என்பது ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் கொடுக்கப்பட்ட ஒரு அலகு கனஅளவுக்கு அந்த நேரத்தில் இயற்பியல் அளவு வழங்கப்படுகிறது. இது ஒரு வெக்டர் புள்ளி சாய்பின் பெயருக்கான விளக்கத்தை அளிக்கிறது.

குறிப்புரை : $\text{div } \vec{V} = 0$ என்றால், ஒவ்வொரு இடத்திலும், அத்தகைய புள்ளி சார்பு $\vec{V}$ பாய்விலா வெக்டர் சார்பு (solenoidal vector function) என்று அழைக்கப்படுகிறது.



படம் 4.6

வெக்டர் சுழலின் இயற்பியல் விளக்கம்

O மூலம் ஒரு நிலையான அச்சைப் பற்றி ஒரு விறைப்புள்ள பொருளின் சுழற்சியைக் கருதுங்கள். $\vec{\omega}$ அதன் கோண வேகம் என்றால், $P(\vec{R})$ என்ற பொருளின் துகளின் திசைவேகம் $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{R}$ $\vec{\omega} = \omega_1 \hat{i} + \omega_2 \hat{j} + \omega_3 \hat{k}$ மற்றும் $\vec{R} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ எனில்

$$\begin{aligned}\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{R} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} \\ &= \hat{i}(\omega_2 z - \omega_3 y) + \hat{j}(\omega_3 x - \omega_1 z) + \hat{k}(\omega_1 y - \omega_2 x) \\ \text{curl } \vec{V} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ (\omega_2 z - \omega_3 y) & (\omega_3 x - \omega_1 z) & (\omega_1 y - \omega_2 x) \end{vmatrix} \\ &= \hat{i}(\omega_1 + \omega_1) + \hat{j}(\omega_2 + \omega_2) + \hat{k}(\omega_3 + \omega_3) \\ &= 2(\omega_1 \hat{i} + \omega_2 \hat{j} + \omega_3 \hat{k}) = 2\vec{\omega} \\ \vec{\omega} &= \frac{1}{2} \text{curl } \vec{V}\end{aligned}$$

பின்னர் எந்த இடத்திலும் சுழற்சியின் கோண வேகம் அதன் திசைவேகப் புள்ளி சார்பின் பாதி சுழலுக்கு சமம்.

பொதுவாக, எந்த வெக்டர் புள்ளி சார்பின் சுழல் வெக்டர் புலத்தின் எந்தப் புள்ளியிலும் கோண திசைவேகத்தின் அளவை அளிக்கிறது.

குறிப்புரை: $\vec{V}$ ஒரு இயக்கத்தில் இருந்தால், திசைவேக வெக்டர் புள்ளி சார்பின் சுழல் பூஜ்யம் அதாவது $\text{curl } \vec{V} = 0$ பின்னர் இது சுழற்சியற்றது மற்றபடி சுழற்சி என்று கூறப்படுகிறது.

4.12 ∇ மூலம் மீண்டும் மீண்டும் செயல்பாடுகள்

$\text{grad } f$ and $\text{curl } \vec{F}$ என்பன வெக்டர் புள்ளி சார்புகள் என்பதால் அதன் பாய்வு மற்றும் சுழலை நம்மால் கண்டுபிடிக்க முடியும். அதேபோல் $\text{div } \vec{F}$ என்பது திசையிலி புள்ளி சார்பு என்பதால் அதன் சாய்வு விகிதத்தை நம்மால் கண்டுபிடிக்க முடியும்.

இவ்வாறு நமக்கு பின்வரும் அடையாளங்கள் உள்ளன.

$$i. \quad \text{div grad } f = \nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$ii. \quad \text{curl grad } f = \nabla \times \nabla f = 0$$

$$\text{iii. } \operatorname{div} \operatorname{curl} \vec{F} = \nabla \cdot \nabla \times \vec{F} = 0$$

$$\text{iv. } \operatorname{curl} \operatorname{curl} \vec{F} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{F} - \nabla^2 \vec{F} \text{ i.e., } \nabla \times \nabla \times \vec{F} = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$$

$$\text{v. } \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{F} = \operatorname{curl} \operatorname{curl} \vec{F} + \nabla^2 \vec{F}$$

$$\text{i.e., } \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) = \nabla \times (\nabla \times \vec{F}) + \nabla^2 \vec{F}$$

Proof:

$$\text{i. } \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

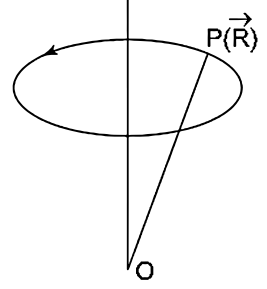
$$\begin{aligned} \text{Now } \nabla \cdot \nabla f &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k} \right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f \\ &= \nabla^2 f \end{aligned}$$

$$\text{ii. } \operatorname{curl} \operatorname{grad} f = \nabla \times \nabla f = \nabla \times \left(\frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k} \right)$$

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \sum \hat{i} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{iii. } \operatorname{grad} \operatorname{curl} \vec{F} = \nabla \cdot \nabla \times \vec{F}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot \left(\hat{i} \times \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + \hat{j} \times \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} + \hat{k} \times \frac{\partial \vec{F}}{\partial z} \right) \\ &= \sum \left[\hat{i} \cdot \left(\hat{i} \times \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x^2} \right) + \hat{i} \cdot \left(\hat{j} \times \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x \partial y} \right) + \hat{i} \cdot \left(\hat{k} \times \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x \partial z} \right) \right] \\ &= \sum \left[\hat{i} \times \hat{i} \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x^2} + \hat{i} \times \hat{j} \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x \partial y} + \hat{i} \times \hat{k} \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x \partial z} \right] \end{aligned}$$



படம் 4.7

$$= \sum \left[\hat{k} \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x \partial z} - \hat{j} \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x \partial y} \right] = 0$$

iv. $\text{curl curl } \vec{F} = \nabla \times \nabla \times \vec{F}$

$$\begin{aligned} &= \sum \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} \times \left[\hat{i} \times \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + \hat{j} \times \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} + \hat{k} \times \frac{\partial \vec{F}}{\partial z} \right] \\ &= \sum \left[\hat{i} \times \hat{i} \times \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x^2} + \hat{i} \times \hat{j} \times \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x \partial y} + \hat{i} \times \hat{k} \times \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x \partial z} \right] \\ &= \sum \left[\left(\hat{i} \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x^2} \right) \hat{i} - (\hat{i} \cdot \hat{i}) \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x^2} + \left(\hat{i} \cdot \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x \partial y} \right) \hat{j} - (\hat{i} \cdot \hat{j}) \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x \partial y} + \left(\hat{i} \cdot \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x \partial z} \right) \hat{k} - (\hat{i} \cdot \hat{k}) \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x \partial z} \right] \\ &= \sum \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} \left[\hat{i} \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + \hat{k} \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} \right] - \sum \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x^2} \\ &= \sum \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} \left[\hat{i} \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + \hat{k} \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} \right] - \nabla^2 \vec{F} \\ &= \nabla (\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F} = \text{grad} (\text{div } \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F} \end{aligned}$$

v. முந்தைய கணக்கில், நாம் நிரூபித்தது

$$\text{curl curl } \vec{F} = \nabla (\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \nabla (\nabla \cdot \vec{F}) &= \text{curl curl } \vec{F} + \nabla^2 \vec{F} \\ &= \nabla \times (\nabla \times \vec{F}) + \nabla^2 \vec{F} \end{aligned}$$

4.13 பாய்வு மற்றும் சுழலின் பண்புகள்

i. $\nabla (fg) = f \nabla g + g \nabla f$

ii. $\nabla \cdot (f\vec{G}) = \nabla f \cdot \vec{G} + f \nabla \cdot \vec{G}$

iii. $\nabla \times (f\vec{G}) = \nabla f \times \vec{G} + f \nabla \times \vec{G}$

iv. $\nabla (\vec{F} \cdot \vec{G}) = (\vec{F} \cdot \nabla) \vec{G} + (\vec{G} \cdot \nabla) \vec{F} + \vec{F} \times (\nabla \times \vec{G}) + \vec{G} \times (\nabla \times \vec{F})$

v. $\nabla \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot (\nabla \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\nabla \times \vec{G})$

vi. $\nabla \times (\vec{F} \cdot \vec{G}) = \vec{F} (\nabla \cdot \vec{G}) - \vec{G} (\nabla \cdot \vec{F}) + \vec{G} \cdot \nabla \vec{F} - \vec{F} \cdot \nabla \vec{G}$

Proof:

$$\begin{aligned}
 i. \quad \nabla(fg) &= \sum \hat{i} \frac{\partial}{\partial x}(fg) \\
 &= \sum \hat{i} \left\{ g \frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial g}{\partial x} \right\} \\
 &= \sum \hat{i} g \frac{\partial f}{\partial x} + \sum \hat{i} f \frac{\partial g}{\partial x} \\
 &= g \sum \hat{i} \frac{\partial f}{\partial x} + f \sum \hat{i} \frac{\partial g}{\partial x} = g \nabla f + f \nabla g
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ii. \quad \nabla \cdot (f\vec{G}) &= \sum \hat{i} \frac{\partial}{\partial x}(f\vec{G}) \\
 &= \sum \hat{i} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \vec{G} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial x} f \right\} \\
 &= \sum \hat{i} \frac{\partial f}{\partial x} \vec{G} + f \sum \hat{i} \frac{\partial \vec{G}}{\partial x} = \vec{G} \cdot \nabla f + f \nabla \cdot \vec{G}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 iii. \quad \nabla \times (f\vec{G}) &= \sum \hat{i} \times \frac{\partial}{\partial x}(f\vec{G}) \\
 &= \sum \hat{i} \times \left(\frac{\partial f}{\partial x} \vec{G} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial x} f \right) \\
 &= \sum \hat{i} \frac{\partial f}{\partial x} \times \vec{G} + \sum \hat{i} \times \frac{\partial \vec{G}}{\partial x} f = \nabla f \times \vec{G} + f \nabla \times \vec{G}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 iv. \quad \nabla(\vec{F} \cdot \vec{G}) &= \sum \hat{i} \frac{\partial}{\partial x}(\vec{F} \cdot \vec{G}) = \sum \hat{i} \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} \cdot \vec{G} + \sum \hat{i} \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{G}}{\partial x} \\
 \vec{F} \times (\nabla \times \vec{G}) &= \vec{F} \times \sum \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} \times \vec{G} \\
 &= \vec{F} \times \sum \hat{i} \times \frac{\partial \vec{G}}{\partial x} \\
 &= \sum \vec{F} \times \hat{i} \times \frac{\partial \vec{G}}{\partial x} \\
 &= \sum \left[\left(\vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{G}}{\partial x} \right) \hat{i} - (\vec{F} \cdot \hat{i}) \frac{\partial \vec{G}}{\partial x} \right]
 \end{aligned}$$

$$\sum \hat{i} \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{G}}{\partial x} = \vec{F} \times (\nabla \times \vec{G}) + \sum (\vec{F} \cdot \hat{i}) \frac{\partial \vec{G}}{\partial x}$$

இதேபோல், $\sum \hat{i} \vec{G} \cdot \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} = \vec{G} \times (\nabla \times \vec{F}) + \sum (\vec{G} \cdot \hat{i}) \frac{\partial \vec{F}}{\partial x}$

$$\begin{aligned} \nabla (\vec{F} \cdot \vec{G}) &= \vec{F} \times (\nabla \times \vec{G}) + \vec{G} \times (\nabla \times \vec{F}) + \sum (\vec{F} \cdot \hat{i}) \frac{\partial \vec{G}}{\partial x} + \sum (\vec{G} \cdot \hat{i}) \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} \\ &= \vec{F} \times (\nabla \times \vec{G}) + \vec{G} \times (\nabla \times \vec{F}) + (\vec{F} \cdot \nabla) \vec{G} + (\vec{G} \cdot \nabla) \vec{F} \end{aligned}$$

v. $\nabla \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot (\nabla \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\nabla \times \vec{G})$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) &= \sum \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} (\vec{F} \times \vec{G}) = \sum \hat{i} \left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial x} \times \vec{G} \right) + \sum \hat{i} \left(\vec{F} \times \frac{\partial \vec{G}}{\partial x} \right) \\ &= \sum \hat{i} \left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial x} \times \vec{G} \right) - \sum \hat{i} \left(\frac{\partial \vec{G}}{\partial x} \times \vec{F} \right) \\ &= \sum \left(\hat{i} \times \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} \right) \cdot \vec{G} - \sum \left(\hat{i} \times \frac{\partial \vec{G}}{\partial x} \right) \cdot \vec{F} \\ &= \vec{G} \cdot (\nabla \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\nabla \times \vec{G}) \end{aligned}$$

vi. $\nabla \times (\vec{F} \times \vec{G}) = \sum \hat{i} \times \frac{\partial}{\partial x} (\vec{F} \times \vec{G}) = \sum \hat{i} \times \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} \times \vec{G} + \sum \hat{i} \times \vec{F} \times \frac{\partial \vec{G}}{\partial x}$

$$\begin{aligned} &= \sum \left[\left(\hat{i} \cdot \vec{G} \right) \times \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} - \left(\hat{i} \cdot \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} \right) \vec{G} + \left(\hat{i} \cdot \frac{\partial \vec{G}}{\partial x} \right) \vec{F} - \left(\hat{i} \cdot \vec{F} \right) \frac{\partial \vec{G}}{\partial x} \right] \\ &= \nabla \vec{F} \cdot \vec{G} - (\nabla \cdot \vec{F}) \vec{G} + (\nabla \cdot \vec{G}) \vec{F} - \nabla \vec{G} \cdot \vec{F} \end{aligned}$$

$$\nabla \times (\vec{F} \cdot \vec{G}) = \vec{F} (\nabla \cdot \vec{G}) - \vec{G} (\nabla \cdot \vec{F}) + \vec{G} \cdot \nabla \vec{F} - \vec{F} \cdot \nabla \vec{G}$$

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 4.109: $\vec{R} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ மற்றும் $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ எனில் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

i. $\nabla \left(\frac{1}{r^2} \right) = -\frac{2\vec{R}}{r^4}$ ii. $\text{div} (r^n \vec{R}) = (3+n)r^n$ iii. $\nabla \left(\frac{\nabla \cdot \vec{R}}{r} \right) = -\frac{3\vec{R}}{r^3}$

தீர்வு :

i. $\nabla \left(\frac{1}{r^2} \right) = \sum \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r^2} \right)$

$$\begin{aligned}
&= \sum \hat{i} \frac{-2}{r^3} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) \\
&= -2 \sum \hat{i} \frac{1}{r^3} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) \\
&= -2 \sum \hat{i} \frac{1}{r^3} \frac{x}{r} = -2 \sum \hat{i} \frac{x}{r^4} \\
&= \frac{-2}{r^4} \sum (\hat{i}x) = \frac{-2}{r^4} \vec{R}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ii. \quad \operatorname{div} (r^n \vec{R}) &= r^n \nabla \cdot \vec{R} + \nabla r^n \cdot \vec{R} \\
&= r^n \sum \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) + \nabla r^n \cdot \vec{R} \\
&= r^n \sum \hat{i} \hat{i} + \nabla r^n \cdot \vec{R} \\
&= r^n \sum 1 + \nabla r^n \cdot \vec{R} \\
&= 3r^n + \nabla r^n \cdot \vec{R} \\
\nabla r^n &= \sum \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} (r^n) \\
&= \sum \hat{i} n r^{n-1} \frac{x}{r} \\
&= \sum \hat{i} n r^{n-2} x = n r^{n-2} \sum \hat{i} x = n r^{n-2} \vec{R} \\
\operatorname{div} (r^n \vec{R}) &= 3r^n + n r^{n-2} \vec{R} \cdot \vec{R} \\
&= 3r^n + n r^{n-2} \times r^2 = (3+n)r^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
iii. \quad \nabla \left(\frac{\nabla \cdot \vec{R}}{r} \right) &= \nabla \left(\frac{\sum \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})}{r} \right) \\
&= \nabla \left(\frac{3}{r} \right) = 3 \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = 3 \left[\sum \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) \right] \\
&= 3 \sum \hat{i} \left(-\frac{1}{r^2} \right) \frac{\partial r}{\partial x} \\
&= -\frac{3}{r^2} \sum \hat{i} x = -\frac{3}{r^3} \sum \hat{i} x = -\frac{3}{r^3} \vec{R}
\end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.110 : $\vec{R} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ மற்றும் $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ எனில் $\nabla^2 f(r) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r)$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

$$\nabla^2 f(r) = \frac{\partial^2 f(r)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(r)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(r)}{\partial z^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(r)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial r} \{f(r)\} \frac{\partial r}{\partial x} \\ &= f'(r) \frac{x}{r} = \frac{f'(r)}{r} x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(r)}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{f'(r) \cdot x}{r} \right] \\ &= \frac{f'(r)}{r} + x \cdot \frac{rf''(r) - f'(r)}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} \\ &= \frac{f'(r)}{r} + x \cdot \frac{rf''(r) - f'(r)}{r^2} \frac{x}{r} \\ &= \frac{f'(r)}{r} + \frac{x^2}{r^3} [rf''(r) - f'(r)] \end{aligned}$$

இதேபோல்,

$$\frac{\partial^2 f(r)}{\partial y^2} = \frac{f'(r)}{r} + \frac{y^2}{r^3} [rf''(r) - f'(r)]$$

$$\frac{\partial^2 f(r)}{\partial z^2} = \frac{f'(r)}{r} + \frac{z^2}{r^3} [rf''(r) - f'(r)]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(r)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(r)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(r)}{\partial z^2} &= \frac{3f'(r)}{r} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^3} [rf''(r) - f'(r)] \\ &= \frac{3f'(r)}{r} + \frac{1}{r} [rf''(r) - f'(r)] \\ &= \frac{3f'(r)}{r} + f''(r) - \frac{f'(r)}{r} \\ &= f''(r) + \frac{2f'(r)}{r} \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.111 : $\text{div}(\text{grad } r^n) = n(n+1)r^{n-2}$ என நிறுவுக.

தீர்வு : $\text{grad } r^n = \nabla r^n = nr^{n-2} \vec{R}$ என நாம் அறிந்ததே.

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\operatorname{grad} r^n) &= \nabla \cdot (nr^{n-2} \vec{R}) \\
&= n \left[\nabla(r^{n-2}) \cdot \vec{R} + r^{n-2} \nabla \cdot \vec{R} \right] \\
&= n \left[(n-2)(r^{n-4}) \vec{R} \cdot \vec{R} + r^{n-2} \nabla \cdot \vec{R} \right] \\
&= n(n-2)(r^{n-4} \cdot r^2) + nr^{n-2} \cdot 3 \\
&= nr^{n-2}(n-2+3) = n(n+1)r^{n-2}
\end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.112 : $\vec{A} \cdot \nabla \vec{B} \cdot \nabla \frac{1}{r} = \frac{3(\vec{A} \cdot \vec{R})(\vec{B} \cdot \vec{R})}{r^5} - \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{r^3}$ என நிறுவுக.

தீர்வு : $\nabla \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^3} \vec{R}$ என நாம் அறிந்ததே.

$$\begin{aligned}
\vec{B} \cdot \nabla \frac{1}{r} &= -\frac{\vec{B} \cdot \vec{R}}{r^3} \\
\nabla \left(\vec{B} \cdot \nabla \frac{1}{r} \right) &= -\nabla \left[\frac{1}{r^3} (\vec{B} \cdot \vec{R}) \right] \\
&= -\left[\sum \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r^3} \vec{B} \cdot \vec{R} \right) \right] \\
&= -\sum \hat{i} \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r^3} \vec{B} \cdot \vec{R} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial x} (\vec{B} \cdot \vec{R}) \right] \\
&= \sum \hat{i} \left[\left(\frac{-3}{r^4} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \right) (\vec{B} \cdot \vec{R}) + \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial x} (\vec{B} \cdot \vec{R}) \right] \\
&\quad \because \frac{\partial}{\partial x} (\vec{B} \cdot \vec{R}) = \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} \cdot \vec{R} + \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial x} = \vec{B} \cdot \hat{i} \quad \vec{B} \text{ என்பது மாறிலி} \\
&= -\sum \hat{i} \left[\frac{x}{r} \left(\frac{-3}{r^4} \right) (\vec{B} \cdot \vec{R}) + \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial x} (\vec{B} \cdot \vec{R}) \right] \\
&= \frac{3}{r^5} \sum \hat{i} x (\vec{B} \cdot \vec{R}) - \frac{1}{r^3} \sum (\vec{B} \cdot \hat{i}) \hat{i} \\
&= \frac{3}{r^5} \vec{R} (\vec{B} \cdot \vec{R}) - \frac{1}{r^3} \sum (\vec{B} \cdot \hat{i}) \hat{i} \\
&= \frac{3}{r^5} \vec{R} (\vec{B} \cdot \vec{R}) - \frac{1}{r^3} \vec{B} \\
&= \frac{3}{r^5} \vec{R} (\vec{B} \cdot \vec{R}) - \frac{\vec{B}}{r^3} \\
\vec{A} \cdot \left[\nabla \left(\vec{B} \cdot \nabla \frac{1}{r} \right) \right] &= \frac{3(\vec{A} \cdot \vec{R})(\vec{B} \cdot \vec{R})}{r^5} - \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{r^3}
\end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 4.113 : $\text{curl} \left[\hat{k} \times \text{grad} \frac{1}{r} \right] + \text{grad} \left[\hat{k} \cdot \text{grad} \frac{1}{r} \right] = 0$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

$$\text{grad} \frac{1}{r} = \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \hat{=} \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$= \sum \hat{i} \left(\frac{-1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} \right)$$

$$= \sum \hat{i} \left(\frac{-1}{r^2} \right) \frac{x}{r} = \sum \hat{i} \frac{x}{r^3} = \frac{-\vec{R}}{r^3}$$

$$\hat{k} \cdot \text{grad} \frac{1}{r} = \frac{-\hat{k} \times \vec{R}}{r^3} = \frac{-\hat{k} \times [x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}]}{r^3}$$

$$= \frac{-(x\hat{j} - y\hat{i})}{r^3} = \frac{y\hat{i} - x\hat{j}}{r^3}$$

$$\text{curl} \left[\hat{k} \cdot \text{grad} \frac{1}{r} \right] = \nabla \times \left[\frac{y\hat{i} - x\hat{j}}{r^3} \right]$$

$$= \nabla \times \left[\frac{1}{r^3} (y\hat{i} - x\hat{j}) \right]$$

$$= \frac{1}{r^3} [\nabla \times (y\hat{i} - x\hat{j})] + \nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) \times (y\hat{i} - x\hat{j})$$

$$\text{ஆனால் } \nabla \times (y\hat{i} - x\hat{j}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y & -x & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(0+0) + \hat{j}(0-0) + \hat{k}(-1-1) = -2\hat{k}$$

$$\text{curl} \left[\hat{k} \times \text{grad} \frac{1}{r} \right] = -\frac{2\hat{k}}{r^3} + \left(\frac{-3\vec{R}}{r^5} \right) \times (y\hat{i} - x\hat{j})$$

$$= -\frac{2\hat{k}}{r^3} - \frac{3}{r^5} (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \times (y\hat{i} - x\hat{j})$$

$$= -\frac{2\hat{k}}{r^3} - \frac{3}{r^5} (-x^2\hat{k} - y^2\hat{k} + yz\hat{j} + xz\hat{i})$$

$$= \frac{-2\hat{k}(x^2 + y^2 + z^2) + 3\hat{k}x^2 + 3\hat{k}y^2 - 3yz\hat{j} - 3xz\hat{i}}{r^5}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{kx^2 + ky^2 - 2kz^2 - 3yzj - 3xz\hat{i}}{r^5} \\
&= \frac{x^2\hat{k} + y^2\hat{k} - 2z^2\hat{k} - 3yzj - 3xz\hat{i}}{r^5} \quad \dots(i)
\end{aligned}$$

$$\text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) = \left(\frac{-1}{r^3} \vec{R} \right)$$

$$\hat{k} \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) = \left(\frac{-\hat{k} \cdot \vec{R}}{r^3} \right) = \frac{-\hat{k} \cdot [x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}]}{r^3} = \frac{-z}{r^3}$$

$$\text{grad} \left[\hat{k} \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) \right] = \nabla \left(\frac{-z}{r^3} \right) = -\nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) z = -\frac{1}{r^3} \nabla z$$

$$= \frac{3}{r^5} \vec{R} z - \frac{1}{r^3} [\nabla z]$$

$$= \frac{3}{r^5} [x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}] z - \frac{1}{r^3} \left[\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right] z$$

$$= \frac{3}{r^5} [xz\hat{i} + yz\hat{j} + z^2\hat{k}] - \frac{\hat{k}}{r^3}$$

$$= \frac{3xz\hat{i}}{r^5} + \frac{3yz\hat{j}}{r^5} + \frac{3z^2\hat{k}}{r^5} - \frac{\hat{k}(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5}$$

$$= - \left[\frac{kx^2 + ky^2 - 2kz^2 - 3xz\hat{i} - 3zy\hat{j}}{r^5} \right] \quad \dots(ii)$$

$$\text{curl} \left[\hat{k} \times \text{grad} \frac{1}{r} \right] + \text{grad} \left[\hat{k} \cdot \text{grad} \frac{1}{r} \right] = 0$$

[(i) v மற்றும் (ii) லிருந்து]

பயிற்சி 4.9

1. $f = 3x^2y - y^3z^2$ எனில் $(1, -2, -1)$ என்ற புள்ளியில் $\text{grad } f$ ஐக் காண்க.
2. $\phi = (3r^2y - 4\sqrt{r} + 6r^{-1/3})$ எனில் $\nabla \phi$ ஐக் காண்க.
3. $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ எனில் $\text{grad } f$ ஐக் காண்க.
4. $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ எனில் $\text{grad } e^{r^2}$ ஐக் கண்டுபிடி.

5. $(-1, 2, 1)$ என்ற புள்ளியில் $x \log z - y^2 = -4$ என்ற வெக்டர் திசையில் $f = xy^2 + yz^3$ என்ற எண்ணிச்சார்பின் திசை வகைக்கெழுவை $(2, -1, 1)$ என்ற புள்ளியில் காண்க.
6. $(5, 0, 4)$ என்ற Q புள்ளியில் PQ என்ற திசையில் $\phi = x^2 - y^2 + 2z^2$ என்ற சார்பின் திசை வகைக்கெழுவை $(1, 2, 3)$ என்ற புள்ளியில் காண்க.
7. $(-3, 5, 6)$ என்ற B புள்ளியில் AB என்ற திசையில் $\phi = 3e^{2x-y+z}$ என்ற சார்பின் திசை வகைக்கெழுவை $(1, 1, -1)$ என்ற புள்ளியில் காண்க.
8. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$ என்ற கோட்டிற்கு இணையான திசையில் $\phi = ax^2y + by^2z + cz^2x$ என்ற சார்பின் திசை வகைக்கெழு $(1, 1, 1)$ என்ற புள்ளியில் அதிகபட்சமாக 15 ஆக இருப்பின் a, b & c ன் மதிப்புகளைக் காண்க காண்க.
9. $(1, 2, 2)$ என்ற புள்ளியில் $xyz = 4$ என்ற மேற்பரப்புக்கு இயல்பான மற்றும் தொடுதள சமன்பாட்டைக் கண்டறியவும்.
10. $(2, 1, -3)$ என்ற புள்ளியில் $2x^2 + y^2 + 2z = 3$ என்ற மேற்பரப்பில் இயல்பான மற்றும் தொடுதள சாதாரண கோட்டின் சமன்பாட்டைக் கண்டறியவும்.
11. பின்வரும் வெக்டர்களின் பாய்வு மற்றும் சுழலைக் காண்க.
 $i. \vec{V} = (xyz)\hat{i} + (3x^2y)\hat{j} + (xz^2 + y^2z)\hat{k}$ $ii. \vec{R} = (x^2 + yz)\hat{i} + (y^2 + zx)\hat{j} + (z^2 + xy)\hat{k}$
12. $\vec{F} = \text{grad}(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ எனில் $\text{curl } \vec{F}$ ஐக் காண்க.
13. பின்வரும் வெக்டர்கள் பாய்வில்லா வெக்டர்கள் என நிரூபி.
 $i. (x + 3y)\hat{i} + (y - 3z)\hat{j} + (x - 2z)\hat{k}$ $ii. 3y^4z^2\hat{i} + 4x^2z^2\hat{j} + 3x^2y^2\hat{k}$
14. $\vec{A}$ என்பது ஒரு மாறிலி வெக்டர் மற்றும் $\vec{R} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ எனில் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.
 $i. \text{grad}(\vec{A} \cdot \vec{R}) = \vec{A}$ $ii. \text{curl}(\vec{A} \times \vec{R}) = 2\vec{A}$
15. நிறுவுக:
 $i. \nabla \vec{A}^2 = 2(\vec{A} \cdot \vec{V}) = 2\vec{A} \times (\vec{V} \times \vec{A}), \vec{A}$ என்பது ஒரு மாறிலி வெக்டர்
 $ii. \text{curl}\{(\vec{A} \cdot \vec{R})\vec{R}\} = \vec{A} \times \vec{R}$
16. r மற்றும் $\vec{R}$ அவற்றின் வழக்கமான அர்த்தங்கள் மற்றும் $\vec{A}$ ஒரு நிலையான வெக்டர் என்றால்
 $\nabla \times \left(\frac{\vec{A} \times \vec{R}}{r^n} \right) = \frac{2-n}{r^n} \vec{A} + \frac{n(\vec{A} \cdot \vec{R})}{r^{n+2}} \vec{R}$ என நிறுவுக.
17. $\vec{V}_1$ மற்றும் $\vec{V}_2$ என்பன (x_1, y_1, z_1) மற்றும் (x_2, y_2, z_2) என்ற நிலையான புள்ளிகளை இணைக்கும் வெக்டர்களாக இருந்தால் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.
 $i. \text{div}(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2) = 0$ $ii. \text{grad}(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$ $iii. \text{curl}(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2) = 2(\vec{V}_1 - \vec{V}_2)$

18. $u\vec{F} = \nabla v$, u மற்றும் v என்பன அளவி புலங்கள் மற்றும் $\vec{F}$ என்பது வெக்டர் புலம் எனில், $\vec{F} \text{ curl } \vec{F} = 0$ என நிறுவுக.

விடைகள்

1. $-12\hat{i} - 9\hat{j} - 16\hat{k}$
2. $2(3 - r^{-3/2} - r^{-7/3})r$
3. $\frac{\vec{r}}{r}$
4. $2e^{r^2}\vec{r}$
5. $\frac{15}{\sqrt{17}}$
6. $\frac{28}{\sqrt{21}}$
7. $\frac{-5}{3}$
8. $a = 4k; b = -11k; c = 10k$, where $k = \pm \frac{5}{9}$
9. $2x + y + z - 6 = 0; \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{1}$
10. $4x + y + z - 6 = 0; \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{1}$
11. i. $\text{div} = yz + 3x^2 + 2xz + y^2$ $\text{curl} = 2yz\hat{i} + (xy - z)\hat{j} + x(6y - z)\hat{k}$
ii. $\text{div} = 2x + 2y + 2z$ $\text{curl} = 0$
12. $\vec{0}$

சுவாரஸ்யமான உண்மைகள்

- ♦ ஒரு டாய்லெட் பானையின் மிக எளிய உதாரணத்தைக் கவனியுங்கள். பாயும் நீர், இது ஒரு அளவைக் கொண்டுள்ளது மற்றும் திசை நமக்கு மூன்றையும் கற்பிக்க முடியும். பாய்வு எந்த திசையில் தண்ணீர் பாய்கிறது மற்றும் அதன் அளவு என்ன என்பதை காட்டுகிறது. பாய்வு “பானையின் இந்த இடத்தில், தண்ணீர் எவ்வளவு வேகமாக நகர்கிறது” அல்லது “இந்த இடத்தில் நீரின் அழுத்தம் என்ன” என்பதைக் காட்டுகிறது. மற்றும் சுழல் “தண்ணீர் எவ்வளவு பானையின் இந்தப் பகுதியில் முறுக்குகிறது” என்பதைக் காட்டுகிறது.
- ♦ வாட்டத்தின் மற்றொரு உண்மையான உதாரணம் நீங்கள் ஒரு படுக்கையில் நகர்கிறீர்கள். சில புள்ளிகளில் பெட் ஷீட் குண்டாக மாறும். . அது எவ்வளவு மாறுகிறது என்பதே வாட்டம்.



அன்றாட வாழ்வில் பயன்பாடுகள்

- ♦ ஐன்ஸ்டீன் ஈர்ப்பு விதி என்பது ஒரு மாறுபட்ட சமன்பாடு.
- ♦ ஜெட் என்ஜின்கள் மற்றும் குழாய்களின் திரவ ஓட்டத்திலும் அவை அடிப்படை.

அகநிலை தீர்க்கப்பட்ட கேள்விகள்
(Subjective Solved Questions)

எடுத்துக்காட்டு 1 : $u = ayz + bzx + cxy$ என்ற சார்புக்கு பெருமம் அல்லது சிறுமம் இருக்கும்போது எண் n ஐ x, y, z என மூன்று பகுதிகளாகப் பிரிக்கவும். அது பெருமமா அல்லது சிறுமமா என்பதைத் தீர்மானி.

தீர்வு : n ஆனது x, y, z என மூன்று பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளதாக கொள்வோம்.

$$x + y + z = n \quad \dots(1)$$

$$\text{மற்றும்} \quad u = ayz + bzx + cxy \quad \dots(2)$$

u பெருமம் அல்லது சிறுமமாக இருப்பதற்கான நிபந்தனை $du = 0$

$$\Rightarrow (bz + cy)dx + (cx + az)dy + (ay + bx)dz = 0 \quad \dots(3)$$

$$(1) \text{ இலிருந்து, வகையீட்டில், } dx + dy + dz = 0 \quad \dots(4)$$

(3) மற்றும் (4) முறையே 1 மற்றும் λ ஆல் பெருக்கி, dx, dy, dz ன் கெழுக்களை கூட்டி பூஜ்ஜியத்துக்கு சமன் செய்ய, நமக்கு கிடைப்பது

$$bz + cy + \lambda = 0 \quad \dots(5)$$

$$cx + az + \lambda = 0 \quad \dots(6)$$

$$ay + bx + \lambda = 0 \quad \dots(7)$$

(5) ஐ x ஆலும், (6) ஐ y ஆலும் (7) ஐ z ஆலும் பெருக்கி, கூட்ட நமக்கு கிடைப்பது

$$2u + n\lambda = 0 \quad \Rightarrow \lambda = -\frac{2u}{n}$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{2u}{n}$$

இப்போது, (5), (6) மற்றும் (7) லிருந்து,

$$0.x + cy + bz - \frac{2u}{n} = 0 \quad \dots(8)$$

$$cx + 0.y + az - \frac{2u}{n} = 0 \quad \dots(9)$$

$$\text{மற்றும்} \quad bx + ay + 0.z - \frac{2u}{n} = 0 \quad \dots(10)$$

$$\text{மேலும் (1) லிருந்து} \quad x + y + z - n = 0 \quad \dots(11)$$

இது u க்கு பெருமம் அல்லது சிறும மதிப்பைத் தருகிறது. இப்பொழுது (1) லிருந்து பெருமம் அல்லது சிறுமத்தை விவாதிப்போம். z என்பது x மற்றும் y ஆலான சார்பு எனக்கொள்வோம்.

$$\begin{bmatrix} 0 & c & b & \frac{2u}{n} \\ c & 0 & a & \frac{2u}{n} \\ b & a & 0 & \frac{2u}{n} \\ 1 & 1 & 1 & n \end{bmatrix} = 0 \quad \dots(12)$$

$$\therefore 1 + \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -1$$

இதேபோல், $\frac{\partial z}{\partial y} = -1$

இப்பொழுது, $\frac{\partial u}{\partial x} = bz + cy + (bx + zy) \frac{\partial z}{\partial x}$
 $= bz + cy - (bx + zy)$

$$\therefore r = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = b \frac{\partial z}{\partial x} - b = -2b$$

$$s = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = b \frac{\partial z}{\partial x} + c - a = -b + c - a = c - a - b$$

$$r = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2a$$

$$\begin{aligned} rt - s^2 &= (-2b)(-2a) - (c - a - b)^2 \\ &= 2ab + 2bc + 2ac - a^2 - b^2 - c^2 \\ &= a(b + c - a) + b(c + a - b) + c(a + b - c) \end{aligned}$$

a, b, c ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களை உருவாக்குகிறது என்று வைத்துக்கொள்வோம்.

$b + c - a, c + a - b, a + b - c$ என்பன மிகை எண்கள்.

$$\therefore rt - s^2 = +ve$$

மற்றும் $r = -2b = -ve$

எனவே (12) வழங்கிய u இன் மதிப்புகள் முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் கீழ் பெருமம்.

எடுத்துக்காட்டு 2 : $u = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ என்ற சார்பு லாப்லாசின் சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் என காட்டுக.

அதாவது, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

தீர்வு : இங்கு $u = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad \dots(1)$

x ஐப் பொருத்து (1) ஐ பகுதி வகையிட, நமக்கு கிடைப்பது

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(\frac{-y}{x} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{-y}{x^2 + y^2}\end{aligned}\quad \dots(2)$$

y ஐப் பொருத்து (1) ஐ பகுதி வகையிட, நமக்கு கிடைப்பது

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(\frac{1}{x} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{x}{x^2 + y^2}\end{aligned}\quad \dots(3)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) &= - \left[\frac{(x^2 + y^2) \cdot 0 - y \cdot (2x)}{(x^2 + y^2)^2} \right] \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}\end{aligned}\quad \dots(4)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{(x^2 + y^2) \cdot 0 - x \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}\end{aligned}\quad \dots(5)$$

(4) மற்றும் (5) ஐக் கூட்ட,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ என கிடைக்கும்.}$$

எடுத்துக்காட்டு 3 : $x = \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha$, $y = \xi \sin \alpha - \eta \cos \alpha$ எனில், $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ என நிறுவுக.

தீர்வு : இங்கு $x = \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha$... (1)

$y = \xi \sin \alpha - \eta \cos \alpha$... (2)

(1) மற்றும் (2) லிருந்து,

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \cos \alpha \quad \text{மற்றும்} \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = -\sin \alpha$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \sin \alpha \quad \text{மற்றும்} \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = \cos \alpha$$

u என்பது x மற்றும் y இன் சார்பாக இருப்பதால், x மற்றும் y என்பன ξ மற்றும் η இன் சார்புகளாகும். எனவே,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \xi} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \xi} &= \cos \alpha \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \sin \alpha \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \quad \dots(3)$$

மற்றும்

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \eta} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} &= -\sin \alpha \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \cos \alpha \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \quad \dots(4)$$

மற்றும் (4) லிருந்து,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} &= \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} &= -\sin \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \cos \alpha \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = \left(\cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\cos \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\cos \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial y} \left(\cos \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} &= \cos^2 \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \cos \alpha \sin \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \sin^2 \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{aligned} \quad \dots(5)$$

இதேபோல்,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \sin^2 \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \cos \alpha \sin \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \cos^2 \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \dots(6)$$

மற்றும் (6) ஐக் கூட்ட,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \quad \text{என கிடைக்கும்.}$$

குறிப்பு : கொடுக்கப்பட்ட உறவுகள் (1) மற்றும் (2) லிருந்து ξ மற்றும் η ன் அடிப்படையில் x மற்றும் y ஐ பின்வருமாறு நிரூபிக்கலாம்.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

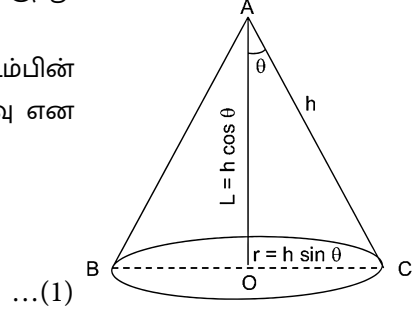
எடுத்துக்காட்டு 4 : அதிகபட்ச அளவு மற்றும் கொடுக்கப்பட்ட சாய்வான உயரத்தின் கூம்பின் அரை செங்குத்து கோணத்தைக் கண்டறியவும்.

தீர்வு : h சாய்வான உயரமாகவும், θ என்பது கூம்பின் அரை செங்குத்து கோணமாகவும் இருக்கட்டும்.

பின்னர் அடித்தளத்தின் ஆரம் $r = OC = h \sin \theta$ மற்றும் கூம்பின் உயரம் $H = OA = h \cos \theta$ V என்பது கூம்பின் கன அளவு என எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi (h \sin \theta)^2 (h \cos \theta)$$

$$= \frac{1}{3} \pi h^3 \sin^2 \theta \cos \theta$$



படம் 4.8

θ ஐப் பொருத்து (1) ஐ பகுதி வகையிட, நமக்கு கிடைப்பது

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{\pi}{3} h^3 [\sin^2 \theta (-\sin \theta) + \cos \theta \cdot 2 \sin \theta \cos \theta]$$

$$= \frac{\pi}{3} h^3 \sin \theta [2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta]$$

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = \frac{\pi}{3} h^3 [\sin \theta (-4 \cos \theta \sin \theta - 2 \sin \theta \cos \theta) + (2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \cdot \cos \theta]$$

$$= \frac{\pi}{3} h^3 [-6 \sin^2 \theta \cos \theta + \cos \theta (2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \cdot \cos \theta]$$

பெருமம் அல்லது சிறுமத்திற்கு $\frac{dV}{d\theta} = 0$

$$\Rightarrow \sin \theta = 0 \text{ அல்லது } \tan^2 \theta = 0$$

$$\Rightarrow \theta = 0 \text{ அல்லது } \theta = \tan^{-1} \sqrt{2}$$

$\theta = 0$ ஆகும்போது, கன அளவு பூஜ்ஜியமாகவும், கூம்பு நேர் கோட்டாகவும் மாறும்.

$\theta = \tan^{-1} \sqrt{2}$ ஆகும்போது,

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = \frac{\pi}{3} h^3 \left[-6 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + 0 \right] = -ve$$

$\theta = \tan^{-1} \sqrt{2}$ ஆகும்போது, கூம்பின் கன அளவு பெருமமாகவும், $\theta = -\tan^{-1} \sqrt{2}$ ஆகும்போது, கூம்பின் கன அளவு குறை எண்ணாகவும் இருக்கும். இது அர்த்தமற்றது, எனவே அப்படி இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு 5 : ஒரு செவ்வகப் பெட்டி, மேலே திறந்து, 32cc அளவு உள்ளது. அதன் கட்டுமானத்திற்கு குறைந்தபட்ச பொருள் தேவைப்படும் பெட்டியின் பரிமாணங்களைக் கண்டறியவும்.

தீர்வு : l நீளமாகவும் b அகலமாகவும் h என்பது பெட்டியின் உயரமாகவும், S என்பது பரப்பளவு மற்றும் V அதன் கன அளவாகவும் இருக்கட்டும்.

கொடுக்கப்பட்டது: $V = 32cc$

பெட்டியின் கன அளவு $= l.b.h = 32$

அல்லது $b = \frac{32}{l.h}$

மற்றும் $S = 2(l+b)h + lb$... (1)

b ன் மதிப்பை சமன்பாடு (1) ல் பிரதியிட,

$$S = 2\left(l + \frac{32}{l.h}\right)h + l\left(\frac{32}{l.h}\right)$$

$\Rightarrow S = 2lh + \frac{64}{l}h + \frac{32}{h}$... (2)

l ஐப் பொருத்து (2) ஐ பகுதி வகையிட, நமக்கு கிடைப்பது

$$\frac{\partial S}{\partial l} = 2h - \frac{64}{l^2}$$
 ... (3)

h ஐப் பொருத்து (2) ஐ பகுதி வகையிட, நமக்கு கிடைப்பது

$$\frac{\partial S}{\partial h} = 2l - \frac{32}{h^2}$$
 ... (4)

பெருமம் அல்லது சிறுமத்திற்கு,

$$\frac{\partial S}{\partial l} = 0 \Rightarrow 2h - \frac{64}{l^2} = 0$$

$\Rightarrow h = \frac{32}{l^2}$... (5)

$$\frac{\partial S}{\partial h} = 0 \Rightarrow 2l - \frac{32}{h^2} = 0 \Rightarrow l = \frac{16}{h^2}$$
 ... (6)

சமன்பாடு (5) மற்றும் (6) லிருந்து, $l = 4$, $h = 2$ மற்றும் $b = 4$

$$r = \frac{\partial^2 S}{\partial l^2} = \frac{128}{l^3} = \frac{128}{64} = 2$$

$$s = \frac{\partial^2 S}{\partial l \partial h} = 2, t = \frac{\partial^2 S}{\partial h^2} = \frac{64}{h^3} = \frac{64}{8} = 8$$

$$rt - s^2 = \frac{\partial^2 S}{\partial l^2} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial h^2} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial l \partial h}\right)^2 = 2 \times 8 - (2)^2 = 12$$

$r = 2(+ve)$ என்பதால் $l = 4$, $h = 2$ மற்றும் $b = 4$ க்கு S என்பது சிறுமம்.

எடுத்துக்காட்டு 6 : x கிமீ/மணி பயணம் செய்யும்போது ஒரு டிரக் டீசல் எண்ணெயை

$\frac{1}{300}\left(\frac{900}{x} + x\right) l / km$ என்ற விகிதத்தில் எரிக்கிறது. எண்ணெய் விலை லிட்டருக்கு 40 பைசா

மற்றும் ஓட்டுநருக்கு ஒரு மணி நேரத்திற்கு ₹1.50 செலுத்தப்படுகிறது என்றால் 500 கிமீ பயண செலவை குறைக்கும் நிலையான வேகத்தைக் கண்டறியவும்.

தீர்வு : டிரக்கின் திசைவேகம் = x கிமீ/மணி

$$\text{டீசல் எண்ணெய் எரியும் திசைவேகம்} = \frac{1}{300} \left(\frac{900}{x} + x \right) l / km$$

$$\text{டீசல் எண்ணெயின் விலை} = ₹0.40 / \text{லிட்டர்}$$

$$\text{ஓட்டுனரின் கூலி} = ₹1.50 / \text{மணி}$$

$$\text{பயணத்தின் மொத்த தூரம்} = 500 \text{ கிமீ}$$

$$\therefore 500 \text{ கிலோமீட்டரில் மொத்த டீசல் எரிப்பு} = \frac{500}{300} \left(\frac{900}{x} + x \right) l$$

$$\text{மற்றும் அதன் செலவு} = \frac{5}{3} \left(\frac{900}{x} + x \right) \times 0.40 \text{ rupees}$$

$$500 \text{ கிமீ செல்ல எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம்} = \frac{900}{x} \text{ மணிகள்}$$

$$\text{ஓட்டுனரின் கூலி} = \frac{500}{x} \times 1.50 = \frac{750}{x} \text{ rupees}$$

$$\text{பயணத்தின் மொத்த செலவு (c)} = \frac{2}{3} \left(\frac{900}{x} + x \right) \times \frac{750}{x}$$

$$c = \frac{1350}{x} + \frac{2}{3} x$$

பெருமம் அல்லது சிறுமத்திற்கு,

$$\frac{dc}{dx} = \frac{-1350}{x^2} + \frac{2}{3} = 0$$

$$x^2 = 2025 \Rightarrow x = 45 \text{ கிமீ/மணி}$$

$$\frac{d^2c}{dx^2} = +ve$$

எனவே $x = 45$ கிமீ/மணி ஆக இருக்கும்போது c என்பது சிறுமம்.

சுருக்கம்

1. $f(x, y)$ எனும் சார்பு, $x \rightarrow a, y \rightarrow b$ என எல்லைகளை பெற்றிருக்குமானால், ஏதேனும் ஒரு தன்னிச்சையாக தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட நேர்மறை, $\varepsilon > 0$ சிறியதாக இருந்தாலும், $\delta > 0$ எனும் நேர்மறை எண்ணில், $|f(x, y) - l| < \varepsilon \forall x, y \text{ for } |x - a| < \delta \text{ and } |y - b| < \delta$ என்றவாறு இருக்கும்.
2. $f(x, y)$ எனும் சார்பு (a, b) என்ற புள்ளியில் தொடர்ச்சியாக இருப்பதற்கு, $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = f(a, b)$ என இருக்க வேண்டும்.

3. $u = f(x, y)$ என்பது இரண்டு மாறிகளின் சார்பாகும், பின்னர் x யைப் பொறுத்த அதன் முதல் வரிசை பகுதி வகையீடு $\frac{\partial u}{\partial x} = f_x$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது, மற்றும் y யைப் பொறுத்த அதன் முதல் வரிசை பகுதி வகையீடு $\frac{\partial u}{\partial y} = f_y$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது.
4. x, y எனும் இரண்டு மாறிகளின் சார்பை $x^n f(y/x)$ எனும் வடிவத்தில் வெளிப்படையாக எழுத முடியும் எனில் அது, n படி உள்ள ஒரு படித்தான சார்பாக இருக்கும்.
5. u என்பது x மற்றும் y இல் n படி உள்ள ஒரு படித்தான சார்பாக இருந்தால், பின்னர் யூலரின் தேற்றத்தின் படி, $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = nu$
6. $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ மற்றும் $x_1, x_2, \dots, x_n$ ஆகியவை ' t ' இன் சார்புகள் மட்டுமே எனில், இது t யைப் பொறுத்த u வின் முழு வகையீடு $\frac{du}{dt}$ என அழைக்கப்படுகிறது. மற்றும்
- $$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dx_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{du}{dx_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{du}{dx_n} \cdot \frac{dx_n}{dt}$$
7. இரண்டு மாறிகளுக்கான டெய்லரின் தேற்றம் கூறுவது
- $$f(x+h, y+k) = f(x, y) + \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x, y) + \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x, y) + \dots + \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x, y)$$
8. $u_1, u_2, \dots, u_n$ ஆகியவை n சாரா மாறிகள் $x_1, x_2, \dots, x_n$ ன் சார்புகள் எனில், $x_1, x_2, \dots, x_n$ யைப் பொறுத்த $u_1, u_2, \dots, u_n$ ன் ஜேகோபிய அணிக்கோவை $\frac{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}$ எனும் குறியீட்டால் குறிக்கப்படும். மற்றும் பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும்.
- $$\frac{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$
9. அறுதி மதிப்புகள் என்ற சொல் பெருமம் மற்றும் சிறும மதிப்புகளுக்கு பயன்படுத்தப்படுகிறது. இந்த மதிப்புகள் நேரிடும் புள்ளிகள் அறுதி புள்ளிகள் என்று அழைக்கப்படுகின்றன.

10. $f(x)$ எனும் சார்பு $x = a$ என்ற புள்ளியில் நிலையானதாக இருக்க, அதன் வகையீடு $f'(x)$, $x = a$ எனும் புள்ளியில் மறைய வேண்டும். அதாவது, $x = a$ எனும் புள்ளியில் $f'(x) = 0$. $r > 0$ மற்றும் $rt - s^2 > 0$ எனில், எனும் சார்பு கொடுக்கப்பட்ட புள்ளியில் பெருமத்தை பெற்று உள்ளது.
11. $r < 0$ மற்றும் $rt - s^2 > 0$ எனில், எனும் சார்பு கொடுக்கப்பட்ட புள்ளியில் சிறுமத்தை பெற்று உள்ளது. $rt - s^2 < 0$ எனில், எனும் சார்பு கொடுக்கப்பட்ட புள்ளியில் பெருமம் மற்றும் சிறுமத்தை பெற்று இருக்கவில்லை.
12. IR^3 ன் மேல் உள்ள $f(x, y, z)$ எனும் மெய் மதிப்பு சார்பிற்கு, IR^3 ன் மேல் உள்ள வாட்டம் $\nabla f(x, y, z)$ ஒரு வெக்டர் - மதிப்பு சார்பு ஆகும். அதாவது, (x, y, z) எனும் ஒரு புள்ளியில், அதன் மதிப்பு, $\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k}$ என்ற வெக்டர் ஆகும்.
13. ஒரு வெக்டர் புலத்தின் பாய்வு, டெல் செயலி மற்றும் வெக்டர் புலத்தின் புள்ளி பெருக்கம் ஆகும். அதாவது, $\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$ இங்கு $\vec{F}(x, y, z) = f_1(x, y, z)\hat{i} + f_2(x, y, z)\hat{j} + f_3(x, y, z)\hat{k}$
14. வெக்டர் புலத்தின் சுழல், டெல் செயலி மற்றும் வெக்டர் புலத்தின் குறுக்குப் பெருக்கம் என வரையறுக்கப்படுகிறது. அதாவது $\text{curl } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \hat{k}$
15. $F(x, y, z)$ என்பது (x_0, y_0, z_0) எனும் புள்ளியில் வகைப்படுத்தக்கூடிய மேற்பரப்பை வரையறுக்கிறது எனில், பின்னர் (x_0, y_0, z_0) எனும் புள்ளியில் $F(x, y, z)$ ன் தொடுதளம், (x_0, y_0, z_0) எனும் புள்ளி வழியாக செல்லும் $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ எனும் செங்குத்து வெக்டரின் தளம். குறிப்பாக, தொடு தளத்தின் சமன்பாடு $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$.
16. $F(x, y, z)$ என்பது எனும் (x_0, y_0, z_0) புள்ளியில் வகைப்படுத்தக்கூடிய மேற்பரப்பை வரையறுக்கிறது எனில், பின்னர் (x_0, y_0, z_0) எனும் புள்ளியில் $F(x, y, z)$ ன் செங்குத்து கோடு, (x_0, y_0, z_0) எனும் புள்ளி வழியாக செல்லும் $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ எனும் செங்குத்து வெக்டரின் கோடு. குறிப்பாக, செங்குத்து கோட்டின் சமன்பாடு $x(t) = x_0 + F_x(x_0, y_0, z_0)t$
 $y(t) = y_0 + F_y(x_0, y_0, z_0)t$
 $z(t) = z_0 + F_z(x_0, y_0, z_0)t$

குறிக்கோள் கேள்விகள்

1. மதிப்பீடுக. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^7 x^{98} - x^{97} y^8 + x^{105}}{xy^7 + x^8}$
 a. பொருள் இல்லை b. 0 c. 1 d. ∞
2. முழு வகையீடு சார்பின் வகையீட்டுக்கு சமம்.
 a. சரி b. தவறு
3. $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ எனில் பின்னர்,
 a. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ உள்ளது மற்றும் பூஜ்யம் அல்ல
 b. $\lim_{(x, mx) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ உள்ளது மற்றும் பூஜ்யம்
 c. $\lim_{(x, y=x^2) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ உள்ளது மற்றும் பூஜ்யம் அல்ல
 d. $\lim_{(x, y=2x^2) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ உள்ளது மற்றும் பூஜ்யம் அல்ல
4. முதல் வரிசை பகுதி வகையீடுகளின் இருப்பு தொடர்ச்சியைக் குறிக்கிறது
 a. சரி b. தவறு
5. $f(x, y) = \sin(xy) + x^2 \ln(y)$ எனில் பிறகு, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ எனும் புள்ளியில் f_{yx} யைக் காண்க.
6. $f(x, y) = x^2 + y^3$; $x = t^2 + t^3$; $y = t^3 + t^9$ என கொடுப்பட்டுள்ளது எனில் பிறகு, $t = 1$ எனும் புள்ளியில் $\frac{df}{dt}$ யைக் காண்க.
 a. 0 b. 1 c. -1 d. 5
7. $f(x, y) = x \ln(y) + x^2 y^2$ எனும் சார்பின் பெரும் திசையுறு வகைக்கெழுவை எனும் $(1, 1)$ புள்ளியில் காண்க.
 a. $-2\hat{i} + \hat{j}$ b. $15(-2\hat{i} + \hat{j})$ c. 1 d. 5
8. சேணப் புள்ளி என்றால் என்ன?
 a. சார்பு பெரும் மதிப்பு கொண்ட புள்ளி.
 b. சார்பு சிறும மதிப்பு கொண்ட புள்ளி.
 c. சார்பு பூஜ்ஜிய மதிப்பு கொண்ட புள்ளி.
 d. சார்பு பெரும் மதிப்பு அல்லது சிறும மதிப்பு இல்லாத புள்ளி.
9. $xy + a^3 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$ எனும் கொடுக்கப்பட்ட சார்பின் சிறும மதிப்பு

- a. $3a^2$ b. a^2 c. a d. 1
10. லாக்ரேஞ்சின் பெரும மற்றும் சிறும முறையின் குறைபாடு என்ன ?
 a. பெருமம் மற்றும் சிறுமம் நிலையானது அல்ல.
 b. நிலையான புள்ளிகளின் தன்மையை அறிய முடியாது
 c. துல்லியம் நன்றாக இல்லை
 d. நிலையான புள்ளிகளின் தன்மை அறியப்படுகிறது, ஆனால் பெருமம் மற்றும் சிறுமம் கொடுக்க முடியாது.
11. எளிமையான ஒரு கட்டுப்பாடு லாக்ரேஞ்சின் பெருக்கி அமைப்பில், கட்டுப்பாடு எப்போதும் ஒரு உருவளவில் நோக்கச் சார்பைக் காட்டிலும் குறைவாக இருக்கும்.
 a. சரி b. தவறு
12. $\vec{F} = x^3 y^2 \hat{i} + x^2 y^3 z^4 \hat{j} + x^2 z^2 \hat{k}$ என்ற கொடுக்கப்பட்ட வெக்டர் புலத்திற்கான சுழலை கணக்கிடு.
 $\text{curl } \vec{F} = 0$
 $\text{curl } \vec{F} = 4x^2 y^3 z^3 \hat{i} + 2x^2 z \hat{j} + (-2xy^3 z^4 + 2x^3 y) \hat{k}$
 $\text{curl } \vec{F} = 2x^2 z^3 \hat{i} + 2yz^2 \hat{j} + 2x^3 y \hat{k}$
 $\text{curl } \vec{F} = -4x^2 y^3 z^3 \hat{i} - 2xz^2 \hat{j} + (-2xy^3 z^4 - 2x^3 y) \hat{k}$
13. ஒரு வெக்டர் புலத்தின் பாய்வு மற்றும் சுழல்
 a. அளவெண் மற்றும் அளவெண்
 b. அளவெண் மற்றும் வெக்டர்
 c. வெக்டர் மற்றும் வெக்டர்
 d. வெக்டர் மற்றும் அளவெண்
14. ஒரு வெக்டரின் சுழலின் சுழல்
 a. வெக்டர் b. அளவெண் c. பூஜ்ஜிய மதிப்பு d. சொல்ல இயலாது
15. P என்பது ஒரு வெக்டர் எனில் $\nabla \times \nabla \times P$ க்கு சமம்
 a. $P \times \nabla \times P - \nabla^2 P$ b. $-\nabla^2 P + \nabla (\nabla \times P)$ c. $\nabla^2 P + \nabla \times P$ d. $\nabla (\nabla \cdot P) - \nabla^2 P$
16. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ எனும் கோள மேற்பரப்புக்கு, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$ எனும் புள்ளியில், வெளிநோக்கிய அலகு செங்குத்து வெக்டர்
 a. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{j} \right)$ b. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{i} - \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{j} \right)$ c. $\hat{k}$ d. $\frac{1}{\sqrt{3}} \hat{i} + \frac{1}{\sqrt{3}} \hat{j} + \frac{1}{\sqrt{3}} \hat{k}$
17. $|A| = kr^n$ என, வெக்டர் A இன் திசை ஆரம்ப புள்ளிலிருந்து ஆரவழியில் வெளிப்புறமாக உள்ளது, இங்கு $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ மற்றும் k என்பது மாறிலி. $\nabla \cdot A = 0$ க்கு n ன் மதிப்பு.
 a. $4\hat{i} - \hat{j}$ b. $4\hat{i} - \hat{k}$ c. $\hat{i} - 4\hat{j}$ d. $\hat{i} - 4\hat{k}$
18. $\vec{V} = 2xy\hat{i} + x^2 z \hat{j}$ என்பது பாய்வுப் புலத்தின் திசைவேக வெக்டர், பிறகு $(1, 1, 1)$ எனும் புள்ளியில்

19. முப்பரிமாண ஆரவழி வெக்டர் புலத்தின் பாய்வு

a. 3

b. $1/r$

c. $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

d. $3(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$

20. $\sin^2 y + \cos xy = \pi$ எனில் பிறகு $\frac{dy}{dx}$

a. $\frac{y \sin xy}{\sin 2y - x \sin xy}$

b. $\frac{x \sin xy}{\sin 2y - x \sin xy}$

c. $\frac{y \cos xy}{\cos 2y - x \sin xy}$

d. $\frac{x \cos xy}{\sin 2y + x \cos xy}$

விடைகள்

1. b

2. a

3. b

4. b

5. d

6. d

7. d

8. d

9. a

10. b

11. b

12. d

13. b

14. b

15. d

16. a

17. a

18. d

19. a

20. a

அகநிலை தீர்க்கப்படாத கேள்விகள் (Subjective Unsolved Questions)

1. $y = mx$ என்ற கோடுகளுடன் செல்லும் பாதையை எடுத்து, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3xy}{x^2 + y^2}$ என்பது இருக்கிறதா இல்லையா என்பதை பகுப்பாய்வு செய்க.

2. $y = -\sin x$ என்ற பாதையில் எல்லையைக் கண்டுபிடிப்பதன் மூலம், $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x+y}$ என்பது இல்லை எனக் காட்டுக.

3. $\tan^{-1}\left(\frac{xy^2}{x+y}\right)$ எனும் சார்பு, எங்கே தொடர்ச்சியானது என ஆராய்க.

4. $x + y = 2e^\theta \cos \phi$ மற்றும் $x - y = 2e^\theta \sin \phi$ எனில் பின் $\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 4xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ எனக் காட்டுக.

5. $f(x, y)$ என்ற கொடுக்கப்பட்ட சார்பின் தொடர்ச்சியான அனுமானத்தைக் குறிப்பிடவும். இங்கு $f(x, y)$ என்பது படி உள்ள ஒரு படித்தான சார்பு எனில், $x^2 f_{11} + xy f_{12} + xy f_{21} + y^2 f_{22} = n(n-1)$ எனக் காட்டுக. இங்கு n கீழ்க்குறி பின்வருமாறு பகுதி வகையீட்டைக் குறிக்கிறது.

6. $\frac{1}{2e} \left[\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} + \frac{c^2}{\gamma^2} \right]$ என்பது, $(ax + by + cz)e^{-(\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2)}$ ன் பெரும மதிப்பு ஆகும். உங்கள் பதிலை பகுப்பாய்ந்து சரிபார்க்கவும்.

7. $ABCD$ என்பது மறு நுழைவு கோணம் இல்லாத நாற்கரம் மற்றும் P என்பது அதன் தளத்தில் ஒரு புள்ளி ஆகும். அதன் உச்சங்களிலிருந்து தூரங்களின் கூட்டுத்தொகை சிறுமமாக இருக்கும் புள்ளி P யின் நிலையை காண்க.

8. $a^x b^y c^z = A$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. $(x+1)(y+1)(z+1)$ ன் பெரும் மதிப்பைக் காண்க. முடிவை விளக்குக.
9. $\vec{F} = 2x\hat{i} + 4y\hat{j} + 8z\hat{k}$ எனும் வெக்டர் தளம் சுழலில்லாதது எனக் காட்டுக. மற்றும் $\vec{F} = \nabla \phi$ என்றவாறு அதன் அளவெண் புலத்தைக் காண்க.
10. $\vec{F}$ என்பது பாய்விலா வெக்டர் தளம் எனில், $\text{curl curl curl curl } \vec{F} = \nabla^4 \vec{F}$ எனக் காட்டுக.
11. $\vec{u} = (x+3y)\hat{i} + (y-2z)\hat{j} + (x+\lambda z)\hat{k}$ எனும் வெக்டர், பாய்விலா வெக்டராக இருக்கும் எனில் λ ஐக் காண்க.
12. $u = x + y + z, v = x^2 + y^2 + z^2, w = xy + yz + zx$ எனில் $\nabla u, \nabla v, \nabla w$ ஆகியவை ஒருதள வெக்டர்கள் எனக் காட்டுக.

விடைகள்

1. எல்லை இல்லை.
3. கொடுக்கப்பட்ட சார்பு $[(x, y) \in R^2; y \neq -x]$ ன் மேல் தொடர்ச்சியானது (குறிப்பு : இரண்டு சார்புகளின் கலவையாக சார்பை எடுத்துக் கொள்ளுங்கள்.)
7. P என்பது நாற்புறத்தின் மூலைவிட்டங்களின் குறுக்குவெட்டு புள்ளியாகும்.
8. $\{\log(Aabc)\}^3 / (27 \log a \log b \log c)$ 11. $\lambda = 2$ 12. குறிப்பு : $\nabla u \cdot (\nabla v \times \nabla w) = 0$ எனக் காட்டு.

செயல்திட்டம் / செயல்முறை / செயல்பாடு

செயல்திட்டம்

MATLAB ஐப் பயன்படுத்தி பின்வரும் கணக்குகளை மாதிரியாக்குங்கள்

1. கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளுக்கு அணுகுமுறையாக எல்லை உள்ளதா இல்லையா என்பதை வெவ்வேறு மேற்பரப்புகளை வரைந்து விவாதிக்கவும். எல்லை இருந்தால் கண்டறியவும்.

$$i. x = 5 \text{ ல் } f(x) = \frac{x-3}{x+5} \quad ii. x = 6 \text{ ல் } f(x) = \frac{x^2+5}{x+1}$$

2. கொடுக்கப்பட்ட புள்ளியில் $f(x, y) = x^2 + y^2$ க்கான தொடுதளத்தை வெவ்வேறு மேற்பரப்புகளுக்கு வரையவும்.

3. $f(x) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$ எனும் சார்பிற்கான தொர்பு மற்றும் தனித்த அறுதி புள்ளிகளைக் கண்டறியவும்

4. $f(x) = xy - \frac{x^3}{3}$ எனும் சார்பிற்கு, சாய்வு வெக்டர் புலங்கள் மற்றும் மட்டமான வளைவரைகளை வரைக.

செயல்முறை

உங்கள் சார்பு தேர்வின் படி, காகித வரைபடத்தைப் பயன்படுத்தி வரைபடத்தைத் திட்டமிடுவதன் மூலம் ஓரிடப் பெருமம், ஓரிடச் சிறுமம் மற்றும் வளைமை மாறுபுள்ளிகளை அடையாளம் காணவும்.

மேலும் அறிக

1. மதிப்பிடுக $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(y)}{x}$
 a. 1 b. 0 c. ∞ d. இல்லை
2. $f(x, y, z, t) = xy + zt + x^2 yzt; x = k^3; y = k^2; z = k; t = k$ எனில். பிறகு $k = 1$ எனும் புள்ளியில், $\frac{df}{dt}$ ன் மதிப்பைக் காண்க.
 a. 34 b. 16 c. 32 d. 61
3. ஒரு தட்டையான தட்டின் வெப்பநிலை (x, y) என்ற புள்ளியில் $T(x, y) = 3x^2 + 2xy$ எனும் சார்பால் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது என்க. ஒரு தொட்டி செயற்கை வெண்ணெய் $(3, -6)$ எனும் புள்ளியில், வைக்கப்படுகிறது. அது மிகவும் விரைவாக குளிராக்க எந்த திசையில் நகர்த்தப்பட வேண்டும் என்பதை பகுப்பாய்வு செய்யவும்
 a. $6i + 6j$ b. $i + j$ c. $-i - j$ d. $6i - 12j$
4. $f(x, y) = \frac{\sin^{-1}(y^2) \cdot (y^2 + 3y) \cdot (\sin(y^6 + 7y))}{(y^9 + y^{10})} + 10x$ எனும் சார்பின் மாறுநிலைப்புள்ளிகளைக் கண்டறியவும்
 a. $(0, 0)$ b. $(0, -90)$ c. $(90, 0)$ d. இல்லை
5. $x + y + z = 9$ எனும் தளத்தின் மேல், தொடக்க புள்ளிக்கு அருகில் உள்ள புள்ளிகளைக் காண்க.
 a. $(3, 3, 3)$ b. $(2, 1, 3)$ c. $(2, 2, 2)$ d. $(3, 4, 1)$
6. ஒரு நான்மடி மிகை வளையவுருவின் நெடுக்கம் x மற்றும் y அச்சுகள் இரண்டிலும் சமமாக அதிகரிக்கப்படுகிறது. நான்மடி மிகை வளையவுருவின் $z = x + y$ ன் பெரும் மதிப்பு:
 a. அதிகரிக்கும்
 b. குறையும்
 c. மாற்றமுறாதது
 d. நான்மடி மிகை வளையவுருவின் அளவிடுதல் பொருத்தமற்றது
குறிப்பு : ஒரு நான்மடி மிகை வளையவுருவின் பொது வடிவத்தை $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ எடுத்துக்கொள்க. பின்னர் சாய்வைக் கண்டுபிடித்து, மற்றும் அவற்றை லாக்ரேஞ்சின் நிபந்தனையுடன் சமன் செய்க.
7. ϕ எனும் மின்னழுத்த சார்பு, $\phi = x^2 - y^2$ எனக் கொடுக்கப்பட்டு உள்ளது. $x = y = 0$ எனும் புள்ளியில் $\psi = 0$ என்ற நிபந்தனையோடு, சீரோட்டச் சார்பு (ψ) என்னவாக இருக்கும்
 a. $2xy$ b. $x^2 + y^2$ c. $x^2 - y^2$ d. $2x^2 y^2$
8. $(1, 1, 1)$ எனும் புள்ளியில், $3xz\hat{i} + 2xy\hat{j} - yz^2\hat{k}$ என்ற வெக்டர் விரிவு,
 a. 7 b. 4 c. 3 d. 0

9. $u = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}$ எனும் அளவெண் புலத்திற்கு, $(1, 3)$ என்ற புள்ளியில் சாய்வின் அளவு

a. $\sqrt{\frac{13}{9}}$

b. $\sqrt{\frac{9}{2}}$

c. $\sqrt{5}$

d. $\frac{9}{2}$

விடைகள்

1. d

2. c

3. a

4. d

5. a

6. a

7. a

8. c

9. c

மேற்கோள் நூல்கள் /பரிந்துரைக்கப்பட்ட வாசிப்புகள்

1. Bary, N.K. (1964). *A Treatise on Trigonometric Series*, Pergamon Press.
2. Courant R. (1988). *Differential and Integral Calculus*, Wiley, New York.
3. Dass, H.K. *Advanced Engineering Mathematics*, S. Chand Publications.
4. Fleming, W.H. (1965). *Functions of Several Variables*, Addison Wesley Publishing Company, Reading, MA.
5. Garg, Reena (2019). *Engineering Mathematics – I*, 2nd Edition, Khanna Book Publishing Co. (P)Ltd.
6. Grewal, B.S. *Higher Engineering Mathematics*, Khanna Publishers.
7. Jain, R.K.; Iyengar, S.R.K. *Advanced Engineering Mathematics*, 2nd Edition, Narosa.
8. Knopp, K. (1947) *Theory of Functions*, Dover, New York.
9. Philip, Franklin (1940). *A Treatise on Advanced Calculus*, Wiley, Inc. New York.
10. Piskunov, N. (1969). *Differential and Integral Calculus*, MIR Publishers, Moscow.
11. Prasad, Chandrika (1967). *Mathematics for Engineers*, Pothishala Private Ltd.
12. Ram, Babu. *Engineering Mathematics*, Pearson.
13. Thomas, G.B. and Finney, R.L. (1992). *Calculus and Analytic Geometry*, Addison–Wesley, Reading, MA.
14. Tichmarsh, E.C. (1939). *Theory of Functions*, Oxford University Press, London.

5

அணிகள்

அலகு விவரங்கள்

இந்த அலகு ஒரு அணி, தர பூஜ்ஜிய தேற்றம், நேரியல் சமன்பாடுகளின் அமைப்பு, சமச்சீர், எதிர் – சமச்சீர் மற்றும் செங்குத்து அணி, அணிக்கோவைகள், ஐகன் மதிப்புகள் மற்றும் ஐகன் வெக்டர்கள், அணியின் மூலைவிட்டம், கெய்லி-ஹாமில்டன் தேற்றம், செங்குத்து உருமாற்றம் ஆகிய கருத்துக்களை உள்ளடக்கியது. சுவாரஸ்யமான உண்மைகள், வீடியோ ஆதாரங்கள், ஐசிடியின் பயன்பாடுகள், அன்றாட வாழ்க்கைக்கான பயன்பாடுகள் ஆகியவை பரந்த பகுதிகள் ஆகும், இதனால் தலைப்புகள் மாணவர்களுக்கு நட்பாகவும் எளிமையாகவும் இருக்கும்.

அடிப்படைக்கோட்பாடு

நேரியல் இயற்கணித சமன்பாடுகள், நேரியல் வேறுபாடு சமன்பாடுகள் மற்றும் நேரியல் அல்லாத வேறுபாடு சமன்பாடுகளின் தீர்வைக் கண்டுபிடிக்க அணி மிகவும் பரவலாகப் பயன்படுத்தப்படுகிறது. உருப்பெருக்கம், சுழற்சி மற்றும் பிரதிபலிப்பு போன்ற பல உடல் செயல்பாடுகளும் அணியின் உதவியுடன் கணித ரீதியாக குறிப்பிடப்படுகின்றன. இவை மக்களின் இயல்புகள், மக்கள் தொகை, பழக்கவழக்கங்கள் போன்ற உண்மையான உலகத் தரவுகளைப் பிரதிநிதித்துவப்படுத்துவதிலும் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. பாலத்தின் இயற்கையான அதிர்வெண் பாலத்தின் மாதிரியாக இருக்கும் மிகச்சிறிய அளவைக் கொண்ட ஒரு அமைப்பின் ஐகன் மதிப்பு. பொறியியலாளர்கள் தங்கள் கட்டுமானங்களின் ஸ்திரத்தன்மையை உறுதிப்படுத்த இந்த அறிவை ஆராய்கின்றனர். ஐகன் மதிப்புகள் மற்றும் ஐகன் வெக்டர்கள் எளிய சிக்கல்களுக்கு ஒரு நேரியல் செயல்பாட்டைக் குறைக்க அனுமதிக்கின்றன. மூலைவிட்டத்தால், அதிர்வுகளின் இயற்கையான அதிர்வெண்ணை நாம் தீர்மானிக்க முடியும். சிக்கலான அட்டவணைகளை எளிமையானவையாகக் கணக்கிட செங்குத்து உருமாற்றங்கள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

முன் தேவைகள்

1. பல்வேறு வகையான அணிகளில் இருந்து விழிப்புணர்வு.
2. அணிகளின் இயற்கணிதம் பற்றிய அடிப்படை அறிவு.
3. அவற்றின் பண்புகளுடன் இணைத்தல், தலைகீழ் மற்றும் தீர்மானிக்கும் கருத்தை நன்கு அறிதல்.
4. சமன்பாடுகளின் நேரியல் அமைப்பிலிருந்து மெட்ரிக்ஸை உருவாக்கும் யோசனையை அறிந்து கொள்ளுதல்.

பாடப்பகுதியின் அடைவுகள்

இவ்வலகுப் பகுதி நிறைவுறும்போது மாணவர்கள் அறிந்திருக்க வேண்டியவை

U5-O1 : நேரியல் சமன்பாடுகளின் நிலையான மற்றும் சீரற்ற அமைப்புகளை அங்கீகரிக்கவும்; நிரை ஏறுபடி வடிவத்தைப் பயன்படுத்தி தீர்வுகளைக் கணக்கிடுதல்; அணியின் தலைகீழைக் கண்டுபிடிக்க காஸ்ஸியன் நீக்கல் முறை, காஸ் ஜோர்டன் முறை மற்றும் கிராமர் விதியைப் பயன்படுத்துதல்.

U5-O2 : நேரியல் சமன்பாடுகளின் ஒரே மாதிரியான மற்றும் ஒரே மாதிரியான அமைப்பைத் தீர்க்கவும்; சிக்கலான சிக்கல்களைத் தீர்ப்பதில் தரம் – வெறுமை தேற்றத்தைப் பயன்படுத்துதல்.

U5-O3 : ஐகன் மதிப்புகள் மற்றும் அணியின் ஐகன் வெக்டர்களைக் கணக்கிடுதல்; கெய்லி-ஆமில்டன் தேற்றத்தைப் பற்றி அறிந்து, ஒரு சதுர அணியின் தலைகீழைக் கண்டுபிடிக்க அதைப் பயன்படுத்துதல்.

U5-O4 : மூலைவிட்டமயமாக்கலின் கருத்தை நன்கு அறிதல் மற்றும் பயன்படுத்துதல்; மாதிரி அணி கண்டுபிடிக்க, அணிகளை இருபடி வடிவத்திலிருந்து நியமன வடிவமாக மாற்றுவது பற்றி அறியதல்.

பாடக்கோப்பின் அடைவுகளுடன் பாடப்பகுதியின் அடைவுகளின் ஒப்புமை

பாடப்பகுதி-5 முடிவுகள்	பாடக்கோப்பின் அடைவுகளுடன் எதிர்பார்க்கப்படும் ஒப்புமை (1-பலவீனமான தொடர்பு; 2-நடுத்தர தொடர்பு; 3-வலுவான தொடர்பு)				
	CO-1	CO-2	CO-3	CO-4	CO-5
U5-O1	-	1	1	1	3
U5-O2	2	-	1	-	3
U5-O3	2	-	-	1	3
U5-O4	-	2	1	1	3

வரலாறு

வரலாற்று ரீதியாக, அணி என்ற சொல் 19 ஆம் நூற்றாண்டில் ஆங்கில கணிதவியலாளர் ஜேம்ஸ் சில்வெஸ்டரால் அறிமுகப்படுத்தப்பட்டது. ஆனால் அவரது நண்பர் ஆர்தர் கெய்லி தான் 1850 களில் இரண்டு தாள்களில் அணியின் இயற்கணித அம்சத்தை உருவாக்கினார். கெய்லி முதலில் அவற்றை நேரியல் சமன்பாடுகளின் அமைப்புகளுக்குப் பயன்படுத்தினார், அவை இன்னும் மிகவும் பயனுள்ளதாக இருக்கும். அவை முக்கியமானவை, ஏனெனில், கெய்லி அங்கீகரித்தபடி, சில அணிகள் இயற்கணித அமைப்புகளை உருவாக்குகின்றன, இதில் பல சாதாரண எண்கணித சட்டங்கள் (எ.கா., துணை மற்றும் விநியோகச் சட்டங்கள்) செல்லுபடியாகும் ஆனால் மற்ற சட்டங்கள் (எ.கா., பரிமாற்ற சட்டம்) செல்லுபடியாகாது. வேறுபட்ட சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பதில் 18 ஆம் நூற்றாண்டில் ஐகன் வெக்டர்கள் படிப்படியாக தோன்றின. இது விசித்திரமாகத் தோன்றலாம் ஆனால் ஐகன் வெக்டர்கள் (ஐகன் செயல்பாடுகள்) நேரியல் இயற்கணிதத்திற்கு முன்பே பல்வேறு பெயர்களில் தோன்றின, மற்றும் “வெக்டர்” என்ற வார்த்தை பொதுவான பயன்பாட்டுக்கு வருவதற்கு முன்பே சிறிய ஊசலாட்டங்களின் கோட்பாட்டில் அவர்கள் முக்கிய பங்கு வகித்தனர். பண்பு மூலம் என்ற வார்த்தையையும் காஷி உருவாக்கினார், இது இப்போது ஐகன் மதிப்பு என்று அழைக்கப்படுகிறது; அவரது சொல் பண்பு சமன்பாட்டில் வாழ்கிறது. “ஐகன் வெக்டர்” என்ற சொல் 1920 களில் முதல் பதிப்பான ஹில்பர்ட்-கரண்ட் புத்தகத்தின் செல்வாக்கின் கீழ் ஜெர்மன் மொழியில் இருந்து வந்தது.



ஆகஸ்டின் லூயிஸ் காஷி

அறிமுகம்

அணிகள் என்ற சொல் அணி என்ற வார்த்தையின் பன்மையாகும். ஆர்தர் கெய்லி, 1860 இல் அணிகள் என்ற கருத்தை அறிமுகப்படுத்திய முதல் நபர்.

அணிகளின் ஆய்வு பல்வேறு வகையான நேரியல் சிக்கல்களின் யோசனையிலிருந்து உருவானது. பல பொறியியல் செயல்முறைகளில் நிகழும் நேரியல் சமன்பாடுகளின் அமைப்புடன் இது ஒரு சிறப்பு உறவைக் கொண்டுள்ளது. நேரியல் இயற்கணிதத்தின் ஆய்வு மற்றும் வளர்ச்சியில் இது ஒரு முக்கியமான பட்டியலை வழங்குகிறது. பயன்பாட்டு பொறியியல் மற்றும் கட்டுப்பாட்டு அமைப்புகளில் நேரியல் அமைப்பு மாதிரிகளை வழங்குவதிலும் அணிகள் ஏற்படுகிறது. கணிதம், அறிவியல் மற்றும் பொறியியலின் ஒவ்வொரு பிரிவிலும் அணிகள் பரவலாகப் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

5.1 வரையறை

m நிரைகள் (கிடைமட்ட கோடுகள்) மற்றும் n நிரல்கள் (செங்குத்து கோடுகள்) கொண்ட செவ்வக வரிசை வடிவத்தில் உள்ள $m \times n$ எண்களின் (உண்மையான அல்லது சிக்கலான) தொகுப்பு $m \times n$ அணி என்று அழைக்கப்படுகிறது. (m by n அணி எனப் படிக்கவும்.)

பொதுவாக அணியை $[a_{ij}]$ அல்லது (a_{ij}) அல்லது $\|a_{ij}\|$ என்ற குறியீட்டினால் குறிக்கலாம்.

வழக்கமாக, அணியானது ஒற்றை முகப்பெழுத்து $A, B, C, \dots$ களில் குறிக்கப்படுகிறது. எனவே $m \times n$ அணி, ‘ A ’,

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ அல்லது $A = [a_{ij}]$ என எழுதப்படலாம்.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \text{ இங்கு } i = 1, 2, \dots, m \text{ மற்றும் } j = 1, 2, \dots, n$$

ஒவ்வொரு $m \times n$ அணியும் $m.n$ உறுப்புகளை பெற்று இருக்கும்.

குறிப்பு: அணியில் உள்ள ஒவ்வொரு உள்ளீடும் அணியின் ஒரு உறுப்பு என்று அழைக்கப்படுகிறது.

உதாரணமாக : சமன்பாடுகளின் ஒருங்கமை அமைப்பை கருத்தில் கொள்க.

$$2x + 3y + 3z + 2t = 0$$

$$3x + 2y + 5z + 3t = 0$$

$$4x + 5y + 6z + 7t = 0$$

$$2x + 3y + 4z + 5t = 0$$

இப்போது, மேலே உள்ள சமன்பாடுகளின் x, y, z மற்றும் t ஆகியவற்றின் கெழுக்களை எழுதி அவற்றை அடைப்புக்குறிக்குள் இணைக்க, பிறகு, நமக்கு கிடைப்பது

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

மேலே உள்ள எண்கள், நிரைகள் மற்றும் நிரல்களின், செவ்வக அமைப்பில் அமைக்கப்படும் மற்றும் அடைப்புக்குறிகளால் அடைக்கப்படும் இருக்கும். இது ஒரு அணி என்று அழைக்கப்படுகிறது.

இது 4 நிரைகள் மற்றும் 4 நிரல்கள் மற்றும் $4 \times 4 = 16$ உறுப்புகளையும் கொண்டுள்ளது. இது 4×4 அணி என்று அழைக்கப்படுகிறது.

அதாவது, i -ஆவது நிரை மற்றும் j -ஆவது நிரலில் உள்ள உறுப்பு a_{ij} ஆகும்.

5.1.1 பல்வேறு வகையான அணிகள்

1. **மெய் அணி :** ஒரு அணியின் அனைத்து உறுப்புகளும் மெய்யெண்களாக இருந்தால் அது மெய் அணி எனப்படும்.

(எ.கா.) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} \\ 1/2 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$ என்பது ஒரு மெய் அணி

2. **சிக்கலான அணி :** ஒரு அணியின் அனைத்து உறுப்புகளும் சிக்கல் எண்களாக இருந்தால் அது சிக்கலான அணி எனப்படும்.

(எ.கா.) $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ என்பது ஒரு சிக்கலான அணி.

3. **நிரை அணி :** ஒரே ஒரு நிரையை மட்டுமே உடைய அணி நிரை அணி எனப்படும்.

(எ.கா.) என்பது $A = [1 \ 2 \ 3 \ 4]_{1 \times 4}$ ஒரு நிரை அணி.

4. **நிரல் அணி :** ஒரே ஒரு நிரலை மட்டுமே உடைய அணி நிரல் அணி எனப்படும்.

(எ.கா.) என்பது $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}_{4 \times 1}$ ஒரு நிரல் அணி.

5. **சுழி அணி அல்லது பூஜ்ஜிய அணி** : ஒரு அணியின் அனைத்து உறுப்புகளும் பூஜ்ஜியமாக இருந்தால் அது சுழி அணி அல்லது பூஜ்ஜிய அணி எனப்படும்.

(எ.கா.) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ மற்றும் $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ ஆகியவை சுழி அணிகள்.

6. **சதுர அணி** : $m \times n$ வரிசை உடைய அணியில், $m = n$ அதாவது நிரை மற்றும் நிரல்களின் எண்ணிக்கை சமம் எனில், அது சதுர அணி எனப்படும்.

(எ.கா.) என்பது $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ ஒரு சதுர அணி.

7. **செவ்வக அணி** : $m \times n$ வரிசை உடைய அணியில், $m \neq n$ அதாவது நிரை மற்றும் நிரல்களின் எண்ணிக்கை சமம் இல்லை எனில், அது செவ்வக அணி எனப்படும்.

(எ.கா.) என்பது $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$ ஒரு செவ்வக அணி.

8. **மூலைவிட்ட அணி** : ஒரு அணியின் மூலைவிட்ட உறுப்புக்கள் தவிர பிற உறுப்புகள் அனைத்தும் பூஜ்ஜியம் எனில் அது மூலைவிட்ட அணி எனப்படும்.

$A = [a_{ij}]_{n \times n}$ மற்றும் $i \neq j$ க்கு $a_{ij} = 0$, எனில், பின் 'A' என்பது $n \times n$ வரிசை உடைய மூலைவிட்ட அணி ஆகும்.

மூலைவிட்ட அணியை, $\text{diag}[a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}]$ எனவும் எழுதலாம்.

(எ.கா.) என்பது $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ ஒரு மூலைவிட்ட அணி.

9. **அலகு அணி அல்லது சமனி அணி** : ஒரு சதுர அணியில் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகள் அனைத்தும் 1 ஆகவும் மற்ற உறுப்புகள் அனைத்தும் பூஜ்ஜியமாகவும் இருந்தால், அது அலகு அணி அல்லது சமனி அணி எனப்படும்.

(எ.கா.) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ மற்றும் $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ ஆகியவை அலகு அணிகள்.

n வரிசை உடைய அலகு அணி $I_n \times n$ ஆல் குறிக்கப்படுகிறது.

10. **பூஜ்ஜியக் கோவை மற்றும் பூஜ்ஜியமற்ற கோவை அணிகள்** : ஒரு சதுர அணி 'A' -யின் அணிக்கோவை பூஜ்ஜியம் எனில், அதாவது, $|A| = 0$ எனில், அது பூஜ்ஜியக் கோவை எனப்படும்.

(எ.கா.) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ என்ற அணிக்கு, $|A| = 0$. (பூஜ்ஜியக் கோவை அணி)

ஒரு சதுர அணியின் அணிக்கோவை பூஜ்ஜியம் இல்லை எனில், அதாவது, $|A| \neq 0$,

எனில், அது பூஜ்ஜிமற்ற கோவை அணி எனப்படும்.

(எ.கா.) என்ற $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ அணிக்கு, $|A| = -10 \neq 0$. (பூஜ்ஜிமற்ற கோவை அணி)

11. **சமச்சீர் அணி :** ஒரு சதுர அணி $A = [a_{ij}]$ -யில், $a_{ij} = -a_{ji}$, $\forall i, j$ எனில், அது சமச்சீர் அணி எனப்படும். அல்லது $A = A'$ (இங்கு $A' = A$ யின் நிரல் நிரை மாற்று அணி)

(எ.கா.) $A = \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}_{3 \times 3}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ ஆகியவை சமச்சீர் அணிகள்.

12. **எதிர் சமச்சீர் அணி :** ஒரு சதுர அணி $A = [a_{ij}]$, பின்வரும் நிபந்தனைகளோடு எதிர் சமச்சீர் அணி என அழைக்கப்படுகிறது.

a. $a_{ij} = -a_{ji}$, $\forall i$ மற்றும் j அல்லது $A = -A'$

b. அனைத்து மூலைவிட்ட உறுப்புகளும் பூஜ்ஜியம்.

(எ.கா.) என்பது $\begin{bmatrix} 0 & -h & -g \\ h & 0 & -f \\ g & f & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ ஒரு மூலைவிட்ட அணி.

13. **நிரை நிரல் மாற்று அணி :** $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, என்க. A யின் நிரலை நிரையாகவும் மற்றும் நிரையை நிரலாகவும் மாற்றுவதன் மூலம் A- லிருந்து பெறப்பட்ட $n \times m$ அணி, A இன் நிரை நிரல் மாற்று அணி என்று அழைக்கப்படுகிறது. இது A' அல்லது A^T எனக் குறிக்கப்படும்.

(எ.கா.) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$, என்க, பின் $A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$

மற்றும் $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{1 \times 3}$ எனில் $B' = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$

நிரை நிரல் மாற்று அணியின் பண்புகள் : A' மற்றும் B' ஆகியவை A மற்றும் B ஆகியவற்றின் நிரை நிரல் மாற்று அணிகள் எனில், பின்னர்,

- $(A')' = A$
- $(A + B)' = A' + B'$
- $(kA)' = kA'$, இங்கு k என்பது ஏதேனும் ஒரு எண்
- $(AB)' = B'A'$
- $(ABC)' = C'B'A'$

14. **செங்குத்து அணி :** ஒரு சதுர அணி 'A' மற்றும் அதன் நிரல் நிரை மாற்று அணி A' ஆகியவற்றை பெருக்கும் போது சமனி அணி வந்தால் அது செங்குத்து அணி எனப்படும். அதாவது, $AA' = I$, இங்கு I என்பது ஓர் சமனி அணி.

$$(எ.கா.) A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \text{ எனில், } A' = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$AA' = I$$

[மாணவர்கள் அதை தங்கள் பகுதிகளில் சரிபார்க்கலாம்]

எனவே, A செங்குத்து அணி ஆகும்.

15. **முக்கோண வடிவ அணி :** ஒரு சதுர அணியில் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகளுக்கு மேல் அல்லது கீழ் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளும் பூஜ்ஜியம் எனில் அது முக்கோண வடிவ அணி எனப்படும். முக்கோண வடிவ அணிகளில் இரண்டு வகைகள் உள்ளன.

- a. **மேல் முக்கோண வடிவ அணி :** ஒரு சதுர அணியில் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகளுக்கு கீழ் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளும் பூஜ்ஜியம் எனில் அது மேல் முக்கோண வடிவ அணி எனப்படும்.

$$(எ.கா.) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \text{ முதன்மை மூலைவிட்டம்}$$

- b. **கீழ் முக்கோண வடிவ அணி :** ஒரு சதுர அணியில் முதன்மை மூலைவிட்ட உறுப்புகளுக்கு மேல் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளும் பூஜ்ஜியம் எனில் அது கீழ் முக்கோண வடிவ அணி எனப்படும்.

$$(எ.கா.) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \text{ முதன்மை மூலைவிட்டம்}$$

16. **இணை அணி :**

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 2-3i & 4 \\ 7+2i & -i & 3-2i \end{bmatrix} \text{ எனில், } A \text{ யின் இணை அணி } \bar{A} \text{ எனக் குறிக்கப்படுகிறது.}$$

$$\therefore \bar{A} = \begin{bmatrix} 1-i & 2+3i & 4 \\ 7-2i & i & 3+2i \end{bmatrix}$$

குறிப்புரை : A யின் இணை அணியின் நிரை நிரல் மாற்று அணியை A^0 எனக் குறிப்பிடலாம்.

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 2-3i & 4 \\ 7+2i & -i & 3-2i \end{bmatrix} \text{ எனில்,}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1-i & 2+3i & 4 \\ 7-2i & i & 3+2i \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (\bar{A})' = \begin{bmatrix} 1-i & 7-2i \\ 2+3i & i \\ 4 & 3+2i \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^0 = \begin{bmatrix} 1-i & 7-2i \\ 2+3i & i \\ 4 & 3+2i \end{bmatrix}$$

17. **ஓரலகு அணி :** A என்ற சதுர அணியில், $AA^0 = I$ எனில் அது ஓரலகு அணி எனப்படும்.

$$(எ.கா.) A = \begin{bmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{-1+i}{2} \\ \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \end{bmatrix}, \text{ எனில், } A^0 = \begin{bmatrix} \frac{1-i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ \frac{-1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow AA^0 = I$$

18. **ஹெர்மைட் அணி :** $A = [a_{ij}]$ என்ற சதுர அணியில், A யின் ஒவ்வொரு (ij) வது உறுப்பும் A யின் இணை சிக்கலான (ji)வது உறுப்புக்கு சமமாக இருந்தால், அது ஹெர்மைட் அணி எனப்படும்.

$$\text{அதாவது, } a_{ij} = \bar{a}_{ji}$$

$$(எ.கா.) A = \begin{bmatrix} 1 & 2+3i & 3+i \\ 2-3i & 2 & 1-2i \\ 3-i & 1+2i & 5 \end{bmatrix}$$

அணி A, ஹெர்மைட் அணியாக இருப்பதற்கு தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை என்னவென்றால், $A = A^0$ அதாவது, A யின் இணை நிரை நிரல் மாற்று அணி.

$$\text{அல்லது } A = (\bar{A})'$$

19. **எதிர் ஹெர்மைட் அணி :** $A = [a_{ij}]$ என்ற சதுர அணியில், A யின் ஒவ்வொரு (ij) வது உறுப்பும் A யின் எதிர்மறை இணை சிக்கலான (ji) வது உறுப்புக்கு சமமாக இருந்தால், அது எதிர் ஹெர்மைட் அணி எனப்படும்.

$$\text{அதாவது, } a_{ij} = -\bar{a}_{ji}$$

அனைத்து முதன்மை முளைவிட்ட உறுப்புகளும், பின்வரும் வடிவத்தில் இருக்கும்.

$$a_{ii} = -\bar{a}_{ii} \text{ அல்லது } a_{ii} + \bar{a}_{ii} = 0$$

$$a_{ii} = a + ib \text{ எனில், பின்னர் } \bar{a}_{ii} = a - ib$$

$$\Rightarrow (a + ib) + (a - ib) = 0 \text{ அல்லது } 2a = 0 \text{ அல்லது } a = 0$$

$$\text{ஆதலால், } a_{ii} \text{ என்பது முழு கற்பனை எண், அல்லது } a_{ii} = 0$$

எனவே ஒரு எதிர் ஹெர்மைட் அணியின் அனைத்து முளைவிட்ட உறுப்புகளும் பூஜ்ஜியம் அல்லது முற்றிலும் கற்பனை.

$$(எ.கா.) \begin{bmatrix} i & 2-3i & 4+5i \\ -(2+3i) & 0 & 2i \\ -(4-5i) & 2i & -3i \end{bmatrix}$$

அணி A, எதிர் ஹெர்மைட் அணியாக இருப்பதற்கு தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை என்னவென்றால்,

$$A^0 = -A$$

$$\Rightarrow (\bar{A})' = -A$$

20. **தன்னடுக்கு அணி :** ஒரு சதுர அணி A க்கு, $A^2 = A$ எனில் அது தன்னடுக்கு அணி எனப்படும்.

(எ.கா.) $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ எனில்,

பின்னர், $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = A$

21. **சீர் சூழல் அணி :** 'k' என்பது ஒரு நேர்மறை முழு எண் மற்றும் $A^{k+1} = A$ எனில், அணி A , சீர் சூழல் அணி என அழைக்கப்படும்.

$A^{k+1} = A$ ல், k என்பது குறைந்தபட்ச நேர்மறை முழு எண்ணாக இருந்தால், k என்பது A யின் சுழற்சி எனப்படும். k = 1 எனில், பின்னர், $A^2 = A$ மற்றும் அது தன்னடுக்கு அணி எனப்படும்.

22. **படிசுழி அணி :** k என்பது நேர்மறை முழு எண்ணாக இருக்கும் போது, $A^k = 0$ எனில், அணி A , படிசுழி அணி எனப்படும். $A^k = 0$ ல், k என்பது குறைந்தபட்ச நேர்மறை முழு எண்ணாக இருந்தால், k என்பது படிசுழி அணியின் குறியீடு எனப்படும்.

(எ.கா.) $A = \begin{bmatrix} ab & b^2 \\ -a^2 & -ab \end{bmatrix}$, எனில்,

பின்னர், $A^2 = \begin{bmatrix} ab & b^2 \\ -a^2 & -ab \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ab & b^2 \\ -a^2 & -ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$

A என்பது படிசுழி அணி மற்றும் அதன் குறியீடு 2.

23. **சுருள்வு அணி :** $A^2 = I$, (I -அலகு அணி) எனில், அணி ' A ', சுருள்வு அணி எனப்படும்.

எப்போதும் $I^2 = I$, எனவே அலகு அணி ஓர் சுருள்வு அணி.

24. **அணியெச்சம் :** A , என்பது n வரிசையுடைய சதுர அணி என்க. அதன் முதன்மை மூலவிட்ட உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை, அணியெச்சம் எனப்படும். இதை $\text{Tr}(A)$ எனக் குறிக்கலாம்.

$A = [a_{ij}]_{n \times n}$, எனில்,

பின்னர், $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$

(எ.கா.) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ எனில்,

பின் $\text{trace}(A) = \text{tr}(A) = 1 + (-3) + 5 = 3$

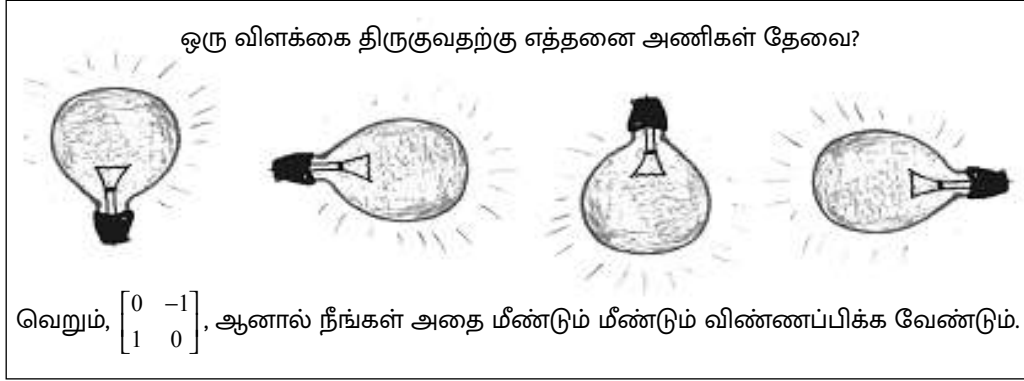
அணியெச்சத்தின் பண்புகள் :

A மற்றும் B ஆகியவை n வரிசை உடைய இரு சதுர அணிகள் மற்றும் λ என்பது ஒரு திசையிலி என்க. பின்னர்

a. $\text{tr}(\lambda A) = \lambda \text{tr} A$

b. $\text{tr}(A + B) = \text{tr} A + \text{tr} B$

c. $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$



படம் 5.1

5.1.2 அணிகளின் மீதான செயல்முறைகள்

5.1.2.1 அணிகளின் கூட்டல்

இரண்டு அணிகளின் 'கூட்டல்' அவை இரண்டும் ஒரே வரிசையில் இருந்தால் மட்டுமே சாத்தியம். 'A' மற்றும் 'B' ஆகியவை ஒரே வரிசையில் உள்ள இரண்டு அணிகள் என்று வைத்துக்கொள்வோம், பிறகு 'A' மற்றும் 'B' இன் தொடர்புடைய உறுப்புகளை கூட்டுவதன் சேர்ப்பதன் மூலம் இந்த இரண்டு அணிகளின் கூட்டுத்தொகை பெறப்படுகிறது.

இது $A + B$ என குறிக்கப்படுகிறது

(எ.கா.) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$ மற்றும் $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$, எனில், பிறகு

$$A + B = \begin{bmatrix} 2+1 & 3+2 & 1+1 \\ 1+1 & 2+1 & 3+1 \end{bmatrix}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

பொதுவாக $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ மற்றும் $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, எனில், பிறகு

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

5.1.2.2 அணி கூட்டலின் பண்புகள்

ஒரே வரிசை உடைய அணியை மட்டுமே கூட்டவோ கழிக்கவோ முடியும்:

- பரிமாற்று விதி :** ஒரே வரிசை உடைய இரண்டு அணிகளை எந்த வரிசை முறையிலும் கூட்டலாம், அதாவது பரிமாற்று விதி, அணி கூட்டலில் சாத்தியம்.

'A' மற்றும் 'B' ஆகியவை இரண்டு அணிகளாக இருந்தால்,

$$A + B = B + A$$

(மாணவர்கள் ஒரே வரிசையில் இரண்டு அணிகள் எடுத்து அதை சரிபார்க்கலாம்)

- சேர்ப்பு விதி:** 'A', 'B' மற்றும் 'C' ஆகியவை ஒரே வரிசை மூன்று அணிகள் எனில் சேர்ப்பு விதி அணி கூட்டலில் சாத்தியம். அதாவது

$$(A + (B + C)) = (A + B) + C \text{ (மாணவர்கள் சரிபார்க்கலாம்)}$$

5.1.2.3 அணிகளின் கழித்தல்

இரண்டு அணிகளின் 'கழித்தல்', அவை இரண்டும் ஒரே வரிசையில் இருந்தால் மட்டுமே சாத்தியம். 'A' மற்றும் 'B' ஆகியவை ஒரே வரிசையில் உள்ள இரண்டு அணிகள் என்று வைத்துக்கொள்வோம், பிறகு 'A' மற்றும் 'B' இன் முதல் அணியின் ஒவ்வொரு உறுப்புகளுடன் ஒத்த இரண்டாவது அணியின் உறுப்புகளை கழிப்பதன் மூலம் இரண்டு அணிகளின் வேறுபாடு பெறப்படுகிறது.

இது $A - B$ என குறிக்கப்படுகிறது.

$$(எ.கா.) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \quad \text{மற்றும்} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 2}, \text{ எனில், பிறகு}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1-1 & 1-1 \\ 1-2 & 2-2 \\ 2-3 & 3-1 \end{bmatrix}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

இது, 'A' மற்றும் 'B' ஆகிய இரண்டு அணிகளின் வேறுபாடு.

5.1.2.4 அணியின் திசையிலி பெருக்கல்

ஒரு அணியை k என்ற திசையிலியால் பெருக்கும் போது, அதன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் ஆல் பெருக்கப்படுகிறது.

$$(எ.கா.) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 3}, \text{ எனில், பிறகு}$$

$$2A = 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

5.1.2.5 அணிகளின் பெருக்கல்

'A' என்ற அணியின் நிரைகளின் எண்ணிக்கையும், 'B' என்ற அணியின் நிரல்களின் எண்ணிக்கையும் சமமாக இருப்பின் 'A' என்ற அணி 'B' என்ற அணியுடன் பெருக்கலுக்கு உகந்தது எனப்படும்.

$$A = [a_{ij}]_{p \times q} \quad \text{மற்றும்} \quad B = [b_{jk}]_{q \times r}, \text{ எனில் பிறகு, பெருக்கம், } AB$$

$$C = [c_{ik}]_{p \times r} \text{ என வரையறுக்கப்படுகிறது.}$$

$$\text{இங்கு} \quad c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk}$$

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}$$

$$C = AB, \text{ என எழுதலாம்.}$$

$$(எ.கா.) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad \text{மற்றும்} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \quad \text{எனில் பிறகு,}$$

$$AB = \begin{matrix} & c_1 & c_2 & c_3 \\ \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} R_1c_1 & R_1c_2 & R_1c_3 \\ R_2c_1 & R_2c_2 & R_2c_3 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

5.1.2.6 அணி பெருக்கலின் பண்புகள்

- அணிகளின் பெருக்கல் பரிமாற்றமல்ல, அதாவது 'A' மற்றும் 'B' ஆகியவை இரண்டு அணிகளாக இருந்தால், பின் $AB \neq BA$. (சமமாக இருக்க வேண்டியதில்லை)
- அணிகளின் பெருக்கல் சேர்ப்பு பண்பு உடையது, உறுதிப்பாடு உறுதி செய்யப்பட்டால். அதாவது, 'A', 'B' மற்றும் 'C', ஆகியவை மூன்று அணிகள் எனில்,

$$A(BC) = (AB)C$$
- அணிகளின் பெருக்கல் கூட்டலைப் பொறுத்து பங்கீட்டு தன்மை உடையது. அதாவது, 'A', 'B' மற்றும் 'C', ஆகியவை மூன்று அணிகள் எனில்,

$$A(B + C) = AB + AC$$
- ஒரு அலகு அணி 'I' யுடன், ஒரு அணி 'A' யை பெருக்கினால் அதே அணி 'A' கிடைக்கும். அதாவது, $AI = IA = A$
- 'A' என்ற அணியின் பெருக்கல் நேர்மாறு காண்பதற்கு, $|A| \neq 0$ என இருக்க வேண்டும். அதாவது, $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

எடுத்துக்காட்டாக, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ மற்றும் $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$ எனில் பிறகு, பின்னர் பெருக்கல் AB யின்

மதிப்பை பெறுக மற்றும் BA ஏன் வரையறுக்கப்படவில்லை என்பதை விளக்குக?

தீர்வு : A (3 × 3) யின் நிரல்களின் எண்ணிக்கை = B (3 × 2)-யின் நிரைகளின் எண்ணிக்கை எனவே பெருக்கல் AB, பின்வருமாறு வரையறுக்கலாம்.

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -5 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

B (3 × 2) யின் நிரல்களின் எண்ணிக்கை $\neq$ A (3 × 3) யின் நிரைகளின் எண்ணிக்கை. எனவே பெருக்கல் BA வரையறுக்கப்படவில்லை.

குறிப்பு :

- A மற்றும் B ஆகியவை முறையே $m \times n$ மற்றும் $p \times q$ வரிசை உடைய இரண்டு அணிகள் மற்றும் $n = p$ ஆக இருக்கும்போது மட்டுமே, AB இன் பெருக்கல் சாத்தியம். மற்றும் AB இன் வரிசை $m \times q$ ஆக இருக்கும்.
- A மற்றும் B ஆகிய இரண்டு அணிகளின் பெருக்கல் AB யாக இருந்தால், பெருக்கல் BA இருக்கலாம் அல்லது இல்லாமல் இருக்கலாம்.

சித்திர பிரதிநிதித்துவம் : அணி பெருக்கத்தின் படிப்படியான காட்சிப்படுத்தல்

<http://matrixmultiplication.xyz>

5.2 தொடக்கநிலை செயல்பாடுகள் (உருமாற்றம்)

அணிகளின் பின்வரும் செயல்பாடுகளில் ஏதேனும் ஒன்று தொடக்கநிலை உருமாற்றம் அல்லது E-உருமாற்றம் என்று அழைக்கப்படுகிறது.

1. ஏதேனும் இரு நிரைகளை (நிரல்களை) பரிமாற்றம் செய்தல். i^{th} மற்றும் j^{th} நிரைகளின் பரிமாற்றம் R_{ij} அல்லது $R_i \rightarrow R_j$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது. இதுபோலவே, i^{th} மற்றும் j^{th} நிரல்களின் பரிமாற்றம், C_{ij} அல்லது $C_i \rightarrow C_j$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது.
2. ஒரு நிரையில் (நிரலில்) உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பையும் ஒரு பூஜ்ஜியமற்ற திசையிலியால் பெருக்குதல். i^{th} நிரையை k யால் பெருக்குவது, kR_i எனக் குறிக்கப்படுகிறது. இதுபோலவே, i^{th} நிரலை k யால் பெருக்குவது, kC_i எனக் குறிக்கப்படுகிறது.
3. ஒரு அணியில் உள்ள ஒரு நிரையில் (நிரலில்) உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்புடன் ஒரு பூஜ்ஜியமற்ற நிரையில் (நிரலில்) உள்ள ஒத்த உறுப்பின் ஒரு பூஜ்ஜியமற்ற திசையிலி பெருக்கற் பலனைக் கூட்டுதல்.

5.2.1 தொடக்கநிலை அணி

ஏதேனும் ஒரு தொடக்கநிலை செயல்பாட்டைப் பயன்படுத்தி, அலகு அணியிலிருந்து பெறப்பட்ட அணி தொடக்கநிலை அணி என்று அழைக்கப்படுகிறது.

(எ.கா.) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ எனில்

$R_2 \rightarrow R_2 + 3R_3$ வை பயன்படுத்த நாம் பெறுவது,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ இது ஒரு தொடக்கநிலை அணி.}$$

5.3 அணியின் ஏறுபடி வடிவம்

5.3.1 அணியின் நிரை - ஏறுபடி வடிவம்

- a. ஒரு அணியானது நிரை ஏறுபடி வடிவில் இருக்க வேண்டுமெனில், அனைத்து பூஜ்ஜிய நிரைகளும், (ஏதேனும் இருந்தால்), அணியின் கீழே இருக்க வேண்டும்.
- b. ஒவ்வொரு நிரையின் முதல் பூஜ்ஜியம் அல்லாத உறுப்பு முந்தைய நிரையில் முதல் பூஜ்ஜியமற்ற உறுப்பின் வலது பக்கத்தில் இருக்க வேண்டும்.

குறிப்பு : ஏதேனும் ஒரு நிரையின் முதல் பூஜ்ஜியம் அல்லாத உறுப்பு முதன்மை உறுப்பு அல்லது திருகு முனையியல்புடைய உறுப்பு அல்லது அந்த நிரையின் சுழு முனை என அழைக்கப்படும்.

5.3.2 அணியின் நிரை சுருக்கப்பட்ட ஏறுபடி வடிவம்

ஒரு அணி நிரை சுருக்கப்பட்ட ஏறுபடி வடிவத்தில் இருக்க வேண்டுமெனில்,

- a. இது நிரை ஏறுபடி வடிவத்தில் இருக்க வேண்டும்.

- b. ஒவ்வொரு முதன்மை உறுப்புகளும் ஒன்றாக இருக்க வேண்டும்.
- c. ஒவ்வொரு நிரலிலும் முதன்மை உறுப்புக்கு மேலே உள்ள உறுப்புகள் அனைத்தும் பூஜ்ஜியமாக இருக்க வேண்டும்.

5.3.3 அணியின் நிரல் – ஏறுபடி வடிவம்

ஒரு அணியானது நிரல் ஏறுபடி வடிவில் இருக்க வேண்டுமெனில்,

- a. அனைத்து பூஜ்ஜிய நிரல்களும், (ஏதேனும் இருந்தால்), அணியின் வலது பக்கத்தில் இருக்க வேண்டும்.
- b. ஒவ்வொரு நிரலின் முதல் பூஜ்ஜியம் அல்லாத உறுப்பு முந்தைய நிரலின் முதல் பூஜ்ஜியமற்ற உறுப்பின் கீழே இருக்க வேண்டும்.

குறிப்பு : ஏதேனும் ஒரு நிரலின் முதல் பூஜ்ஜியம் அல்லாத உறுப்பு முதன்மை உறுப்பு அல்லது திருகு முனையியல்புடைய உறுப்பு அல்லது அந்த நிரலின் சுழு முனை என அழைக்கப்படும்.

5.3.4 அணியின் நிரல் சுருக்கப்பட்ட ஏறுபடி வடிவம்

ஒரு அணி நிரல் சுருக்கப்பட்ட ஏறுபடி வடிவத்தில் இருக்க வேண்டுமெனில்,

- a. இது நிரல் ஏறுபடி வடிவத்தில் இருக்க வேண்டும்..
- b. ஒவ்வொரு முதன்மை உறுப்புகளும் ஒன்றாக இருக்க வேண்டும்.
- c. ஒவ்வொரு நிரையிலும் முதன்மை உறுப்புக்கு இடது பக்கம் உள்ள உறுப்புகள் அனைத்தும் பூஜ்ஜியமாக இருக்க வேண்டும்.

குறிப்புரை : அணி A, நிரை ஏறுபடி வடிவத்தில் இருந்தால், அதன் நிரை நிரல் மாற்று அணி A', நிரல் ஏறுபடி வடிவத்தில் இருக்கும்.

5.4 அணிக்கோவைகள்

அணிக்கோவை, நிர்ணயக் கோட்பாடு நேரியல் சமன்பாடுகளின் அமைப்பின் ஆய்வில் இருந்து உருவானது. அணிக்கோவை ஒரு திசையிலி, இது ஒரு சதுர அணியின் உறுப்புகளின் சார்பாகும். ஒரு சதுர அணி, $A = [a_{ij}]$, யின் அணிக்கோவையை $\det A$ அல்லது $\det(A)$ அல்லது $|A|$ எனக் குறிப்பிடலாம்.

1×1 வரிசை உடைய $A = [a]$ எனும் அணியின் அணிக்கோவையை $|A| = a$ எனக் குறிப்பிடலாம் மற்றும் அதன் அணிக்கோவையின் வரிசை ஒன்று ஆகும்.

2×2 வரிசை உடைய $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ எனும் அணியின் அணிக்கோவையை $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ எனக் குறிப்பிடலாம்

மற்றும் அதன் அணிக்கோவையின் வரிசை இரண்டு ஆகும்.

இதுபோலவே, 3×3 வரிசை உடைய $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ எனும் அணியின் அணிக்கோவையை

$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ எனக் குறிப்பிடலாம் மற்றும் அதன் அணிக்கோவையின் வரிசை மூன்று ஆகும்.

5.4.1 இரண்டு வரிசை அணிக்கோவையின் விரிவாக்கம்

பின்வரும் இரு நேரியச் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பை கருதுக. இங்கு x மற்றும் y ஆகியன மாறிகள்.

$$a_1x + b_1y = 0 \quad \dots(1)$$

$$a_2x + b_2y = 0 \quad \dots(2)$$

(1) லிருந்து,

$$\frac{x}{y} = -\frac{b_1}{a_1} \quad \dots(3)$$

(2) லிருந்து,

$$\frac{x}{y} = -\frac{b_2}{a_2} \quad \dots(4)$$

(3) மற்றும் (4) லிருந்து, x மற்றும் y யை அகற்ற, நாம் பெறுவது.

$$-\frac{b_1}{a_1} = -\frac{b_2}{a_2}$$

$\Rightarrow$

$$a_1b_2 - b_1a_2 = 0$$

$a_1b_2 - b_1a_2$ என்ற எண் இரண்டு வரிசை அணிக்கோவை எனப்படும். a_1, a_2, b_1, b_2 ஆகிய எண்கள் அணிக்கோவையின் உறுப்புகள் ஆகும்.

குறிப்புரை : 2×2 வரிசை உடைய அணிக்கோவையை கண்டுப் பிடிக்க குறுக்குப் பெருக்கல் விதியை பயன்படுத்த வேண்டும்.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 5.1 : $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ ன் அணிக்கோவையைக் காண்க.

தீர்வு : $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ என்க

$$\Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 35 + 6 = 41$$

எடுத்துக்காட்டு 5.2 : $\begin{vmatrix} x & 3 \\ 6 & 2x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ எனில் x ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டது, $\begin{vmatrix} x & 3 \\ 6 & 2x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

$$2x^2 - 18 = 18 - 18$$

$$2x^2 - 18 = 0$$

$$2x^2 = 18$$

$$x^2 = 9 \quad x = \pm 3$$

5.4.2 மூன்று வரிசை அணிக்கோவையின் விரிவாக்கம்

பின்வரும் இரு நேரியச் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பை கருதுக. இங்கு x, y மற்றும் z ஆகியன மாறிகள்.

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0 \quad \dots(5)$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = 0 \quad \dots(6)$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = 0 \quad \dots(7)$$

(6) மற்றும் (7) லிருந்து, x, y, z யை அகற்ற, நாம் பெறுவது.

$$\frac{x}{b_2c_3 - c_2b_3} = \frac{y}{c_2a_3 - a_2c_3} = \frac{z}{a_2b_3 - b_2a_3} = k$$

$$x = k(b_2c_3 - c_2b_3)$$

$$y = k(c_2a_3 - a_2c_3)$$

$$z = k(a_2b_3 - b_2a_3)$$

x, y, z ன் மதிப்புகளை (5) ல் பிரதியிட

$$a_1(b_2c_3 - c_2b_3)k + b_1(c_2a_3 - a_2c_3)k + c_1(a_2b_3 - b_2a_3)k = 0$$

$$a_1(b_2c_3 - c_2b_3) + b_1(c_2a_3 - a_2c_3) + c_1(a_2b_3 - b_2a_3) = 0 \quad \dots(8)$$

(k இன் மதிப்பு ஏன் பூஜ்ஜியமாக இருக்க முடியாது என்பதை மாணவர்கள் சிந்திக்க வேண்டும்)

(8) ல் வலது பக்கம் உள்ள கோவை மூன்று வரிசை அணிக்கோவை எனப்படும்.

இதை $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ எனும் குறியீட்டால் குறிக்கலாம்,

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1(b_2c_3 - c_2b_3) + b_1(c_2a_3 - a_2c_3) + c_1(a_2b_3 - b_2a_3)$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

குறிப்புகள் :

1. மேலே உள்ள அணிக்கோவையின் விரிவாக்கம் 1 வது வரிசையின் அடிப்படையில் விரிவாக்கம் என அறியப்படுகிறது. இதேபோல், அணிக்கோவை எந்த நிரையிலும் அல்லது எந்த நிரலிலும் விரிவாக்கப்படலாம் மற்றும் ஒவ்வொரு விதத்திலும் அணிக்கோவையின் மதிப்பு அப்படியே இருக்கும்.
2. ஒவ்வொரு உறுப்பிற்கு முன் குறி = $(-1)^{i+j}$, இங்கு 'i' மற்றும் 'j' என்பது அந்த உறுப்பு இடம் பெற்று உள்ள இடத்தின் நிரல் மற்றும் நிரையினை குறிக்கும்.

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 5.3 : $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 31 & 11 & 38 \end{bmatrix}$ ன் அணிக்கோவையை மதிப்பிடுக.

தீர்வு : $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 31 & 11 & 38 \end{bmatrix}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

பிறகு $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 31 & 11 & 38 \end{vmatrix}$ முதல் நிரை வழியாக விரிவுபடுத்த,

$$\begin{aligned} |A| &= 1 \begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 11 & 38 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 31 & 38 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 31 & 11 \end{vmatrix} \\ &= 1(228 - 110) - 3(76 - 310) + 5(22 - 186) \\ &= 1(118) - 3(-234) + 5(-164) = 118 + 702 - 820 = 0 \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.4 : $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ எனில் $|3A| = 27|A|$ எனக் காட்டுக..

தீர்வு : $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

பிறகு $3A = 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

$$3A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

எனவே $|3A|$ ன் அணிக்கோவை,

$$|3A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 12 \end{vmatrix}$$

முதல் நிரை வழியாக விரிவுபடுத்த, நாம் பெறுவது

$$\begin{aligned} |3A| &= 3 \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 3(36 - 0) - (0 - 0) + 3(0 - 0) \\ &= 108 - 0 + 0 \\ &= 108 \end{aligned}$$

$$\text{மற்றும் } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

முதல் நிரை வழியாக விரிவுபடுத்த, நாம் பெறுவது

$$|A| = 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 1(4) - 0 + 1(0) \\ = 4$$

$$\text{பின் } 27|A| = 27 \times 4 = 108$$

$$\text{எனவே } |3A| = 27|A|$$

5.4.3 அணிக்கோவையின் பண்புகள்

பண்பு i : ஓர் அணிக்கோவையின் நிரைகளை நிரல்களாகவும், நிரல்களை நிரைகளாகவும் இடமாற்றம் செய்தால் அதன் மதிப்பு மாறாது.

எடுத்துக்காட்டு 5.5 : மதிப்பிடுக $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

தீர்வு : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டு உள்ளது.

இரண்டாவது நிரல் வழியாக விரிவுபடுத்த, நாம் பெறுவது

$$\Delta = 36$$

(மாணவர்கள் சரிபார்க்கலாம்)

அனைத்து நிரைகளையும் நிரல்களாக மாற்ற, நாம் பெறுவது

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} \text{ (என்க)}$$

முதல் நிரை வழியாக விரிவுபடுத்த க, நாம் பெறுவது

$$\Delta_1 = 36$$

(மாணவர்கள் கண்டுபிடிக்கலாம்)

எனவே,

$$\Delta = \Delta_1$$

பண்பு ii : ஓர் அணிக்கோவையின் ஏதேனும் இரு நிரைகள் அல்லது நிரல்களை இடமாற்றம் செய்யப்படும்போது, அணிக்கோவையின் குறி மாறும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.6 : மதிப்பிடுக $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

தீர்வு : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டு உள்ளது.

முதல் நிரை வழியாக விரிவுபடுத்த, நாம் பெறுவது

$$\Delta = 2$$

பண்பு ii, யை பயன்படுத்தி, இரண்டாவது மற்றும் மூன்றாவது நிரைகளை இடமாற்ற, நாம் பெறுவது

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} \text{ (என்க)}$$

முதல் நிரை வழியாக விரிவுபடுத்த, நாம் பெறுவது

$$\Delta_1 = -2$$

எனவே, $\Delta = -\Delta_1$

பண்பு iii : ஓர் அணிக்கோவையின் ஏதேனும் இரு நிரைகள் அல்லது நிரல்கள் சர்வ சமம் எனில், அவ்வணிக்கோவையின் மதிப்பு பூஜ்ஜியமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.7 : மதிப்பிடுக $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

தீர்வு : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டு உள்ளது.

முதல் நிரை வழியாக விரிவுபடுத்த, நாம் பெறுவது

$$\Delta = 0 \quad (\text{மாணவர்கள் கண்டுபிடிக்கலாம்})$$

எனவே, $\Delta = 0$

பண்பு iv : ஓர் அணிக்கோவையின் ஏதேனும் ஒரு நிரையில் (நிரலில்) உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் ஒரே மாறிலியால் பெருக்கப்பட்டிருப்பின் அவ்வணிக்கோவையின் மதிப்பும் அதே மாறிலியால் பெருக்கப்பட்டு இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.8 : மதிப்பிடுக $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

தீர்வு : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டு உள்ளது.

முதல் நிரை வழியாக விரிவுபடுத்த, நாம் பெறுவது

$$\Delta = -3$$

முதல் நிரையை 5 ஆல் பெருக்க, நமக்கு கிடைப்பது,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \text{ (என்க)}$$

$$= -15 = 5(\Delta)$$

$$\Rightarrow \Delta_1 = 5\Delta$$

பண்பு v : ஓர் அணிக்கோவையில் ஒரு நிரையில் (அல்லது நிரலில்) உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்போடும் மற்ற பிற நிரைகளில் (அல்லது நிரல்களில்) உள்ள ஒத்த உறுப்புகளைக் குறிப்பிட்ட மாறிலிகளால் முறையே பெருக்கிக் கூட்டுவதால் அல்லது கழிப்பதால் அவ்வணிக் கோவையின் மதிப்பு மாறாது.

எடுத்துக்காட்டு 5.9 : மதிப்பிடுக $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}$

தீர்வு : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டு உள்ளது.

முதல் நிரை வழியாக விரிவுபடுத்த, நாம் பெறுவது

$$\Delta = -2$$

இரண்டாவது நிரலை 3 ஆல் பெருக்கி மற்றும் முதல் நிரலோடு கூட்ட, நாம் பெறுவது

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1+6 & 2 & 4 \\ 3+3 & 1 & 5 \\ 0+12 & 4 & 6 \end{vmatrix} \quad (\text{என்க})$$

$$= \begin{vmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 6 & 1 & 5 \\ 12 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

முதல் நிரை வழியாக விரிவுபடுத்த, நாம் பெறுவது

$$\Delta_1 = -2$$

$$\Rightarrow \Delta = \Delta_1$$

பண்பு vi : ஓர் அணிக்கோவையில் உள்ள ஒரு நிரையின் (நிரலின்) ஒவ்வொரு உறுப்பும் இரண்டு (அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட) உறுப்புகளின் கூடுதலாக இருக்குமெனில், அவ்வணிக்கோவையை இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட அணிக்கோவையின் கூட்டல் பலனாக எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 5.10 : மதிப்பிடுக $\Delta = \begin{vmatrix} 2+1 & 1 & 0 \\ 3+1 & 0 & 1 \\ 2+2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

தீர்வு : $\Delta = \begin{vmatrix} 2+1 & 1 & 0 \\ 3+1 & 0 & 1 \\ 2+2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டு உள்ளது.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 1$$

குறிப்புரை : A என்பது n வரிசை உடைய சதுர அணி எனில், $|k.A| = k_n |A|$

எடுத்துக்காட்டு 5.11: அணிக்கோவையின் பண்புகளை பயன்படுத்தி

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ac \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca) \text{ என நிறுவுக,}$$

தீர்வு : $\Delta = \begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ac \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டு உள்ளது.

$R_2 \rightarrow R_2 - R_1; R_3 \rightarrow R_3 - R_1$ என செய்ய, நாம் பெறுவது

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b-a & b^2-a^2 & ac-bc \\ c-a & c^2-a^2 & ab-bc \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b-a & (b-a)(b+a) & c(a-b) \\ c-a & (c-a)(c+a) & b(a-c) \end{vmatrix}$$

பொதுவான $(b-a)$ மற்றும் $(c-a)$, யை R_2 மற்றும் R_3 லிருந்து முறையே வெளி எடுக்க, நாம் பெறுவது,

$$\Delta = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ 1 & a+b & -c \\ 1 & a+c & -b \end{vmatrix}$$

$R_3 \rightarrow R_3 - R_2$ என செய்ய, நாம் பெறுவது,

$$\Delta = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ 1 & a+b & -c \\ 0 & c-b & c-b \end{vmatrix}$$

பொதுவான $(c-b)$ யை R_3 லிருந்து, வெளி எடுக்க, நாம் பெறுவது,

$$= (b-a)(c-a)(c-b) \begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ 1 & a+b & -c \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

மூன்றாவது நிரை வழியாக விரிவுபடுத்த, நாம் பெறுவது

$$= [(b-a)(c-a)(c-b)](-1) \begin{vmatrix} a & bc-a^2 \\ 1 & -c-a-b \end{vmatrix}$$

$$= [(b-a)(c-a)(c-b)](-1)[-ac-a^2-ab-bc+a^2]$$

$$= [(b-a)(c-a)(c-b)](-1)[(-1)(ac+ab+bc)]$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$$

எடுத்துக்காட்டு 5.12 : $\begin{vmatrix} 1 & a & abc \\ 1 & b & bca \\ 1 & c & cab \end{vmatrix} = 0$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & abc \\ 1 & b & bca \\ 1 & c & cab \end{vmatrix}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டு உள்ளது.

பொதுவான abc யை C_3 லிருந்து, வெளி எடுக்க, நாம் பெறுவது,

$$\Delta = abc \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

[முதல் மற்றும் மூன்றாவது நிரல்கள் சமம்] [பண்பு iii. ன் படி]

எடுத்துக்காட்டு 5.13 : அணிக்கோவையின் பண்புகளை பயன்படுத்தி

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = (x+2)(x-1)^2 \text{ என நிறுவுக,}$$

தீர்வு : $\Delta = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டு உள்ளது.

$c_1 \rightarrow c_1 + c_2 + c_3$ என செய்ய, நாம் பெறுவது

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+2 & 1 & 1 \\ x+2 & x & 1 \\ x+2 & 1 & x \end{vmatrix}$$

பொதுவான $(x+2)$ வை C_1 லிருந்து, வெளி எடுக்க, நாம் பெறுவது,

$$= (x+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

$R_2 \rightarrow R_2 - R_1; R_3 \rightarrow R_3 - R_1$ என செய்ய, நாம் பெறுவது,

$$\Delta = (x+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & (x-1) & 0 \\ 0 & 0 & (x-1) \end{vmatrix}$$

பொதுவான $(x-1)$ யை R_2 மற்றும் R_3 லிருந்து முறையே வெளி எடுக்க, நாம் பெறுவது,

$$\Delta = (x+2)(x-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

R_2 வழியாக விரிவுபடுத்த, நாம் பெறுவது

$$\begin{aligned}\Delta &= (x+2)(x-1)^2 \cdot (1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (x+2)(x-1)^2 \cdot (1) \\ &= (x+2)(x-1)^2\end{aligned}$$

பயிற்சி 5.2

1. பின்வரும் அணிக்கோவைகளை மதிப்பிடுக:

$$\begin{array}{llll} \text{a. } \begin{vmatrix} x^2 - x + 1 & x - 1 \\ x + 1 & x + 1 \end{vmatrix} & \text{b. } \begin{vmatrix} \sqrt{6} & \sqrt{5} \\ 20 & \sqrt{24} \end{vmatrix} & \text{c. } \begin{vmatrix} 210 & 117 & 345 \\ 19 & 9 & 34 \\ 7 & 3 & 5 \end{vmatrix} & \text{d. } \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} \end{array}$$

2. கொடுக்கப்பட்ட அணிக்கோவைகளையே மதிப்பிடுக: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

a. இரண்டாவது நிரை வழியாக

b. மூன்றாவது நிரல் வழியாக

3. கொடுக்கப்பட்ட அணிக்கோவையின் மதிப்பைக் காண்க. $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \sec \theta \\ \tan \theta & -\sec \theta & \tan \theta \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

4. அணிக்கோவையின் பண்புகளை பயன்படுத்தி, பின்வருவனவற்றை நிறுவுக,

$$\begin{array}{ll} \text{a. } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c) & \text{b. } \begin{vmatrix} b+c & a-b & a \\ c+a & b-c & b \\ a+b & c-a & c \end{vmatrix} = 3abc - a^3 - b^3 - c^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{c. } \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x^2 & 1 & x \\ x & x^2 & 1 \end{vmatrix} = (1-x^3)^2 & \text{d. } \begin{vmatrix} a^2 & bc & ac+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ac \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2 \end{array}$$

$$\text{e. } \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \\ a+b & b+c & c+a \end{vmatrix} = 2(a+b+c)(ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2)$$

5. $x = 2$ என்பது எனக் கொடுக்கப்பட்ட $\begin{vmatrix} x & -6 & -1 \\ 2 & -3x & x-3 \\ -3 & 2x & x+2 \end{vmatrix} = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலம் என நிறுவுக

மற்றும் அதை முற்றிலும் தீர்க்க.

6. a, b மற்றும் c ஆகியவை மெய்யெண்கள் மற்றும் $\Delta = \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \\ a+b & b+c & c+a \end{vmatrix} = 0$ எனில், பின்னர்

$a + b + c = 0$ அல்லது $a = b = c$ எனக் காட்டுக.

விடைகள்

1. a. $x^3 - x^2 + 2$ b. 2 c. 2178 d. 40
2. a. 23 b. 23 3. $\sec \theta (\sec \theta + \tan \theta)$

5.4.4 அணிக்கோவையின் பயன்பாடுகள்

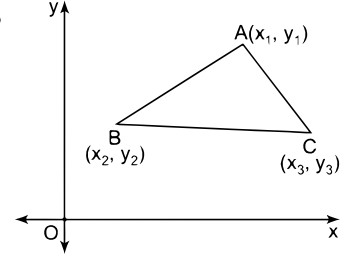
5.4.4.1 அணிக்கோவையை பயன்படுத்தி முக்கோணத்தின் பரப்பளவு

(x_1, y_1) , (x_2, y_2) மற்றும் (x_3, y_3) ஆகியவற்றை உச்சிப்புள்ளிகளாகக் கொண்ட ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பளவானது,

$$\text{Area} = \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

அல்லது
$$= \frac{1}{2} [x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3]$$

இந்த கோவையை அணிக்கோவையின் வடிவில் பின்வருமாறு எழுதலாம்,



படம் 5.2

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{அல்லது} \quad \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

குறிப்பு :

1. அணிக்கோவை எதிர்மறையாக இருக்கலாம் ஆனால் பரப்பளவு எப்போதும் எதிர்மறையாக இருக்காது. அதாவது ≥ 0
2. ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பளவு கொடுக்கப்பட்டால், கணக்கீடுகளுக்கு நேர்மறை மற்றும் எதிர்மறை மதிப்புகளைப் பயன்படுத்தவும்.
3. மூன்று புள்ளிகள், ஒரு கோடமைப் புள்ளிகளாக இருந்தால் மட்டுமே அப்புள்ளிகளால் உருவாகும் முக்கோணத்தின் பரப்பளவு பூஜ்ஜியமாக இருக்கும்.

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 5.14 : $(2, 7)$, $(1, 1)$ மற்றும் $(10, 8)$ ஆகியவற்றை உச்சிப்புள்ளிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

தீர்வு : ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பளவானது, $\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$

முக்கோணத்தின் உச்சிப்புள்ளிகள் (x_1, x_2) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) ஆகியவை $(2, 7)$, $(1, 1)$ $(10, 8)$, எனவே

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 10 \\ 7 & 1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{1}{2}[1(8-10)-1(16-70)+1(2-7)] \\ &= \frac{1}{2}[1(-2)-1(-54)+1(-5)] \\ &= \frac{1}{2}[-2+54-5] = \frac{47}{2}\end{aligned}$$

எனவே, முக்கோணத்தின் தேவையான பரப்பளவு $47/2$ சதுர அலகுகள் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.15 : $(-2, -3), (3, 2), (-1, -8)$ ஆகியவற்றை உச்சிப்புள்ளிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

தீர்வு : முக்கோணத்தின் உச்சிப்புள்ளிகள் $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ ஆகியவை $(2, 7), (1, 1), (10, 8)$. ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பளவானது,

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & -8 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2}[1(-24+2)-1(16-3)+1(-4+9)] \\ &= \frac{1}{2}[-22-13+5] = -\frac{30}{2} = -15\end{aligned}$$

முக்கோணத்தின் பரப்பளவு எப்போதும் எதிர்மறையாக இல்லாததால், முக்கோணத்தின் தேவையான பரப்பளவு 15 சதுர அலகுகள் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.16 : முக்கோணத்தின் பரப்பளவு 4 சதுர அலகுகள் மற்றும் $(-2, 0), (0, 4), (0, k)$ ஆகியவை உச்சிப்புள்ளிகள் எனில், k -ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு : ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பளவானது,

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

இங்கு முக்கோணத்தின் பரப்பளவு = 4 சதுர அலகுகள்.

$\therefore \Delta = \pm 4$ [பரப்பளவு எதிர்மறை அல்ல ஆனால் அணிக்கோவை நேர்மறை மற்றும் எதிர்மறையாக இருக்கலாம்]

$x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 0, y_1 = 0, y_2 = 4, y_3 = k$ எனப் பிரதியிட,

$$\pm 4 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & k \end{vmatrix}$$

$$\pm 4 = \frac{1}{2}[-(-2)(k-4)]$$

[R_2 வழியாக விரிவுபடுத்த]

$$\pm 8 = 2(k - 4)$$

$$\pm 4 = k - 4$$

ஆதலால்

மற்றும்

$$\begin{array}{l|l} 4 = k - 4 & -4 = k - 4 \\ 4 + 4 = k & -4 + 4 = k \\ 8 = k & 0 = k \\ \therefore k = 8 & \therefore k = 0 \end{array}$$

$\therefore$ தேவையான மதிப்புகள் $k = 8, 0$.

எடுத்துக்காட்டு 5.17 : $(-2, -1), (7, 8), (-3, -2)$ ஆகியவை ஒரு கோடமைப்புள்ளிகள் எனக் காட்டுக.

தீர்வு : மூன்று புள்ளிகளும் ஒரே கோட்டில் இருந்தால் அவை ஒரு கோடமைப்புள்ளிகள்

$\therefore$ முக்கோணத்தின் பரப்பளவு = 0

ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பளவானது,

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

இங்கு $(x_1, y_1) = (-2, -1), (x_2, y_2) = (7, 8), (x_3, y_3) = (-3, -2)$ ஆதலால்,

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 7 & -3 \\ -1 & 8 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \frac{1}{2} [1(-14 + 24) - 1(4 - 3) + 1(-16 + 7)]$$

[R_1 வழியாக விரிவுபடுத்த]

$$= \frac{1}{2} [10 - 1 - 9] = 0$$

$$\Delta = 0$$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் கோடமைப்புள்ளிகள்.

பின்வருவனவற்றிக்கு முக்கோணத்தின் பரப்பளவை கொடுக்கப்பட்ட உச்சிப்புள்ளிகளில் காண்க.

a. $(1, 0), (6, 0), (4, 3)$ b. $(3, 8), (-4, 2), (5, 1)$

பின்வருவனவற்றில், k ன் மதிப்பைக் காண்க.

முக்கோணத்தின் பரப்பளவு 4 சதுர அலகுகள் மற்றும் $(k, 0), (4, 0), (0, 2)$ ஆகியவை உச்சிப்புள்ளிகள்.

முக்கோணத்தின் பரப்பளவு 35 சதுர அலகுகள் மற்றும் $(2, -6), (5, 4), (k, 4)$ ஆகியவை உச்சிப்புள்ளிகள்.

$A(a, b + c), B(b, c + a), C(a, a + b)$ ஆகியவை ஒரு கோடமைப்புள்ளிகள் எனக் காட்டுக

விடைகள்

1. a. 15/2

b. 61/2

2. i. 0, 8

ii. 12, -2

5.4.5 சிற்றணிக் கோவைகள் மற்றும் இணைக் காரணிகள்

5.4.5.1 சிற்றணிக் கோவைகள்

$A = [a_{ij}]$ என்பது n வரிசை உடைய ஒரு சதுர அணி மற்றும் $|A| = |a_{ij}|$ என்க.

அணி A இன் ஒரு உறுப்பின் சிற்றணிக் கோவையானது அந்த உறுப்பு இருக்கும் நிரல் மற்றும் நிரைகளை நீக்குவதன் மூலம் நிர்ணயிக்கப்படும் அணிக்கோவை என வரையறுக்கப்படுகிறது. அணியின் இணைக் காரணிகளைக் கணக்கிடுவதற்கு சிற்றணிக் கோவைகள் தேவை.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \text{ எனக் கருதுக.}$$

எனவே,

a_1, b_1 மற்றும் c_1 ஆகியவற்றின் சிற்றணிக் கோவைகள் முறையே: $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ இதேபோல்.

a_2, b_2 மற்றும் c_2 ஆகியவற்றின் சிற்றணிக் கோவைகள் முறையே: $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ இதேபோல்.

a_3, b_3 மற்றும் c_3 ஆகியவற்றின் சிற்றணிக் கோவைகள் முறையே: $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

5.4.5.2 இணைக் காரணிகள்

i^{th} நிரை மற்றும் j^{th} நிரலில் உள்ள ஒரு உறுப்பின் இணைக் காரணியானது, இணைக் காரணி $= (-1)^{i+j}$ சிற்றணிக் கோவை இணைக் காரணிகள், அணிக்கோவைகள் மற்றும் நேர்மாறு அணி ஆகிய இரண்டையும் கணக்கிடுவதற்கு பயனுள்ளதாக இருக்கும்.

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 5.18 : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ என்ற அணிக்கு, அனைத்து சிற்றணிக் கோவைகள் மற்றும்

இணைக் காரணிகளைக் காண்க.

தீர்வு : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டு உள்ளது.

இங்கு, $a_{11} = 1, a_{12} = 2, a_{13} = 3$

$a_{21} = 4, a_{22} = 3, a_{23} = 2$

$a_{31} = 7, a_{32} = 0, a_{33} = -1$

$$M_{11} = a_{11} \text{ யின் சிற்றணிக் கோவை} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

$$M_{12} = a_{12} \text{ யின் சிற்றணிக் கோவை} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 14 = -18$$

$$M_{13} = a_{13} \text{ யின் சிற்றணிக் கோவை} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 21 = -21$$

$$M_{21} = a_{21} \text{ யின் சிற்றணிக் கோவை} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 0 = -2$$

$$M_{22} = a_{22} \text{ யின் சிற்றணிக் கோவை} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 21 = -22$$

$$M_{23} = a_{23} \text{ யின் சிற்றணிக் கோவை} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 14 = -14$$

$$M_{31} = a_{31} \text{ யின் சிற்றணிக் கோவை} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 9 = -5$$

$$M_{32} = a_{32} \text{ யின் சிற்றணிக் கோவை} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 12 = -10$$

$$M_{33} = a_{33} \text{ யின் சிற்றணிக் கோவை} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 8 = -5$$

$$A_{12} = a_{11} \text{ ன் இணைக் காரணி} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 (-3) = -3$$

$$A_{12} = a_{12} \text{ ன் இணைக் காரணி} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 (-18) = 18$$

$$A_{13} = a_{13} \text{ ன் இணைக் காரணி} = (-1)^{1+3} M_{13} = (-1)^4 (-21) = -21$$

$$A_{21} = a_{21} \text{ ன் இணைக் காரணி} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)^3 (-2) = 2$$

$$A_{22} = a_{22} \text{ ன் இணைக் காரணி} = (-1)^{2+2} M_{22} = (-1)^4 (-22) = -22$$

$$A_{23} = a_{23} \text{ ன் இணைக் காரணி} = (-1)^{2+3} M_{23} = (-1)^5 (-14) = 14$$

$$A_{31} = a_{31} \text{ ன் இணைக் காரணி} = (-1)^{3+1} M_{31} = (-1)^4 (-5) = -5$$

$$A_{32} = a_{32} \text{ ன் இணைக் காரணி} = (-1)^{3+2} M_{32} = (-1)^5 (-10) = 10$$

$$A_{33} = a_{33} \text{ ன் இணைக் காரணி} = (-1)^{3+3} M_{33} = (-1)^6 (-5) = -5$$

5.4.6 ஒரு சதுர அணியின் சேர்ப்பு அணி

ஒரு சதுர அணி A யின் ஒவ்வொரு உறுப்புகளையும் | A | யின் இணைக் காரணியால் மாற்றி அதற்கு நிரை நிரல் மாற்று அணியைக் காண, அதுவே அச்சதுர அணியின் சேர்ப்பு அணி எனப்படும்.

| A | என்பது சதுர அணி A யின் அணிக்கோவை என்க.

எனவே,
$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}, \text{ எனில்,}$$

பின்னர்,

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

|A| யின் இணைக் காரணியால், பெறப்படும் அணியானது

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix}$$

இங்கு $A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (b_2c_3 - c_2b_3)$

$$A_2 = -\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} = -(b_1c_3 - c_1b_3)$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = (b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$B_1 = -\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -(a_2c_3 - c_2a_3)$$

$$B_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} = (a_1c_3 - c_1a_3)$$

$$B_3 = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = -(a_1c_2 - c_1a_2)$$

$$C_1 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - b_2a_3)$$

$$C_2 = -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} = -(a_1b_3 - b_1a_3)$$

$$C_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = (a_1b_2 - b_1a_2)$$

எனவே இணைக் காரணி அணியின் நிரை நிரல் மாற்று அணி, $\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{bmatrix}$ சதுர அணி A-யின்

சேர்ப்பு அணி என அழைக்கப்படும் மற்றும் இதை $\text{adj.}A$ என எழுதலாம்.

5.4.6.1 சேர்ப்பு அணியின் பண்பு

A என்ற அணியையும் அதன் சேர்ப்பு அணியையும் பெருக்க கிடைக்கும் அணி, A யின் அணிக்கோவையையும் அலகு அணியையும் பெருக்க கிடைக்கும் அணிக்கு சமம்.

$$\text{adj.}(A) \cdot A = A \cdot (\text{adj.} A) = |A| \cdot I$$

இங்கு I, என்பது அலகு அணி.

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 5.19 : கொடுக்கப்பட்டுள்ள $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ அணிக்கு சேர்ப்பு அணியைக் காண்க.

தீர்வு : $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டு உள்ளது.

இங்கு, $a_{11} = 2, a_{12} = 3, a_{21} = 3, a_{22} = 5$

a_{11}, a_{12}, a_{21} மற்றும் a_{22} ஆகியவற்றின் இணைக் காரணிகள், பின்வருமாறு

$$A_{11} = a_{11} \text{ ன் இணைக் காரணி} = (-1)^{1+1} 5 = 5$$

$$A_{12} = a_{12} \text{ ன் இணைக் காரணி} = (-1)^{1+2} (3) = -3$$

$$A_{21} = a_{21} \text{ ன் இணைக் காரணி} = (-1)^{2+1} (3) = -3$$

$$A_{22} = a_{22} \text{ ன் இணைக் காரணி} = (-1)^{2+2} (2) = 2$$

$$\text{எனவே, } adj.(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

எடுத்துக்காட்டு 5.20 : கொடுக்கப்பட்டுள்ள $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ அணிக்கு சேர்ப்பு அணியைக் காண்க.

தீர்வு : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டு உள்ளது.

இங்கு, $a_{11} = 1, a_{12} = 2, a_{13} = 4$

$a_{21} = 2, a_{22} = 3, a_{23} = 2$

$a_{31} = 3, a_{32} = 3, a_{33} = 4$

$a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}$ ஆகியவற்றின் இணைக் காரணிகள் முன்பு விவாதிக்கப்பட்டபடி

கணக்கிடப்படுகிறது. எனவே,

$$A_{11} = 6, A_{12} = -2, A_{13} = -3$$

$$A_{21} = 4, A_{22} = -8, A_{23} = 3$$

$$A_{31} = -8, A_{32} = 6, A_{33} = -1$$

$$\text{ஆகவே, } adj.(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T$$

$$\Rightarrow adj.(A) = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -8 \\ -2 & -8 & 6 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

5.4.6.2 ஒரு அணியின் நேர்மாறு

A மற்றும் B ஆகியவை ஒரே வரிசை உடைய இரு அணிகள் மற்றும் $AB = BA = I$, என்க. அதாவது $B = A^{-1}$ மற்றும் 'A', யின் நேர்மாறு B.

குறிப்புரைகள் :

1. 'A' என்ற சதுர அணிக்கு அதன் நேர்மாறு அணியை காண, அணி 'A' பூஜ்ஜியமற்ற கோவை அணியாக இருக்க வேண்டும். அதாவது $|A| \neq 0$.
2. நேர்மாறு அணியைக் கொடுக்கக்கூடிய ஓர் சதுர அணி நேர்மாறுடைய அணி எனப்படும்.
3. ஒரு சதுர அணிக்கு நேர்மாறு இருப்பின் அது ஒருமைத்தன்மை வாய்ந்தாகும்.

'A' சேர்ப்பு அணியைப் பயன்படுத்தி, அதன் நேர்மாறு அணியை கண்டுப்பிடிக்கலாம்.

$$A^{-1} = \frac{adj.(A)}{|A|} = \frac{1}{|A|} (Adj.A)$$

(முன்னர் விவாதிக்கப்பட்ட சேர்ப்பு அணியின் பண்பின் உதவியுடன் மாணவர்கள் இந்த முடிவைக் காணலாம்.)

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 5.21: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ ன் நேர்மாறு அணியைக் காண்க.

தீர்வு : $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டு உள்ளது.

$$\Rightarrow |A| = 10 - 9 = 1 \neq 0$$

$|A| \neq 0$, ஆகையால், A ஒரு பூஜ்ஜியமற்ற கோவை அணி. எனவே A^{-1} இருக்கும் எனவே, நாம் பின்வருமாறு இணைக் காரணிகளைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

$$A_{11} = a_{11} \text{ ன் இணைக் காரணி} = 5$$

$$A_{12} = a_{12} \text{ ன் இணைக் காரணி} = -3$$

$$A_{21} = a_{21} \text{ ன் இணைக் காரணி} = -3$$

$$A_{22} = a_{22} \text{ ன் இணைக் காரணி} = 2$$

$$\Rightarrow Adj.(A) = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{எனவே, } A^{-1} = \frac{Adj.(A)}{|A|} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.22 : $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ன் நேர்மாறு அணியைக் காண்க மற்றும் மேலும்

$A A^{-1} = A^{-1} A = I$ என்பதைச் சரிபார்.

தீர்வு : $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டு உள்ளது.

ஆதலால் நாம் பெறுவது, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

$|A| \neq 0$, ஆகையால், A ஒரு பூஜ்ஜியமற்ற கோவை அணி. எனவே A^{-1} இருக்கும்,

A^{-1} யை கண்டுபிடிக்க, நாம் பின்வரும் இணைக் காரணிகளைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

$$A_{11} = -9, \quad A_{12} = -8, \quad A_{13} = -2$$

$$A_{21} = 8, \quad A_{22} = 7, \quad A_{23} = 2$$

$$A_{31} = -5, \quad A_{32} = -4, \quad A_{33} = -1$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad adj.(A) &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -9 & 8 & -5 \\ -8 & 7 & -4 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

எனவே, $A^{-1} = \frac{adj.(A)}{|A|}$

$$= \begin{bmatrix} -9 & 8 & -5 \\ -8 & 7 & -4 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

சரிபார்ப்புக்காக, $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ (மாணவர்கள் தாங்களாகவே முயற்சி செய்யலாம்.)

பயிற்சி 5.4

சிற்றணிக் கோவை, இணைக் காரணி, சேர்ப்பு அணி மற்றும் சேர்ப்பு அணியை பயன்படுத்தி அணியின் நேர்மாறு ஆகியவற்றை அடிப்படையாகக் கொண்ட கேள்விகள்.

1. கொடுக்கப்பட்ட அணிக்கோவை, $A = \begin{bmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{bmatrix}$ யின் அனைத்து சிற்றணிக் கோவை மற்றும்

இணைக் காரணிகளைக் காண்க. மேலும், கொடுக்கப்பட்ட அணிக்கோவையைத் தீர்க்க.

2. கொடுக்கப்பட்ட அணிகளின் சேர்ப்பு அணியைக் காண்க.

a. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$

3. கொடுக்கப்பட்ட அணி $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ யின் சேர்ப்பு அணியைக் காண்க.

4. பின்வரும் அணிகளின் நேர்மாறு அணிகளைக் காண்க.

a. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

5. கொடுக்கப்பட்ட அணி $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ யின் நேர்மாறு அணியைக் காண்க.

6. $D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$ மற்றும் d_1, d_2, d_3 மற்றும் d_4 எதுவும் பூஜ்ஜியமாக இல்லை எனில், D^{-1} -யைக் காண்க.

விடைகள்

1. $M_{11} = (ab^2 - ac^2), \quad M_{12} = (ab - ac), \quad M_{13} = (c - b)$

$M_{21} = (a^2b - bc^2), \quad M_{22} = (ab - bc), \quad M_{23} = (c - a)$

$M_{31} = (ca^2 - cb^2), \quad M_{32} = (ca - bc), \quad M_{33} = (b - a)$

$A_{11} = (ab^2 - ac^2), \quad A_{12} = (ac - ab), \quad A_{13} = (c - b)$

$A_{21} = (bc^2 - a^2b), \quad A_{22} = (ab - bc), \quad A_{23} = (a - c)$

$A_{31} = (ca^2 - cb^2), \quad A_{32} = (bc - ca), \quad A_{33} = (b - a), \quad |A| = (a - b)(b - c)(c - a)$

2. a. $\begin{bmatrix} 15 & 6 & -15 \\ 0 & -3 & 0 \\ -10 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} -7 & -3 & 26 \\ -3 & -1 & 11 \\ 5 & 2 & -19 \end{bmatrix}$

4. a. $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 5 & 1 & -15 \\ 3 & 1 & -9 \\ -3 & -1 & 11 \end{bmatrix}$

b. $\frac{1}{11} \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

5. $\frac{1}{15} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -20 \\ 2 & 3 & -15 \end{bmatrix}$

6.
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{d_4} \end{bmatrix}$$

சுவாரஸ்யமான உண்மைகள்

- ♦ பல்வேறு கட்டிடங்களின் அமைப்பை அணிகளின் உதவியுடன் மாற்றலாம் அல்லது வடிவமைக்கலாம். உதாரணத்திற்கு "புர்ஜ் கலீஃபா" வை நாம் எடுத்துக் கொள்ளலாம். அணிகளைப் பயன்படுத்தி மிகவும் பொதுவானதாக இல்லாத வடிவமைப்பு செய்யப்பட்டது.
- ♦ அணிகளைப் பயன்படுத்தி சில சிறப்பாக வடிவமைக்கப்பட்ட தொடர்முறை சார்புகளின் தொகுப்பை மிகவும் வேடிக்கையாக வரையலாம் மற்றும் கணக்கிடலாம்.
- ♦ தகவல் தொழில்நுட்பம் மற்றும் தகவல் பாதுகாப்பு (குறிப்பாக குறியாக்கம்) களத்தில், பல IT நிறுவனங்களின் தேடல் வினவல்கள், பயனர் தகவலை கண்காணிக்க மற்றும் தரவுத்தளங்களை நிர்வகிக்க இந்த கட்டமைப்புகள் தரவு கட்டமைப்புகளாக பயன்படுத்துகின்றன.
- ♦ கார் பந்தய விளையாட்டை விளையாடும்போது அணி சுழல்வது போன்ற பல இடங்களிலும் இதைப் பயன்படுத்தலாம்; ஃபேஸ் புக், ட்விட்டர், இன்ஸ்டாகிராம் ஆகியவற்றில் நெட்வொர்க்குகளின் தொகுப்பை உருவாக்குதல்; அல்லது வோல் ஸ்ட்ரீட்டில் வர்த்தகம் செய்யும் போது கூட.



Basic Matrix Concepts



Introduction to Matrix Algebra - I



Matrix Analysis with Applications



Determinant of a Matrix



Elementary Row Operations

அன்றாட வாழ்வில் பயன்பாடுகள்

- ♦ உங்கள் தனிப்பட்ட கணினியில் அடோப் ஃபோட்டோஷாப் போன்ற பல்வேறு கிராஃபிக் மென்பொருள்கள் படங்களை வழங்க நேரியல் மாற்றங்களை செயலாக்க அணிகள் பயன்படுத்துகின்றன.
- ♦ ஒரு சதுர அணி ஒரு வடிவியல் பொருளின் நேரியல் மாற்றத்தைக் குறிக்கும், எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு அணி ஒரு பொருளை x அல்லது y -அச்சில் ஒரு கார்ட்சியன் x - y தளத்தில் பிரதிபலிக்கிறது.
- ♦ இது கேமிங் தொழில் மற்றும் பட செயலாக்க களத்தில் அதன் பயன்பாட்டைக் கொண்டுள்ளது, அங்கு குளங்கள், ஆறுகள் மற்றும் பிற தலைகீழ் படங்களில் பிரதிபலிப்புகள் காணப்படுகின்றன.
- ♦ கணினி கிராபிக்ஸில் அணிகள் முக்கிய பங்கு வகிக்கின்றன, மக்கள் விரும்பும் எந்தப் பொருளின் மீது வேண்டுமானாலும் அணியின் உருமாற்றத்தை பயன்படுத்தலாம். எடுத்துக்காட்டாக கார்ட்டூன் கதாபாத்திரங்கள்.
- ♦ கணக்கெடுப்புகள், மக்கள் தொகை போன்ற உண்மையான உலக தரவுகளின் பிரதிநிதித்துவம், குழந்தை இறப்பு விகிதம் ஆகியவை அவற்றின் மூலம் செய்யப்படுவதிலும் அவை குறிப்பிடத்தக்க பங்கைக் கொண்டுள்ளன.
- ♦ பொருளாதாரத்தில் கூட, சார்பு மாறிகளின் முன்கணிப்பு மாதிரியை உருவாக்குதல், பங்குகளை பகுப்பாய்வு செய்தல், வணிகப் போக்குகளைப் படிப்பது ஆகியவற்றை அணிகள் மூலம் செய்யலாம்.
- ♦ இயற்பியலில், பேட்டரி சக்தி வெளியீடுகளை கணக்கிடும் போது, கிர்ஹாஃப் சட்டத்தை தீர்க்கும் போது, மற்றும் குவாண்டம் இயற்பியல் துறையில், அணிகள் முக்கிய பங்கு வகிக்கிறது.
- ♦ மேலும் புவியியலில், நில அதிர்வு ஆய்வுகள் செய்யும் போது அவை முக்கிய பங்கு வகிக்கின்றன.
- ♦ ரோபாட்டிக்ஸில், ரோபோடிக் அசைவுகள் அணியின் அடிப்படையில் வரையறுக்கப்படுகின்றன.

5.5 நேர்மாறு அணியைக் கண்டுபிடிப்பதற்கான காஸ்சியன் நீக்கல் முறை

A என்பது வரிசை மூன்று உள்ள பூச்சியமற்ற கோவை அணியின் சதுர அணியாக இருக்கட்டும். $AX = I$ என்ற சமன்பாட்டை X பூர்த்தி செய்யுமெனில் X ஆனது A ன் நேர்மாறு அணியாகும். இங்கு I என்பது வரிசை மூன்றின் அலகு அணி. இப்போது, நேர்மாறு அணி X இன் கூறுகளை நாம் கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

$AX = I$ என எடுத்துக் கொள்வோம்

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

சமன்பாடு $AX = I$ என்பது பின்வருமாறு மாறுகிறது

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots(1)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots(2)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \dots(3)$$

சமன்பாடுகள் (1)-லிருந்து (3) வரை உள்ள தொகுப்புகள் (1), (2) மற்றும் (3) ஐ காஸ்சியன்நீக்கல் செயல்முறை மூலம் தீர்க்க முடியும். ஒவ்வொரு தொகுப்பின் சமன்பாடுகளின் தீர்வு தொகுப்பு, (1), (2) மற்றும் (3) நேர்மாறு அணி X இன் தொடர்புடைய நிரலாக இருக்கும்.

கெழு அணி அனைத்து சமன்பாடுகளிலும் ஒரே மாதிரியாக இருப்பதால், ஒரு குறிப்பிட்ட அமைப்பை உருவாக்குவதன் மூலம் அனைத்தையும் ஒரே நேரத்தில் தீர்க்க முடியும்.

$$[A/I] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 5.23 : காஸ்சியன் நீக்கல் முறையைப் பயன்படுத்தி $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ ன் நேர்மாறு அணியைக் காண்க

தீர்வு : விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி,

$$[A/I] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \text{ உறுப்பு } a_{11} = 0 \text{ என்பதால், நாம் முதல் மற்றும் இரண்டாவது நிரையை}$$

மாற்ற கிடைக்கும் குறைக்கப்பட்ட தொகுப்பானது,

$$[A/I] \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1, \quad [A/I] \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -4 & 0 & -3 & 1 \end{array} \right)$$

$$R_3 \rightarrow R_3 + 7R_2 \quad [A/I] \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 7 & -3 & 1 \end{array} \right)$$

$$\therefore \begin{cases} x_{11} + 2x_{21} = 0 \\ x_{21} + x_{31} = 1 \\ 3x_{31} = 7 \end{cases} \Rightarrow x_{11} = \frac{7}{3}, x_{21} = -\frac{4}{3}, x_{31} = \frac{8}{3}$$

$$\begin{cases} x_{12} + 2x_{22} = 1 \\ x_{22} + x_{32} = 0 \\ 3x_{32} = -3 \end{cases} \Rightarrow x_{32} = -1, x_{22} = 1, x_{12} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} x_{13} + 2x_{23} = 0 \\ x_{23} + x_{33} = 0 \\ 3x_{33} = 1 \end{cases} \Rightarrow x_{33} = \frac{1}{3}, x_{23} = -\frac{1}{3}, x_{13} = \frac{2}{3}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & -1 & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{7}{3} & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.24 : காஸ்ஸியன் நீக்கல் முறையைப் பயன்படுத்தி $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ ன் நேர்மாறு அணியைக் காண்க

தீர்வு : விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி

$$[A/I] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -15 & 6 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$R_2 \rightarrow R_2 + 5R_1, R_3 \rightarrow R_3 - \frac{5}{3}R_1, [A/I] \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 & -5/3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$R_3 \rightarrow R_3 + \frac{1}{3}R_2, [A/I] \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1 \end{array} \right)$$

இப்போது தொகுப்பு மூன்று தொகுப்புகளுக்கு சமம்.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \end{array} \right)$$

மற்றும் $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1 \end{array} \right)$

$$\therefore \begin{cases} 3x_{11} - x_{21} + x_{31} = 1 \\ x_{21} = 5 \\ \frac{1}{3}x_{31} = 0 \end{cases} \Rightarrow x_{31} = 0, x_{21} = 5, x_{11} = 2$$

$$\begin{cases} 3x_{12} - x_{22} + x_{32} = 0 \\ x_{22} = 1 \\ \frac{1}{3}x_{32} = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow x_{32} = 1, x_{22} = 1, x_{12} = 0$$

$$\begin{cases} 3x_{13} - x_{23} + x_{33} = 0 \\ x_{23} = 0 \\ \frac{1}{3}x_{33} = 1 \end{cases} \Rightarrow x_{33} = 3, x_{23} = 0, x_{13} = -1$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

பயற்சி 5.5

1. காஸ்யியன் நீக்கல் முறையைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் அணிகளுக்கு நேர்மாறு அணிகளைக் காண்க :

i. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

ii. $\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

iii. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ -3 & 1 & 7 \\ 7 & -5 & -11 \end{pmatrix}$

விடைகள்

1. (i). $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

ii. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

iii. $\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

5.6 ஒரு அணியின் நேர்மாறைக் கண்டுபிடிப்பதற்கான காஸ்-ஜோர்டான் முறை

A என்பது வரிசை மூன்று உள்ள சதுர அணி என்க மற்றும் $|A| \neq 0$. $AX = I$ என்ற சமன்பாட்டை X பூர்த்தி செய்யுமெனில் X ஆனது A ன் நேர்மாறு அணியாகும். இங்கு I என்பது வரிசை மூன்றின் அலகு அணி. இப்போது, நேர்மாறு அணி X இன் கூறுகளை நாம் கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

$AX = I$ என எடுத்துக் கொள்வோம்

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

இந்த சமன்பாடு மூன்று சமன்பாடுகளுக்கு சமம், இது மூன்று சமன்பாடுகளின் அமைப்புகளுக்கு சமம். காஸ்-ஜோர்டான் முறை மூலம் ஒவ்வொரு தொகுப்பையும் தீர்க்கவும். ஒவ்வொரு அமைப்பின் தீர்வு தொகுப்பும் நேர்மாறு அணியின் தொடர்புடைய நிரலாக இருக்கும். இங்கேயும் அனைத்து அமைப்புகளையும் ஒரே நேரத்தில் விரிவுபடுத்தப்பட்ட அமைப்பை உருவாக்குவதன் மூலம் தீர்க்கலாம்.

$$[A/I] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுக்கள்

எடுத்துக்காட்டு 5.25 : காஸ் ஜோர்டான் முறையைப் பயன்படுத்தி $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ன் நேர்மாறு அணியைக் காண்க

தீர்வு : விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி

$$[A/B] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$R_1 \rightarrow \frac{R_1}{3},$$

$$[A/B] \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 4/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1$$

$$[A/B] \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 4/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4/3 & -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$R_2 \rightarrow (-1)R_2$$

$$[A/B] \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 4/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4/3 & 2/3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$R_2 \rightarrow R_1 + R_2 \text{ அல்லது } R_3 \rightarrow R_3 + R_2,$$

$$[A/B] \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4/3 & 2/3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$R_3 \rightarrow (-3)R_3,$$

$$[A/B] \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4/3 & 2/3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -3 \end{array} \right)$$

$$R_2 \rightarrow R_2 + \frac{4}{3}R_3$$

$$[A/B] \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -3 \end{array} \right)$$

$$\therefore A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -3 \end{array} \right)$$

பயிற்சி 5.6

காஸ் ஜோர்டான் முறையைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் அணிகளுக்கு நேர்மாறு அணிகளைக் காண்க :

$$\text{i. } \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ii. } \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{iii. } \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ -3 & 1 & 7 \\ 7 & -5 & -11 \end{pmatrix} \quad \text{iv. } \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{v. } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

விடைகள்

$$\text{i. } \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ii. } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{iii. } \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{iv. } \begin{pmatrix} -4/3 & 2 & 7/3 \\ 5/3 & -2 & -8/3 \\ 7/3 & -3 & -10/3 \end{pmatrix} \quad \text{v. } \begin{pmatrix} 8/3 & -1 & 2/3 \\ -4/3 & 1 & -1/3 \\ 7/3 & -1 & 1/3 \end{pmatrix}$$

சுவாரஸ்யமான உண்மைகள்

- ♦ குறிப்பிட்ட மீன்களின் சராசரி கலோரி மதிப்பை நிர்ணயிப்பது, காடுகளின் வளர்ச்சி மற்றும் அதன் வகைகள் போன்றவற்றில் இது ஒரு தனித்துவமான பயன்பாட்டைக் கொண்டுள்ளது, எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு காட்டில் 5 வகையான மரங்கள் இருந்தால், அவைகளின் வயதை அளவிட ஒரு நேரியல் சமன்பாட்டை நாம் உருவாக்க முடியும். இதேபோல், கடல் வாழ் உயிரினங்களின் கார்போஹைட்ரேட்டுகளை அவைகளின் உணவின் அடிப்படையில் கண்டறிவதற்கு நாம் நேரியல் சமன்பாடுகளை உருவாக்கலாம், மேலும் இதுபோன்ற பல உதாரணங்கள் உள்ளன.
- ♦ நிஜ உலகில், காஸ் ஜோர்டான் முறையைப் பயன்படுத்தி போக்குவரத்து நெரிசல்களைச் சமாளிக்க டிராஃபிக் கண்ட்ரோல் மேனேஜ்மென்ட்டில் இதைப் பயன்படுத்தலாம், நியூட்ரோசோபிக் நேரியல் சமன்பாடுகளை உருவாக்குவதன் மூலம் ஒரு நேர்மாறு அணியைக் கண்டுபிடிக்கும் நுட்பத்தை உள்ளடக்கியது (இது உண்மையற்ற தரவுத்தொகுப்பைச் சுற்றி சுழன்று தீர்மானிக்கும் மற்றும் /அல்லது உறுதியற்ற தகவல்) மற்றும் MATLAB நிரலாக்கத்தைப் பயன்படுத்துதல்.

அன்றாட வாழ்வில் பயன்பாடுகள்

- ♦ அறியப்படாத அளவுகளின் மதிப்புகளைக் கண்டறிதல்; அது வயது, செலவு அல்லது வேறு எந்த விஷயமாக இருக்கட்டும்.
- ♦ விமான நிலையங்களில், விமானங்கள், பயணிகள், முதலியன பற்றிய தகவல்களைக் கணக்கிட மற்றும் குறியாக்கம் செய்ய உயர்நிலை கணினிகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.
- ♦ சுற்று பகுப்பாய்வில், காஸ் ஜோர்டான் செயல்முறை கண்ணி-இணைக்கப்பட்ட செயலிகளில் பயன்படுத்தப்படுகிறது.
- ♦ இது அல்காரிதங்களை திட்டமிடுவதில் பயன்படுத்தப்படுகிறது.
- ♦ காசியன் நீக்கல் முறையானது கைரேகை பட விரிவாக்கத்தில் பயன்படுகிறது.

5.7 சமச்சீர் மற்றும் மெய் சமச்சீர் அணிகளுடன் தொடர்புடைய தேற்றங்கள்

அத்தியாயம் 3-ல், நாம் சமச்சீர் மற்றும் மெய் சமச்சீர் அணிகளின் வரையறை ஏற்கனவே விவாதித்தோம். அவற்றை அடிப்படையாகக் கொண்ட சில தேற்றங்களை இங்கே விவாதிப்போம்.

தேற்றம் 1 : A என்ற அணிக்கு தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனைகள். A என்பது சமச்சீர் அணி $A = A'$.

நிரூபணம் : அவசியமான நிபந்தனை :

$A = [a_{ij}]$ என்பது நிரை சதுர சமச்சீர் அணி என்க.

இதன் அர்த்தம் $a_{ij} = a_{ji}$ மற்றும் A' . அதாவது நிரை நிரல் மாற்று அணி A என்பது n-நிரை சதுர சமச்சீர் அணி ஆகும்.

தற்பொழுது A' -ன் உறுப்பு (i, j) ஆகும்.

$$= A\text{-ன் உறுப்பு } (j, i)$$

A என்பது சமச்சீர் அணி $\Rightarrow a_{ij} = a_{ji} \forall i, j$

$$= A\text{-ன் உறுப்பு } (i, j)$$

$$\therefore A = A'$$

போதுமான நிபந்தனை :

இங்கு $A = A'$

நிரூபிக்க : A என்பது சமச்சீர் அணி

$A = A'$, A என்பது ஒரு n- வரிசைப்படுத்தப்பட்ட சதுர அணியாக இருக்க வேண்டும்.

$$A\text{-ன் உறுப்பு } (i, j) = A'\text{-ன் உறுப்பு } (i, j)$$

$$[\therefore A = A']$$

$$= A'\text{-ன் உறுப்பு } (j, i)$$

$$\therefore A\text{ என்பது சமச்சீர் அணி}$$

தேற்றம் 2 : A என்ற அணிக்கு தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனைகள். A என்பது மெய் சமச்சீர் அணி $A' = -A$.

நிரூபணம் : அவசியமான நிபந்தனை:

$A = [a_{ij}]$ என்பது நிரை சதுர மெய் சமச்சீர் அணி என்க.

$$a_{ij} = -a_{ji}$$

இதன் அர்த்தம் A என்பது n -நிரை சதுர அணி A' , $-A$ என்பது n -நிரை சதுர அணி.

தற்பொழுது A' -ன் உறுப்பு $(i, j) = -A$ -ன் உறுப்பு (j, i) .

$$\begin{aligned} \therefore A \text{ என்பது எதிர் சமச்சீர் அணி} &\Rightarrow a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall i, j \\ &= -A \text{ -ன் உறுப்பு } (j, i) \end{aligned}$$

$$\therefore A' = -A$$

போதுமான நிபந்தனை

இங்கு $A' = -A$

நிரூபிக்க : A என்பது மெய் சமச்சீர் அணி

$A' = -A$, A என்பது சதுர அணியாக இருக்க வேண்டும்.

$$\begin{aligned} A \text{ -ன் உறுப்பு } (i, j) &= A' \text{ -ன் எதிர்மறை உறுப்பு } (i, j) & [\because A = A'] \\ &= A' \text{ -ன் எதிர்மறை உறுப்பு } (j, i) \end{aligned}$$

$\therefore A$ என்பது மெய் சமச்சீர் அணி.

தேற்றம் 3 : A என்பது மெய் சமச்சீர் அணி மற்றும் X என்பது நிரல் அணி, பின்னர் $X'AX$ ஒரு பூஜ்ய அணி என்று காட்டுக.

நிரூபணம் : A என்பது மெய் சமச்சீர் அணி என்பதால் $A' = -A$

A என்பது வரிசை n உடைய ஒரு சதுர அணி என்க மற்றும் X என்பது வரிசை $n \times 1$ உடைய ஒரு நிரல் அணி. தற்பொழுது X' என்பது வரிசை $1 \times n$ உடைய ஒரு நிரை அணி. எனவே $X'AX$, என்பது வரிசை 1×1 உடைய ஒரு நிரல் அணி.

$$X'AX = B \text{ என்க} \quad \dots(1)$$

B -ன் வரிசை 1×1 எனில் $B' = B$ மற்றும் B என்பது சமச்சீர்.

$$(X'AX)' = B'$$

$$X' A' (X')' = B'$$

$$\Rightarrow X' A' X^n = B'$$

$$\text{ஆனால்} \quad X^n = X, A' = -A, B' = B$$

$$X' (-A) X = B$$

$$- (X'AX) = B$$

$$- B = B$$

[சமன்பாடு (1)-ல் இருந்து]

$$\Rightarrow 2B = 0$$

$$\Rightarrow B = 0$$

$\therefore X'AX$ என்பது ஒரு பூஜ்ய அணி.

தேற்றம் 4 : ஒவ்வொரு சதுர அணியும் தனித்தனியாக இரண்டு அணியின் கூட்டுத்தொகையாக வெளிப்படுத்த முடியும் என்பதைக் காட்டுங்கள், ஒன்று சமச்சீர் அணி மற்றொன்று மெய் சமச்சீர் அணி.

நிரூபணம் : A என்பது சதுர அணி என்க.

$$A = \frac{1}{2}(A + A') + \frac{1}{2}(A - A')$$

$$= P + Q$$

$$P = \frac{1}{2}(A + A'), Q = \frac{1}{2}(A - A')$$

இப்போது நாம் P என்பது ஒரு சமச்சீர் அணி மற்றும் Q என்பது ஒரு மெய் -சமச்சீர் அணி என்பதைக் காட்டுகிறது.

$$P' = \frac{1}{2}(A + A')' = \frac{1}{2}[(A') + (A'')]$$

$$= \frac{1}{2}[A' + A]$$

∴ P என்பது சமச்சீர் அணி

$$Q' = \frac{1}{2}(A - A')'$$

$$= \frac{1}{2}[(A') - (A'')]$$

$$= \frac{1}{2}[A' - A] = -\frac{1}{2}(A - A')$$

$$= -Q$$

∴ Q என்பது மெய் -சமச்சீர் அணி

எனவே, சமச்சீர் மற்றும் மெய் -சமச்சீர் அணியின் கூட்டுத்தொகையாக 'A' ஐ வெளிப்படுத்தலாம்.

தனித்துவத்தை நிரூபிக்க

$A = R + S$ என்க, R என்பது சமச்சீராகவும், S என்பது மெய் சமச்சீராகவும் இருப்பது A யின் மற்றொரு பிரதிநிதித்துவமாகும்.

$$A' = (R + S)' = R' + S'$$

$$= R - S$$

$$[\because R' = R, S' = -S]$$

$$\frac{1}{2}(A + A') = \frac{1}{2}[(R + S) + (R - S)] = R$$

$$\therefore R = P$$

$$\text{மற்றும் } \frac{1}{2}(A - A') = \frac{1}{2}[(R + S) - (R - S)] = S$$

$$\therefore S = Q$$

எனவே, A-ன் பிரதிநிதித்துவம் $A = P + Q$ தனித்துவமானது.

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 5.26 : $A = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, பின்னர் அதை $A = B + C$ என்று பிரதிநிதித்துவப்படுத்துங்கள்,

இங்கு B சமச்சீர் மற்றும் C என்பது மெய் -சமச்சீர் ஆகும்.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட அணி $A = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

நிரை நிரல் இடமாற்றம் செய்யும்போது,

$$A' = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 7 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

A மற்றும் A' யை கூட்டுக,

$$A + A' = \begin{bmatrix} -2 & 9 & 6 \\ 9 & 6 & 4 \\ 6 & 4 & 10 \end{bmatrix} \quad \dots(1)$$

A மற்றும் A' யை கழிக்க,

$$A - A' = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -4 \\ -5 & 0 & 4 \\ 4 & -4 & 0 \end{bmatrix} \quad \dots(2)$$

சமன்பாடு (1) மற்றும் (2) யை கூட்டுக,

$$\begin{aligned} 2A &= \begin{bmatrix} -2 & 9 & 6 \\ 9 & 6 & 4 \\ 6 & 4 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 5 & -4 \\ -5 & 0 & 4 \\ 4 & -4 & 0 \end{bmatrix} \\ A &= \begin{bmatrix} -1 & 9/2 & 3 \\ 9/2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 5/2 & -2 \\ -5/2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \text{சமச்சீர்} + \text{மெய் -சமச்சீர்} \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.27 : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \\ 5 & 9 & 3 \end{bmatrix}$ சமச்சீர் மற்றும் மெய் -சமச்சீர் அணியின் கூட்டத்தொகையை கணிக்கிடுக.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட அணி $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \\ 5 & 9 & 3 \end{bmatrix}$ என்க.

நிரை நிரல் இடமாற்றம் செய்யும்போது,

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

A மற்றும் A' யை கூட்டுக,

$$A + A' = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 5 & 14 & 10 \\ 5 & 10 & 6 \end{bmatrix} \quad \dots(1)$$

A மற்றும் A' யை கழிக்க,

$$A - A' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & -8 \\ 5 & 8 & 0 \end{bmatrix} \quad \dots(2)$$

சமன்பாடு (1) மற்றும் (2) யை கூட்டுக,

$$2A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 5 & 14 & 10 \\ 5 & 10 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & -8 \\ 5 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5/2 & 5/2 \\ 5/2 & 7 & 5 \\ 5/2 & 5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & -5/2 \\ 1/2 & 0 & -4 \\ 5/2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \text{சமச்சீர்} + \text{மெய்} - \text{சமச்சீர்}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.28 : 'A' என்பது ஒற்றைப்படை அல்லது இரட்டைப்படை வரிசை உடைய மெய் - சமச்சீர் அணி என்றால், ஒரு அணியை உதாரணம் எடுத்து 'A'-இன் அணிக்கோவை எப்போதும் '0' அல்லது மெய் எண் என்பதை நிரூபிக்கவும்:

தீர்வு : (1) அணி $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ என்க. 'A' என்பது ஒற்றைப்படை வரிசை உடைய எதிர்-சமச்சீர் அணி ஆகும்.

$$|A| = 0(0 + 16) - 2(0 + 12) + 3(8 + 0)$$

$$= 0 - 24 + 24 = 0$$

(2) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ என்றால் 'A' என்பது இரட்டைப்படை வரிசை உடைய எதிர்-சமச்சீர் அணி ஆகும்.

$$|A| = 0 + 1 = 1, 'A' \text{ என்பது மெய் எண் ஆகும்}$$

5.8 செங்குத்து அணி

ஒரு மெய் சதுர அணி A என்பது செங்குத்து என்று அழைக்கப்படுகிறது என்றால் $AA' = A'A = I$

5.8.1 செங்குத்து அணியின் பண்புகள்

A என்பது செங்குத்து அணி என்றால் $|A| = \pm 1$.

நிரூபணம் : நிரைகள் நிரல்களை மாற்றி அமைப்பத பிறகு அதன் அணிக்கோவையில் எந்த ஒரு மாற்றமும் நிகழவில்லை எனில் $A' = |A|$.

மேலும் வரையறை மூலம், A என்பது செங்குத்து எனில், $AA' = I$

$$|AA'| = |I|$$

$$|A||A'| = |I|$$

$$|A| \cdot |A| = 1$$

$$|A|^2 = 1$$

$$|A| = \pm 1$$

குறிப்புரை : A என்பது செங்குத்து சதுர அணி அதன் வரிசை n, $|A| = \pm 1$, எனில் அதன் தரம் $A = n$.

b. A என்பது செங்குத்து அணி என்றால் A^{-1} உள்ளது மற்றும் A' க்கு சமம்.

நிரூபணம் : A மற்றும் B இரண்டு அணிகளாக இருந்தால் $AB = BA = I$, B என்பது A-ன் நேர்மாறு மற்றும் A நேர்மாராக இருக்க தேவையான அவசியமான மற்றும் போதுமான நிபந்தனைகள் $|A| \neq 0$

(a) இல் பார்த்தபடி, A என்பது செங்குத்து அணி என்றால், பிறகு $|A| = \pm 1 \neq 0$,

$\therefore A^{-1}$ உள்ளது

மேலும் $AA' = I$,

$\therefore A^{-1}(AA') = A^{-1} \cdot I$

$$(A^{-1}A)A' = A^{-1}$$

$$IA' = A^{-1}$$

$$A' = A^{-1}$$

c. A மற்றும் B ஆகிய இரண்டு செங்குத்து சதுர அணிகளின் வரிசை n என்றால், பிறகு AB மற்றும் BA ஆகியவை செங்குத்து ஆகும்.

நிரூபணம் : A மற்றும் B ஆகிய இரண்டு சதுர அணிகளின் வரிசை n. AB மற்றும் BA ஆகியன வரையறுக்கப்பட்டது மற்றும் அந்த சதுர அணிகளின் வரிசை n.

A மற்றும் B ஆகியன செங்குத்து எனில்

$$|A| \neq 0, |B| \neq 0 (= \pm 1) \text{ மற்றும் } A^{-1}, B^{-1} \text{ உள்ளது}$$

மேலும் $|AB| = |A||B| \neq 0$

$\therefore (AB)^{-1}$ உள்ளது

$$(AB)' = B'A'$$

மேலும் $(AB)'(AB) = B'A'(AB)$

$$= B'(A'A)B$$

$$= B'IB = B'B = I$$

$$[\because A'A = I]$$

எனவே $(AB)'$, AB-ன் நேர்மாறு AB

$\therefore AB$ என்பது செங்குத்து

குறிப்பு : A என்பது செங்குத்து அணி எனில் $|A| = \pm 1$

$|A| = 1$ என்றால், பின்னர் A சரியான செங்குத்து அணி என்று அழைக்கப்படுகிறது.

குறிப்புரை : எண் நேரியல் இயற்கணிதத்தில் செங்குத்து அணிகள் பல பண்புகளை எண்கணித பகுப்பாய்விற்கு பயன்படுத்தி கொள்கிறது. உதாரணமாக, ஒரு நெறிஅலகு செங்குத்தின் அடுக்களத்தை ஒரு உட் பெருக்கல் வெளி கணக்கிடும் அல்லது அடுக்களத்தில் ஒரு செங்குத்து மாற்றம்; இரண்டும் செங்குத்து அணிகளின் வடிவத்தை எடுக்கின்றன.

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 5.29 : $A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ செங்குத்து என்பதைச் சரிபார்க்கவும்.

தீர்வு : இங்கு $A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

$\therefore A' = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

மற்றும் $AA' = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

$$AA' = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

எனவே A என்பது செங்குத்து அணி ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.30 : $\begin{bmatrix} 0 & 2\beta & \gamma \\ \alpha & \beta & -\gamma \\ \alpha & -\beta & \gamma \end{bmatrix}$ செங்குத்து அணி எனில் α, β, γ இன் மதிப்புகளைத் தீர்மானிக்கவும்.

தீர்வு : $A = \begin{bmatrix} 0 & 2\beta & \gamma \\ \alpha & \beta & -\gamma \\ \alpha & -\beta & \gamma \end{bmatrix}$ என்க.

A நிரை நிரல் மாற்றும்போது, நாம் பெறுவது,

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \alpha \\ 2\beta & \beta & -\beta \\ \gamma & -\gamma & \gamma \end{bmatrix}$$

A என்பது செங்குத்து அணி எனில் $AA' = I$

$$AA' = \begin{bmatrix} 0 & 2\beta & \gamma \\ \alpha & \beta & -\gamma \\ \alpha & -\beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \alpha \\ 2\beta & \beta & -\beta \\ \gamma & -\gamma & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0+4\beta^2+\gamma^2 & 0+2\beta^2-\gamma^2 & 0-2\beta^2+\gamma^2 \\ 0+2\beta^2-\gamma^2 & \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 & \alpha^2-\beta^2-\gamma^2 \\ 0-2\beta^2+\gamma^2 & \alpha^2-\beta^2-\gamma^2 & \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$4\beta^2 + \gamma^2 = 1 \quad \dots(1)$$

$$\text{மற்றும் } -2\beta^2 + \gamma^2 = 0 \Rightarrow \beta^2 = \frac{\gamma^2}{2} \quad \dots(2)$$

$$(1) \quad 4 \cdot \frac{\gamma^2}{2} + \gamma^2 = 1 \quad [\because \beta^2 = \frac{\gamma^2}{2}]$$

$$2\gamma^2 + \gamma^2 = 1$$

$$\Rightarrow 3\gamma^2 = 1$$

$$\Rightarrow \gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$(2)\text{-ல் இருந்து } \beta^2 = \frac{1}{6} \Rightarrow \beta = \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \quad [\because \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1]$$

$$\alpha^2 = 1 - \beta^2 - \gamma^2$$

$$= 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{3}$$

$$\alpha^2 = \frac{6-1-2}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.31 : $A = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -8 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & -8 & 4 \end{bmatrix}$ எனில் $A^{-1} = A'$, A-இன் நிரை நிரல் மாற்றம் A' என்பதை நிரூபிக்கவும்.

தீர்வு : $A = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -8 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & -8 & 4 \end{bmatrix}$ மற்றும் $A' = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & -8 \\ 4 & 7 & 4 \end{bmatrix}$ எனில்

$$\begin{aligned} \therefore AA' &= \frac{1}{81} \begin{bmatrix} -8 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & -8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & -8 \\ 4 & 7 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{81} \begin{bmatrix} 64+1+16 & -32+4+28 & -8-8+16 \\ -32+4+28 & 16+16+49 & 4-32+28 \\ -8-8+16 & 4-32+28 & 64+1+16 \end{bmatrix} = \frac{1}{81} \begin{bmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow AA^{-1} = I \Rightarrow A' = A^{-1}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.32 : $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$ செங்குத்து அணியா?

தீர்வு : $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$ என்க.

A-இன் நிரை நிரல் மாற்றம் $A' = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} \therefore AA' &= \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+16+9 & -6+12-3 & 2+4-27 \\ -6+12-3 & 9+9+1 & -3+3+9 \\ 2+4-27 & -3+3+9 & 1+1+81 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 29 & 3 & -21 \\ 3 & 19 & 9 \\ -21 & 9 & 83 \end{bmatrix} \neq I \end{aligned}$$

எனவே A என்பது செங்குத்து அணி இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு 5.33 : $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$ செங்குத்து அணியா?

தீர்வு : A'-இன் நிரை நிரல் மாற்று அணி,

$$\begin{aligned} A' &= \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \\ \therefore A'A &= \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta + 0 + \sin^2 \theta & 0 + 0 + 0 & \cos \theta \sin \theta - \cos \theta \sin \theta \\ 0 + 0 + 0 & 0 + 1 + 0 & 0 + 0 + 0 \\ \cos \theta \sin \theta - \cos \theta \sin \theta & 0 + 0 + 0 & \sin^2 \theta + 0 + \cos^2 \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I \end{aligned}$$

எனவே A என்பது செங்குத்து அணி ஆகும்.

பயிற்சி 5.7

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$, எனில் (AB)' கண்டுபிடி. (AB)' = B'.A' என நிறுவுக.

2. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ எனில் AA' மற்றும் A'A ஆகியன சமச்சீர் அணி என நிறுவுக.

3. A மற்றும் B ஆகியன சமச்சீர் அணி எனில் $AB - BA$ என்பது மெய் - சமச்சீர் அணி என காட்டுக.
4. கொடுக்கப்பட்ட அணி A-ன் சமச்சீர் மற்றும் மெய் -சமச்சீர் அணியின் கூட்டுத்தொகையை கணிக்கிடுக.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 3 \\ -1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

5. கொடுக்கப்பட்ட அணி A என்பது செங்குத்து அணி என நிறுவுக மற்றும் A^{-1} கண்டுபிடி.

$$A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

6. $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 2/3 & a \\ 2/3 & 1/3 & b \\ 2/3 & -2/3 & c \end{bmatrix}$ என்பது செங்குத்து அணி எனில் a, b மற்றும் c ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

7. கொடுக்கப்பட்ட அணி செங்குத்து அணியா இல்லையா என்பதை சரிபார்க்கவும்?

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & -8 & 4 \end{bmatrix}$$

8. கொடுக்கப்பட்ட அணி செங்குத்து அணியா?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

9. கொடுக்கப்பட்ட அணி A என்பது செங்குத்து அணி என நிறுவுக மற்றும் A^{-1} கண்டுபிடி.

$$\text{i. } \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & -2 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad \text{ii. } \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 2 & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{iii. } \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

10. $3A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ மற்றும் என்பது செங்குத்து அணி எனில் a, b மற்றும் c ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

11. கொடுக்கப்பட்ட அணி A-ன் சமச்சீர் மற்றும் எதிர்-சமச்சீர் அணியின் கூட்டுத்தொகையை கணிக்கிடுக.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 2 & 7 & -1 \\ 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

12. பின்வரும் அணிகள் முறையான செங்குத்து அல்லது முறையற்ற செங்குத்து என்பதை சரிபார்க்கவும்:

i. $\begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{bmatrix}$ ii. $\begin{bmatrix} 12/13 & 5/13 \\ -5/13 & 12/13 \end{bmatrix}$ iii. $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

விடைகள்

1. $\begin{bmatrix} 17 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

4. சமச்சீர் அணி = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 5 & 9/2 \\ 3/2 & 9/2 & 3 \end{bmatrix}$ மெய் -சமச்சீர் அணி = $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 5/2 \\ -2 & 0 & -3/2 \\ -5/2 & 3/2 & 0 \end{bmatrix}$

5. A-இன் நிரை நிரல் மாற்று அணி A'

6. $a = \pm \frac{2}{3}, b = \pm \frac{2}{3}, c = \pm \frac{1}{3}$

7. இல்லை

8. இல்லை

9. i. $\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & -2 & 1 \\ \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$

ii. $\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$

iii. $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 \\ -1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

10. $a = 2, b = 2, c = 1$

11. சமச்சீர் அணி = $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 11/2 \\ 0 & 7 & 3/2 \\ 11/2 & 3/2 & 0 \end{bmatrix}$ மெய் -சமச்சீர் அணி = $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1/2 \\ 2 & 0 & 5/2 \\ -1/2 & 5/2 & 0 \end{bmatrix}$

12. i. முறையான ii. முறையற்ற iii. செங்குத்து இல்லை

5.9 வெக்டர்கள்

ஏதேனும் ஒரு வெக்டர் இரு உருவளவில் $X = (x_1, x_2)$ எனவும், மற்றும் மூன்று உருவளவில் $X = (x_1, x_2, x_3)$ எனவும், குறிக்கப்படுகிறது, இதுபோலவே, நான்கு உருவளவில் $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ எனவும் நாம் குறிக்கலாம் மற்றும் பல.

n-உருவளவு தளத்தில், அவ்வகைப்பட்ட எண்களால் (வரிசைப்படுத்தப்பட்ட n-பன்மை எண்கள் என அழைக்கலாம்) குறிப்பிடப்பட்டுள்ள வெக்டர் X, அதாவது $X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, n-வெக்டர் என அழைக்கப்படுகிறது. இங்கு x_i என்பது $i = 1, 2, 3, \dots, n$ க்கு நிலையானது.

அடைப்புக்குள் உள்ள எண்கள் $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, வெக்டர் $X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ ன் பகுப்புகள் என அழைக்கப்படுகிறது.

ஒரு வெக்டரை, நிரை அல்லது நிரலாக பின்வருமாறு எழுதலாம்,

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ அல்லது } X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}$$

அனைத்து உறுப்புகளையும் பூஜ்ஜியம் ஆக கொண்ட வெக்டர் பூஜ்ஜிய வெக்டர் மற்றும் இது O எனக் குறிக்கப்படுகிறது, அதாவது $O = (0, 0, 0, \dots, 0)$.

வரிசைப்படுத்தப்பட்ட n -பன்மையில் உள்ள ஏதேனும் இரு வெக்டர்கள்,

$$X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \text{ மற்றும் } Y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \text{ என்க.}$$

X -இன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் Y -இன் தொடர்புடைய உறுப்புக்கு சமமாக இருந்தால், மேலே உள்ள இரண்டு வெக்டர்களும் சமம் என வரையறுக்கப்படுகிறது.

அதாவது $x_i = y_i$ அனைத்து $i = 1, 2, 3, \dots, n$, பின், $X = Y$.

மற்றும் மேலே உள்ள இரு வெக்டர்களின் கூட்டல் பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது,

$$X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots, x_n + y_n)$$

மற்றும் வெக்டர் Y இன் திசையிலி பெருக்கல் பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது,

$$kX = (kx_1, kx_2, kx_3, \dots, kx_n)$$

அதை போல, $mX + nY = (mx_1 + ny_1, mx_2 + ny_2, mx_3 + ny_3, \dots, mx_n + ny_n)$

5.9.1 வெக்டர்களின் நேரியல் சார்பு மற்றும் சார்பற்ற தன்மை

r -எண்ணிக்கையுடைய n -பன்மை வெக்டர்கள், $X_1, X_2, X_3, \dots, X_r$ ஆகியவை என்க. மேலே குறிப்பிட்ட r வெக்டர்களுடன் தொடர்புடைய, அனைத்தும் பூஜ்ஜியமற்ற (ஒரு சில பூஜ்ஜியமாக இருக்கலாம்) r திசையிலிகளை, $K_i, (i = 1, 2, 3, \dots, r)$ நம்மால் பின்வருமாறு காண முடியும்.

$$K_1X_1 + K_2X_2 + K_3X_3 + \dots + K_rX_r = 0 \quad \dots(1)$$

பின்னர் இந்த வெக்டர்கள், $X_i, (i = 1, 2, 3, \dots, r)$, சார்புடையது எனப்படும். பின் சமன்பாடு (1) ஆனது $K_1 = K_2 = K_3 = \dots = K_r = 0$ என்றவாறு திருப்திபடுகிறது என்றால், பின் இந்த வெக்டர்கள், $X_i, (i = 1, 2, 3, \dots, r)$ சார்பற்றது எனப்படும்.

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 5.34 : பின்வரும் வெக்டர்கள் $x_1 = (3, 2, 7), x_2 = (2, 4, 1)$ மற்றும் $x_3 = (1, -2, 6)$ நேரியல் சார்புடையதா? ஆம் எனில், அவற்றிற்கு இடையேயான தொடர்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + \lambda_3x_3 = 0$ என்றவாறு, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ஆகியவை திசையிலிகள் என்க.

$$\Rightarrow \lambda_1(3, 2, 7) + \lambda_2(2, 4, 1) + \lambda_3(1, -2, 6) = 0 \quad \dots(1)$$

$$\Rightarrow 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \quad \dots(A)$$

$$2\lambda_1 + 4\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \quad \dots(B)$$

$$7\lambda_1 + \lambda_2 + 6\lambda_3 = 0 \quad \dots(C)$$

மற்றும் (B) யிலிருந்து λ_3 யை அகற்ற நாம் பெறுவது, $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ மற்றும் (C) ல் $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ எனப் பிரதியிட, நாம் பெறுவது,

$$\lambda_2 - \lambda_3 = 0$$

ஆதலால், சமன்பாடு (1), $\lambda_1(x_1 - x_2 - x_3) = 0$ என வரும். ஆனால், $\lambda_1 \neq 0$

ஆதலால், $x_1 - x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 + x_3$, அதாவது, வெக்டர்கள் நேரியல் சார்புடையது.

எடுத்துக்காட்டு 5.35 : பின்வரும் வெக்டர்கள் $x_1 = (1, 1, 2, 3), x_2 = (1, 2, 3, 4), x_3 = (2, 3, 4, 9)$ நேரியல் சார்புடையதா? ஆம் எனில், அவற்றிற்கு இடையேயான தொடர்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0$ என்றவாறு, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ஆகியவை திசையிலிகள் என்க.

$$\Rightarrow \lambda_1(1, 1, 2, 3) + \lambda_2(1, 2, 3, 4) + \lambda_3(2, 3, 4, 9) = 0 \quad \dots(1)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \quad \dots(A)$$

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \quad \dots(B)$$

$$2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \quad \dots(C)$$

$$3\lambda_1 + 4\lambda_2 + 9\lambda_3 = 0 \quad \dots(D)$$

$$\text{இப்போது, (B) - (A), லிருந்து நாம் பெறுவது, } \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \quad \dots(E)$$

$$\text{மற்றும் (B) - (A), லிருந்து நாம் பெறுவது, } \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \quad \dots(F)$$

$\therefore \lambda_1 = 0$ மற்றும் $\lambda_2 = -\lambda_3$ என, (B) ல் பிரதியிட, நாம் பெறுவது,

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0 \text{ மற்றும் } \lambda_3 = 0$$

(1) ல் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள வெக்டர்கள் x_1, x_2 மற்றும் x_3 ஆகியவை, நேரியல் சார்பற்றது.

எடுத்துக்காட்டு 5.36 : பின்வரும் வெக்டர்கள் $x_1 = (1, 2, 4), x_2 = (2, -1, 3), x_3 = (0, 1, 2), x_4 = (-3, 7, 2)$ நேரியல் சார்புடையதா என ஆராய்க. ஆம் எனில், அவற்றிற்கு இடையேயான தொடர்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = 0$ எனும் அணி சமன்பாட்டைக் கருத்தில் கொள்க.

$$\Rightarrow \lambda_1(1, 2, 4) + \lambda_2(2, -1, 3) + \lambda_3(0, 1, 2) + \lambda_4(-3, 7, 2) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 + 2\lambda_2 + 0\lambda_3 - 3\lambda_4 = 0$$

$$2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + 7\lambda_4 = 0$$

$$4\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 + 2\lambda_4 = 0$$

இது சமப்படித்தான தொகுப்பு.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

அல்லது

$$A\lambda = 0$$

$$R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1, R_3 \rightarrow R_3 - 4R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & -5 & 1 & 13 \\ 0 & -5 & 2 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \rightarrow R_3 - R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & -5 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 - 3\lambda_4 = 0$$

$$-5\lambda_2 + \lambda_3 + 13\lambda_4 = 0$$

$$\lambda_3 + \lambda_4 = 0$$

$$\lambda_4 = t, \lambda_3 = -t, \text{ என்க.}$$

$$-5\lambda_2 - t + 13t = 0$$

பின், (2)லிருந்து,

$$\lambda_2 = \frac{12t}{5}$$

மீண்டும், நாம் பெறுவது, $\lambda_1 + \frac{24t}{5} - 3t = 0$

அல்லது, $\lambda_1 = \frac{-9t}{5}$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட வெக்டர்கள் நேரியல் சார்புடையது.

λ வின் மதிப்புகளை (1)-ல் பிரதியிட, நாம் பெறுவது,

$$\frac{-9t}{5}x_1 + \frac{12t}{5}x_2 - tx_3 + tx_4 = 0$$

அல்லது $\frac{-9}{5}x_1 + \frac{12}{5}x_2 - x_3 + x_4 = 0$

அல்லது, $9x_1 - 12x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0$

எடுத்துக்காட்டு 5.37 : $x_1 = (2, 2, 1)^T$, $x_2 = (1, 3, 1)^T$, $x_3 = (1, 2, 2)^T$ ஆகிய வெக்டர்கள், நேரியல் சார்புடையதா? விவரி.

தீர்வு :

இங்கு,
$$x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0$ எனும் அணி சமன்பாட்டைக் கருத்தில் கொள்க.

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$$

$$2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

$$2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0$$

இது சமப்படித்தான தொகுப்பு.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftrightarrow R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1, R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \rightarrow R_3 + R_2$$

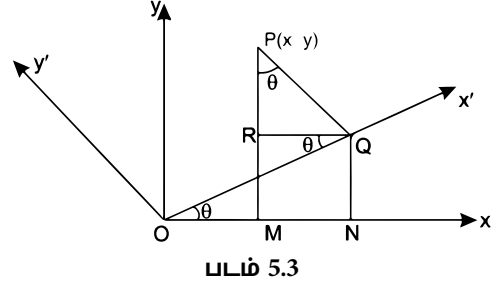
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_3 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_1 = 0$$

ஆகவே, அனைத்து திசையிலிகளும் பூஜ்ஜியம். ஆகையால், கொடுக்கப்பட்ட வெக்டர்களின் தொகுப்பு நேரியல் சார்பற்றது.

5.9.2 நேரியல் உருமாற்றங்கள்

$P(x, y)$ என்பது x, y அச்சகளுடன் பரிமாணங்களில் ஒரு புள்ளியாக இருக்கட்டும் மற்றும் இந்த அச்சுகள் θ கோணத்தில் சுழற்றப்படுகின்றன. P இன் புதிய ஆயமாக, (x', y') இருக்குமாறு, ஆதிப்புள்ளி O -வை நிலைப்படுத்த வேண்டும். ஆகவே, Ox' மற்றும் Oy' முறையே புதிய அச்சுகள். பிறகு



படம் 5.3

$$OM = x \text{ மற்றும் } PM = y$$

$$OQ = x' \text{ மற்றும் } PQ = y' \text{ எனலாம். மற்றும் } OM = ON - MN.$$

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \quad \dots(1)$$

$$\text{மற்றும் } PM = PR + RM = PR + QN = y' \cos \theta + x' \sin \theta$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \quad \dots(2)$$

மற்றும் (2)-லிருந்து, நாம் பெரும் நேரியல் தொடர்பின் வடிவம் ஆனது,

$$x' = a_1 x + b_1 y$$

$$\text{மற்றும், } y' = a_2 x + b_2 y$$

இதை பின்வரும் வடிவத்தில் குறிப்பிடலாம்.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow X' = AX \quad \dots(3)$$

இந்த உருமாற்றம் (3) இரு உருவளவில் உள்ள நேரியல் உருமாற்றம்.

இதேபோல், பின்வரும் படிவத்தில் தொடர்பை எடுக்க,

$$x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z$$

$$y' = a_2 x + b_2 y + c_2 z$$

$$z' = a_3 x + b_3 y + c_3 z$$

இதை பின்வரும் அணியால் குறிப்பிடலாம்.

$$X' = AX \text{ இங்கு, } X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \text{ மற்றும் } A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}.$$

ஆகவே, $X' = AX$, மூன்று உருவளவில் உள்ள நேரியல் உருமாற்றம் எனக் காட்டுகிறது.

5.9.3 செங்குத்து உருமாற்றம்

ஒரு நேரியல் உருமாற்றம் $Y = AX$, $y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2$ யை $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ -க்கு உருமாற்றம் செய்தால் அது செங்குத்து உருமாற்றம் எனப்படும். இந்த உருமாற்றத்தின் அணி A , செங்குத்து அணி என அழைக்கப்படும்.

அதாவது, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ மற்றும் $X' = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ எனில்,

$$\begin{aligned} \text{எனவே, } XX' &= [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n] \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \end{aligned}$$

மற்றும் இதேபோல், $YY' = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2$

$Y = AX$ என்ற உருமாற்றத்தை, செங்குத்து உருமாற்றம் எனக் கருத்தில் கொள்ள, பிறகு,

$$\begin{aligned} Y'Y &= (AX)'(AX) = (X'A')(AX) = X'A'AX \\ &= X'(A'A)X = X'IX = X'X \end{aligned}$$

இது $A'A = I \Rightarrow A' = A^{-1}$, என்றால் மட்டுமே உண்மை, ஏனெனில், $A^{-1}A = I$.

அதாவது, செங்குத்து உருமாற்றத்திற்கு $A' = A^{-1}$. ஆகவே, ஏதேனும் ஒரு சதுர அணி செங்குத்தாக இருக்கவேண்டுமெனில், $A'A = A'A = I$ இங்கு $A' = A^{-1}$.

மேலும், $|A'| = |A|$, $A'A = I \Rightarrow |A'| = |I| = 1$

$$\Rightarrow |A||A| = I \Rightarrow |A|^2 = 1 \Rightarrow |A| = \pm 1$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ என்பது, } n \times n \text{ வரிசையுடைய அணி, மற்றும் நிரல் அணி } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ மற்றும்}$$

$$\text{நிரல் அணி } Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} \text{ ஆகியவற்றை } Y = AX \text{ என்றவாறு கருதுக.} \quad \dots(1)$$

பின்னர் (1), ஒரு நேரியல் உருமாற்றத்தை, வரையறுக்கிறது. இது அணி A-யைப் பயன்படுத்தி, ஏதாவது வெக்டர் X-ஐ மற்றொரு வெக்டர் Y ஆக மாற்றுகிறது. அணி A-ஆனது வெக்டர் X-யிலிருந்து வெக்டர் Y க்கு மாற்றும் உருமாற்றத்தின் நேரியல் செயலி ஆகும், ஏனெனில் வெக்டர்களின் நேரியல் பண்பு திருப்தி அளிக்கிறது.

அதாவது X_1 மற்றும் X_2 ஆகியவை இரு வெக்டர்கள் எனில்,

$$Y_1 = AX_1 \text{ மற்றும் } Y_2 = AX_2 \Rightarrow aY_1 + bY_2 = A(aX_1 + bX_2).$$

$|A| \neq 0$ எனில், பின்னர் உருமாற்ற அணி A , எதிர் சமச்சீர் என அழைக்கப்படும் மற்றும் பின் நேரியல் உருமாற்றம் ஒழுங்கானது (எதிர் சமச்சீர்) என அறியப்படுகிறது மற்றும் $|A| = 0$ எனில், பின்னர் உருமாற்ற அணி A , சமச்சீர் என அழைக்கப்படும் மற்றும் பின் நேரியல் உருமாற்றம், சமச்சீர் என அறியப்படுகிறது. அணி A இன் உருமாற்றம் சமச்சீர் (எதிர் சமச்சீர்) என்றால், அதற்கேற்ப உருமாற்றம், சமச்சீர் (எதிர் சமச்சீர்) என்று அழைக்கப்படுகிறது. மேலும், (எதிர் சமச்சீர் உருமாற்றம்) $Y = AX$ க்கு, $X = A^{-1}Y$ ஆனது நேர்மாறு உருமாற்றம் ஆகும்.

கூடுதலாக, $Y = AX$ என்றவாறு, A -ஆல் வெக்டர் $X = (x_1, x_2, x_3)$ யை, வெக்டர் $Y = (y_1, y_2, y_3)$ க்கு உருமாற்றினால் மற்றும், $Z = BY$ என்றவாறு, மற்றொரு உருமாற்றம் B ஆல் வெக்டர் Y -யை, வெக்டர் $Z = (z_1, z_2, z_3)$ க்கு உருமாற்றினால், பின்னர் நாம் பெறுவது, $Z = BY = B(AX) = (BA)Z$.

இந்த உருமாற்றம் BA கலப்பு உருமாற்றம் என்று அழைக்கப்படுகிறது.

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 5.38 : $y_1 = 2x_1 + x_2 + x_3, y_2 = x_1 + x_2 + 2x_3, y_3 = x_1 - 2x_3$ என்ற உருமாற்றம் ஒழுங்கானது எனக் காட்டுக. நேர்மாறு உருமாற்றத்தை எழுதுக.

தீர்வு : $X = A^{-1}Y$ என்றவாறு, $Y = AX$ எனும் உருமாற்றத்தை எடுத்தால்,

$$\text{இங்கு, } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \text{ மற்றும் } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A \text{ யின் அணிக்கோவையானது, } |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0. \text{ எனவே உருமாற்ற அணி ஆனது எதிர்}$$

சமச்சீர் மற்றும் உருமாற்றம் ஒழுங்கானது.

$$\text{இப்போது, } A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \text{ எனில், பின் } A^{-1} \text{ யைக் காணலாம்.}$$

$a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, \text{ etc}$ ஆகியவற்றோடு ஒத்த, A -யின் இணைக்காரணிகள்,

$$A_1 = -2, B_1 = 4, C_1 = -1, A_2 = 2, B_2 = -5, C_2 = 1, A_3 = 1, B_3 = -3, \text{ மற்றும் } C_3 = 1.$$

இப்போது,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj.} A = \frac{1}{(-1)} \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -4 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

∴ நேர்மாறு உருமாற்றம்,

$$\therefore X = A^{-1}Y \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -4 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

இதிலிருந்து நாம் பெறுவது,

$$x_1 = 2y_1 - 2y_2 - y_3$$

$$x_2 = -4y_1 + 5y_2 + 3y_3$$

$$\text{மற்றும், } x_3 = y_1 - y_2 - y_3$$

இதுவே நேர்மாறு உருமாற்றம் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.39 : $y_1 = x_1 + x_2 + 2x_3$, $y_2 = 2x_1 + x_3$, $y_3 = -x_1 + x_2 + 3x_3$ என்ற உருமாற்றம் எதிர் சமச்சீர் எனக் காட்டுக. நேர்மாறு உருமாற்றத்தை காண்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பு, பின்வருமாறு எழுதப்படுகிறது.

$$Y = AX \text{ இங்கு } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \text{ மற்றும்}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

இப்போது, $|A| = -4 \neq 0$, அணி A ஆனது எதிர் சமச்சீர் மற்றும் கொடுக்கப்பட்ட உருமாற்றம் எதிர் சமச்சீர்.

A இன் நேர்மாறையை பொருத்தமான எந்த முறையையும் பயன்படுத்தி காணலாம்.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{7}{4} & \frac{-5}{4} & \frac{-3}{4} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

நேர்மாறு உருமாற்றம் $X = A^{-1}Y$ ஆனது,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{1}{4}y_1 + \frac{1}{4}y_2 - \frac{1}{4}y_3$$

$$\therefore x_2 = \frac{7}{4}y_1 - \frac{5}{4}y_2 - \frac{3}{4}y_3$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3$$

$$y_1 = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3$$

எடுத்துக்காட்டு 5.40 : $y_2 = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3$, எனும் உருமாற்றத்தை கருதுக.

$$y_3 = -\frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3$$

இது $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ யை $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ க்கு உருமாற்றுகிறதா எனச் சரிபார். நேர்மாறு உருமாற்றத்தை எழுதுக.

தீர்வு : உருமாற்றம், செங்கோண உருமாற்றம் ஆகும்.

பயிற்சி 5.8

- பின்வரும் வெக்டர்கள் நேரியல் சார்புடையதா? ஆம் எனில், அவற்றிற்கு இடையேயான தொடர்பைக் காண்க.
 - $x_1 = (1, 2, 4), x_2 = (2, -1, 3), x_3 = (0, 1, 2)$ மற்றும் $x_4 = (-3, 7, 2)$
 - $x_1 = (1, 3, 4, 2), x_2 = (3, -5, 2, 2)$ மற்றும் $x_3 = (2, -1, 3, 2)$
 - $x_1 = (2, -1, 3, 2), x_2 = (1, 3, 4, 2)$ மற்றும் $x_3 = (3, -5, 2, 2)$
 - $x_1 = (2, 3, 1, -1), x_2 = (2, 3, 1, -2)$ மற்றும் $x_3 = (4, 6, 2, 1)$
 - $x_1 = (1, 2, 1), x_2 = (2, 1, 4)$ மற்றும் $x_3 = (4, 5, 6)$
- $(0, 2, -4), (1, -2, -1), (1, -4, 3)$ எனும் வெக்டர்களின் தொகுப்பு நேரியல் சார்புடையது என நிறுவுக.
- பின்வரும் வெக்டர்கள் நேரியல் சார்புடையதா அல்லது நேரியல் சார்பற்றதா எனது தீர்மானிக்க.
 - $(1, -2, 1), (2, 1, -1), (7, -4, 1)$

- ii. $(1,1),(0,4,1),(3,0,1)$
 iii. $(2,3,1),(-1,4,-2),(1,18,-4)$
4. $V_1 = (1,0,-1), V_2 = (-1,0,0), V_3 = (1,0,1)$ மற்றும் $V_4 = (2,1,3)$ எனும் நான்கு வெக்டர்களின் தொகுப்பு நேரியல் சார்புடையது என நிறுவுக.
5. $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ஆகிய வெக்டர்கள் நேரியல் சார்புடையது எனில், a -யின் மதிப்பைக் காண்க.
6. $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ P \\ -3 \end{bmatrix}$ மற்றும் $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ஆகிய வெக்டர்கள் நேரியல் சார்புடையது எனில், P -யின் மதிப்பைக் காண்க.
7. $y_1 = x_1 - x_2 + x_3, y_2 = 3x_1 - x_2 + 2x_3, y_3 = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3$ என்ற உருமாற்றம் எதிர் சமச்சீர் எனக் காட்டுக. நேர்மாறு உருமாற்றத்தை காண்க.
8. $x_1 = 3y_1 + 2y_2, x_2 = -y_1 + 4y_2, y_1 = z_1 + 2z_2$ மற்றும் $y_2 = 3z_1$ ஆகிய ஒவ்வொரு உருமாற்றத்தையும் அணியின் உதவியால் குறித்துக்காட்டுக. மற்றும் x_1, x_2 ஐ z_1, z_2 அடிப்படையில் வெளிப்படுத்தும் கலப்பு உருமாற்றத்தைக் காண்க.

விடைகள்

1. i. ஆம், $9x_1 - 12x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0$ ii. ஆம், $x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$
 iii. ஆம், $2x_1 - x_2 - x_3 = 0$ iv. ஆம், $5x_1 - 3x_2 - x_3 = 0$
 v. ஆம், $2x_1 + x_2 - x_3 = 0$
2. i. நேரியல் சார்புடையது ii. நேரியல் சார்பற்றது iii. நேரியல் சார்புடையது
5. $a = 1$
6. $P = 2$

5.10 ஓர் அணியின் தரம்

'r' எனும் இயல் எண், 'A' என்ற அணியின் தரமாக இருக்க வேண்டுமானால்,

1. 'A'-ல் குறைந்தபட்சம் ஒரு 'r' - வரிசையுடைய பூஜ்ஜியமற்ற சிற்றணிக் கோவையாவது இடம்பெற்றிருத்தல் வேண்டும்.
2. 'r'-யை விட அதிக வரிசைக் கொண்ட சிற்றணிக் கோவை பூஜ்ஜியமாக இருக்க வேண்டும்.
- 'A' என்ற அணியின் தரத்தை $\rho(A)$ எனக் குறிப்பிடலாம்.

குறிப்புரைகள்

1. $\rho(A) = 0$, A என்ற அணி பூஜ்ஜிய அணியாக இருக்கும் போது.
2. $A \neq 0$ எனும் போது, $\rho(A) \geq 0$
3. A என்ற அணி n -வரிசை உடைய பூஜ்ஜியமற்றக் கோவை அணி எனில் $\rho(A) = n$.
4. A என்ற அணி n -வரிசை உடைய பூஜ்ஜியக் கோவை அணி எனில் $\rho(A) < n$.
5. A என்ற அணியின் வரிசை $m \times n$ எனில், $\rho(A) \leq \min(m, n)$.
6. தரம் r உடைய, ஒவ்வொரு அணி A -க்கும், $PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ என்றவாறு இரு பூஜ்ஜியமற்றக் கோவை அணிகள் P மற்றும் Q இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ன் தரத்தைக் காண்க.

தீர்வு : $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டு உள்ளது.

எனவே, $|A| = 2(1) = 2 \neq 0$

$\Rightarrow A$ என்பது வரிசை 3 உடைய பூஜ்ஜியமற்றக் கோவை அணி

$\Rightarrow \rho(A) = 3$

5.10.1 அணியின் தரத்தைக் கண்டுபிடிக்க மற்றொரு வழி

அணியின் தரம் அணியின் ஏறுபடி வடிவத்தில் பூஜ்ஜியமற்ற நிரைகளின் எண்ணிக்கைக்கு சமம்.

குறிப்பு : பூஜ்ஜியமற்ற நிரை என்பது குறைந்தபட்சம் ஒரு உறுப்பு பூஜ்ஜியமல்லாத நிரை ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ எனும் அணியைக் கருத்தில் கொள்க.

தீர்வு : தெளிவாக, கொடுக்கப்பட்ட அணி A , ஏறுபடி வடிவத்தில் உள்ளது. இது இரண்டு பூஜ்ஜியமற்ற நிரைகளைப் பெற்றுள்ளது. எனவே A - யின் தரம் = 2. அதாவது $\rho(A) = 2$.

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 5.41 : $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ன் தரத்தைக் காண்க.

தீர்வு : $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டு உள்ளது.

$$R_2 \rightarrow R_2 + R_1, R_3 \rightarrow R_3 - R_1$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \rightarrow R_3 + R_2,$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \rightarrow 4R_3 - R_2,$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ இது மூன்று பூஜ்ஜியமற்ற நிரைகளைப் பெற்றுள்ளது.

எனவே A-யின் தரம் = 3. அதாவது $\rho(A) = 3$.

எடுத்துக்காட்டு 5.42 : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & 7 & -1 \\ 1 & 9 & 16 & -13 \end{bmatrix}$ ன் தரத்தைக் காண்க.

தீர்வு : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & 7 & -1 \\ 1 & 9 & 16 & -13 \end{bmatrix}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டு உள்ளது.

$$R_2 \rightarrow R_2 + 2R_1, R_3 \rightarrow R_3 - R_1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 7 & 13 & -9 \\ 0 & 7 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \rightarrow R_3 - R_2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 7 & 13 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ இது இரண்டு பூஜ்ஜியமற்ற நிரைகளைப் பெற்றுள்ளது.

எனவே A - யின் தரம் = 2 . அதாவது $\rho(A) = 2$.

எடுத்துக்காட்டு 5.43 : b யின் எந்த மதிப்பிற்கு, $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ b & 13 & 10 \end{bmatrix}$ யின் தரம் 2 என இருக்கும் எனக் கண்டுபிடி.

தீர்வு : $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ b & 13 & 10 \end{bmatrix}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டு உள்ளது.

$$R_1 \rightarrow 2R_1$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 8 \\ 0 & 3 & 2 \\ b & 13 & 10 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \rightarrow R_3 - R_1$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 8 \\ 0 & 3 & 2 \\ b-2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \rightarrow R_3 - R_2$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 8 \\ 0 & 3 & 2 \\ b-2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A யின் தரம் 2 எனில் $b - 2$ பூஜ்ஜியமாக இருக்க வேண்டும்.

எனவே, $b - 2 = 0$

$$\Rightarrow b = 2$$

எடுத்துக்காட்டு 5.44 : $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$ ன் தரத்தைக் காண்க.

தீர்வு : $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டு உள்ளது.

$$R_2 \rightarrow R_2 - \frac{3}{2}R_1, R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1, R_4 \rightarrow R_4 - \frac{9}{2}R_1$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & \frac{-1}{2} & -1 & \frac{-3}{2} \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & \frac{-7}{2} & -7 & \frac{-21}{2} \end{bmatrix}$$

$$R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2, R_4 \rightarrow R_4 - 7R_2$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & \frac{-1}{2} & -1 & \frac{-3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

இது இரண்டு பூஜ்ஜியமற்ற நிரைகளைப் பெற்றுள்ளது.

எனவே A - யின் தரம் = 2. அதாவது $\rho(A) = 2$.

எடுத்துக்காட்டு 5.45 : $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & 2 & 2 \\ 6 & -3 & 8 & 6 \end{bmatrix}$ ன் தரத்தைக் காண்க.

தீர்வு : $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & 2 & 2 \\ 6 & -3 & 8 & 6 \end{bmatrix}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டு உள்ளது.

$$R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1, R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1, R_4 \rightarrow R_4 - 6R_1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & -2 \\ 0 & -14 & -10 & -4 \\ 0 & -21 & -16 & -6 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2, R_4 \rightarrow R_4 - 3R_2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftrightarrow R_4$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

இது மூன்று பூஜ்ஜியமற்ற நிரைகளைப் பெற்றுள்ளது.

எனவே A - யின் தரம் = 3. அதாவது $\rho(A) = 3$.

எடுத்துக்காட்டு 5.46 : $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & -7 \end{bmatrix}$ ன் தரத்தைக் காண்க.

தீர்வு : $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & -7 \end{bmatrix}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டு உள்ளது.

$$R_1 \leftrightarrow R_2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1, R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1, R_4 \rightarrow R_4 - 6R_1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 5 & 3 & 9 \\ 0 & 4 & 9 & 10 \\ 0 & 9 & 12 & 17 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \rightarrow R_3 - \frac{4}{5}R_2, R_4 \rightarrow R_4 - \frac{9}{5}R_2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 5 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 33/5 & 14/5 \\ 0 & 0 & 33/5 & 4/5 \end{bmatrix}$$

$$R_4 \rightarrow R_4 - R_3$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 5 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 33/5 & 14/5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

இது நான்கு பூஜ்ஜியமற்ற நிரைகளைப் பெற்றுள்ளது.

எனவே A-யின் தரம் = 4. அதாவது $\rho(A) = 4$.

எடுத்துக்காட்டு 5.47 : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ ன் தரத்தைக் காண்க.

தீர்வு : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டு உள்ளது.

$$R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1, R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1, R_4 \rightarrow R_4 - 6R_1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 0 & -4 & -11 & 5 \end{bmatrix}$$

$$R_4 \rightarrow R_4 - R_3$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R_4 \rightarrow R_4 - R_2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow R_2 \leftrightarrow R_3, A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

இது மூன்று பூஜ்ஜியமற்ற நிரைகளைப் பெற்றுள்ளது.

எனவே A - யின் தரம் = 3 . அதாவது $\rho(A) = 3$.

5.11 அணியின் இயல்பான வடிவம் (நியமன வடிவம்)

வரிசை $m \times n$ உடைய ஒவ்வொரு பூஜ்ஜியமல்லாத அணியையும், தொடக்க நிலை, நிரை மற்றும் நிரல் செயல்பாட்டின் மூலம் கீழ்க்கண்ட எந்த வடிவத்திற்கும் சமமான அணியாகச் சுருக்கலாம்.

$$\begin{array}{ll} \text{i. } \begin{bmatrix} I_r & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} & \text{ii. } \begin{bmatrix} I_r \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \\ \text{iii. } [I_r \vdots 0] & \text{iv. } [I_r] \end{array}$$

இங்கு I_r என்பது r -வரிசை உடைய அலகு அணி மற்றும் 0 என்பது பூஜ்ஜிய அணி. இது இயல்பு வடிவம் அல்லது நியமன வடிவம் ஆகும். கண்டுபிடிக்கப்பட்ட எண் r , அணி A-யின் தரம் ஆகும்

மற்றும் $\rho(A) = r$. வடிவம் $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, A யின் முதல் நியமன வடிவம் ஆகும். நிரை மற்றும் நிரல் ஆகியவற்றின்

இடமாற்றம் இங்கு பயன்படுத்தப்படலாம் என்பதால், பெறப்பட்ட முதல் நிரையின் உறுப்பு 1 ஐ முதல் நிரலுக்கு நகர்த்தலாம். பின்னர் முதல் நிரை மற்றும் முதல் நிரல் இரண்டையும் மற்ற பூஜ்ஜியமற்ற உறுப்புகளிலிருந்து அழிக்க முடியும். இதேபோல் இரண்டாவது நிரையின் உறுப்பு 1 ஐ இரண்டாவது நிரலுக்கு கொண்டு வரலாம் மற்றும் பல.

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 5.48 : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 4 & -7 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ என்ற அணியை இயல்பு வடிவத்திற்கு சுருக்குவதின்

மூலம் அதன் தரத்தைக் காண்க.

தீர்வு : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 4 & -7 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ என்க.

$$C_2 \rightarrow C_2 - 2C_1, C_3 \rightarrow C_3 + C_1, C_4 \rightarrow C_4 - 3C_1$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C_3 \rightarrow C_3 + 2C_4, C_4 \rightarrow (-1)C_4$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \rightarrow R_2 + 2R_1, R_3 \rightarrow R_3 - R_1$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \rightarrow R_3 - R_2$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_2 \leftrightarrow C_4 \quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

இது தேவையான இயல்பு வடிவம்.

$$\therefore \rho(A) = 2$$

எடுத்துக்காட்டு 5.49 : $A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ என்ற அணியை இயல்பு வடிவத்திற்கு சுருக்குவதின் மூலம்

அதன் தரத்தைக் காண்க.

தீர்வு : $A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ என்க.

$$R_1 \rightarrow \left(\frac{1}{9}\right)R_1 \quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/9 & 3/9 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \rightarrow R_3 + R_1(-4) \quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/9 & 3/9 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 5 & 19/9 & -12/9 \end{bmatrix}$$

$$C_3 \rightarrow C_3 + C_1 \left(\frac{-2}{9} \right) \quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/9 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 5 & 19/9 & -12/9 \end{bmatrix}$$

$$C_4 \rightarrow C_4 + C_1 \left(\frac{-3}{9} \right) \quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 5 & 19/9 & -12/9 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \rightarrow R_3 - R_2 (5) \quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 5 & -206/9 & -282/9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} C_3 &\rightarrow C_3 + C_2 (-5) \\ C_4 &\rightarrow C_4 + C_2 (-6) \end{aligned} \quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -206/9 & -282/9 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \rightarrow R_3 \left(\frac{-9}{206} \right) \quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 141/103 \end{bmatrix}$$

$$C_4 \rightarrow C_4 + C_3 \left(\frac{-141}{103} \right) \quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [I_3, 0]$$

இது தேவையான இயல்பு வடிவம்.

$$\therefore \rho(A) = 3$$

எடுத்துக்காட்டு 5.50 : $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ என்ற அணியை $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ எனும் இயல்பு வடிவத்திற்கு சுருக்குக.

தீர்வு : $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ என்க.

$$C_2 \rightarrow C_2 + C_1, C_3 \rightarrow C_3 - 2C_1, C_4 \rightarrow C_4 + 3C_1$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & -8 & 14 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \rightarrow R_2 - 4R_1 \quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -8 & 14 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R_4 \leftrightarrow R_2 \quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & -8 & 14 \end{bmatrix}$$

$$C_4 \rightarrow C_4 - 2C_2 \quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & -8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} R_3 &\rightarrow R_3 - 3R_2 \\ R_4 &\rightarrow R_4 - 5R_2 \end{aligned} \quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C_3 \leftrightarrow C_4 \quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} C_3 &\rightarrow \frac{-1}{2}C_3 \\ C_4 &\rightarrow \frac{-1}{8}C_3 \end{aligned} \quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_4 \rightarrow R_4 + 2R_3 \quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_4$$

$$\therefore \rho(A) = 4$$

எடுத்துக்காட்டு 5.51: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ என்ற அணியை இயல்பு வடிவத்திற்கு சுருக்குவதின் மூலம்

அதன் தரத்தைக் காண்க.

தீர்வு : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ என்க.

$$R_2 \rightarrow R_2 - 4R_1, R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1, R_4 \rightarrow R_4 - R_1$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & 6 & -11 \\ 0 & -7 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$C_2 \rightarrow C_2 - 2C_1, C_3 \rightarrow C_3 + C_1, C_4 \rightarrow C_4 - 3C_1$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 6 & -11 \\ 0 & -7 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \rightarrow R_3 - R_2$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 6 & -11 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$C_3 \rightarrow C_3 + \frac{6}{7}C_2, C_4 \rightarrow C_4 - \frac{11}{7}C_2$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$R_4 \rightarrow R_4 + \frac{1}{2}R_3 \quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_4 \rightarrow C_4 + 2C_3 \quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \rightarrow -\frac{1}{7}R_2, R_3 \rightarrow -\frac{1}{2}R_3$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

இது தேவையான இயல்பு வடிவம்.

$$\therefore \rho(A) = 3$$

எடுத்துக்காட்டு 5.52 : $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$ என்ற அணியை இயல்பு வடிவத்திற்கு சுருக்குவதின் மூலம்

அதன் தரத்தைக் காண்க.

தீர்வு : $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$ என்க.

$$\begin{aligned} R_2 &\rightarrow R_2 - \frac{3}{2}R_1 \\ R_3 &\rightarrow R_3 - 2R_1 \\ R_4 &\rightarrow R_4 - \frac{9}{2}R_1 \end{aligned} \quad A \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1/2 & -1 & -3/2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -7/2 & -7 & -21/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} C_2 &\rightarrow C_2 - \frac{3}{2}C_1 \\ C_3 &\rightarrow C_3 - 2C_1 \\ C_4 &\rightarrow C_4 - \frac{5}{2}C_1 \end{aligned} \quad A \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1 & -3/2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -7/2 & -7 & -21/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} R_1 &\rightarrow \frac{1}{2}R_1 \\ R_2 &\rightarrow -2R_2 \\ R_3 &\rightarrow -R_3 \\ R_4 &\rightarrow \frac{-2}{7}R_4 \end{aligned} \quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} R_3 &\rightarrow R_3 - R_2 \\ R_4 &\rightarrow R_4 - R_2 \end{aligned} \quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} C_3 &\rightarrow C_3 - 2C_2 \\ C_4 &\rightarrow C_4 - 3C_2 \end{aligned} \quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

இது தேவையான இயல்பு வடிவம்.

$\therefore \rho(A) = 2$

எடுத்துக்காட்டு 5.53 : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix}$ என்ற அணியை இயல்பு வடிவத்திற்கு சுருக்குவதின் மூலம்

அதன் தரத்தைக் காண்க.

தீர்வு : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix}$ என்க.

$$\begin{aligned}
& \begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 + R_1 \end{array} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} C_2 \rightarrow C_2 - 2C_1 \\ C_3 \rightarrow C_3 + C_1 \\ C_4 \rightarrow C_4 - 4C_1 \end{array} \quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix} \\
& C_3 \leftrightarrow C_2 \quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} R_3 \rightarrow R_3 - \frac{4}{5}R_2 \\ R_4 \rightarrow R_4 - R_2 \end{array} \quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 16/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
& \begin{array}{l} R_2 \rightarrow 1/5 R_2 \\ R_3 \rightarrow 5/16 R_3 \end{array} \quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 + \frac{5}{4}R_3 \\ R_4 \rightarrow R_4 - R_3 \end{array} \quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& C_3 \leftrightarrow C_4 \quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

இது தேவையான இயல்பு வடிவம்.

$$\therefore \rho(A) = 3$$

5.11.1 PAQ = $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ எனில் P மற்றும் Q-வைக் காணல்

A, என்பது $m \times n$ வரிசை உடைய அணி எனில், பின்னர் $A = I_m A I_n$ என எழுதலாம். இங்கு I_m மற்றும் I_n ஆகியவை முறையே, m மற்றும் n வரிசை உடைய அலகு அணிகள். A-ன் மீதான தொடக்கநிலை நிரை செயல்பாடு, அதனுடன் ஒத்த தொடக்கநிலை அணியுடன் முன் பெருக்கல் மூலம் பயனடைகிறது, அதாவது, அடுத்து அடுத்துவரும் படிகளில், I_m மீதோ அல்லது I_n -லிருந்து பெறப்படும் அணியின் மீதோ செயல்படுத்தும் போது, இதே போல் இது தொடக்கநிலை நிரை செயல்பாட்டுக்கும் பொருந்தும்.

இறுதியில் வலது புறத்தில் A ன் இடத்தில் $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ யை பெறும்போது, இடது புறத்தில் I_m -க்கு பதிலாக

P-யும் மற்றும் I_n க்கு பதிலாக Q-யும் நாம் பெறலாம்.

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 5.54 : $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ என்ற அணிக்கு, PAQ ஆனது இயல்பு வடிவத்தில் இருக்குமாறு

P மற்றும் Q ஆகிய பூஜ்ஜியமற்ற கோவை அணிகளைக் காண்க.

தீர்வு : இங்கு $[A]_{2 \times 3} = I_2 \cdot A \cdot I_3$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \rightarrow \frac{1}{2}R_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \rightarrow R_2 + R_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_2 \rightarrow C_2 - C_1, C_3 \rightarrow C_3 + 3C_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_2 \rightarrow \frac{1}{3}C_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 3 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_3 \rightarrow C_3 + C_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 8/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[I_2, 0] = PAQ$$

$$\text{எனவே, } P = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \text{ மற்றும் } Q = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 8/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.55 : $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ என்ற அணிக்கு, $PAQ = I$ என இருக்குமாறு, P மற்றும் Q ஆகிய

பூஜ்ஜியமற்ற கோவை அணிகளைக் காண்க.

தீர்வு : $[A]_{3 \times 3} = I_3 \cdot A \cdot I_3$

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \rightarrow R_1 - R_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_2 \rightarrow -C_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftrightarrow R_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftrightarrow R_3 - 3R_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_3 \rightarrow C_3 - C_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_3 = PAQ$$

$$\text{எனவே} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \text{ மற்றும் } Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.56 : $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ என்ற அணிக்கு, PAQ ஆனது இயல்பு வடிவத்தில் இருக்குமாறு

P மற்றும் Q ஆகிய பூஜ்ஜியமற்ற கோவை அணிகளைக் காண்க.

தீர்வு : $[A]_{3 \times 4} = I_3 \cdot A \cdot I_4$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftrightarrow R_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & -11 & -16 & -2 \\ 0 & -11 & -11 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} C_2 \rightarrow C_2 - 4C_1 \\ C_3 \rightarrow C_3 - 6C_1 \\ C_4 \rightarrow C_4 - C_1 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & -16 & -2 \\ 0 & -11 & -11 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -4 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftrightarrow R_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & -11 & -4 \\ 0 & -11 & -16 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -4 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \rightarrow R_2(-1/11) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4/11 \\ 0 & -11 & -16 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/11 & -1/11 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -4 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \rightarrow R_3 + 11R_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4/11 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/11 & -1/11 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -4 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_3 \rightarrow C_3 - C_2, C_4 \rightarrow C_4 - \frac{4}{11}C_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/11 & -1/11 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 & 5/11 \\ 0 & 1 & -1 & -4/11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \rightarrow \frac{-1}{5}R_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/11 & -1/11 \\ -1/5 & 1/5 & 1/5 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 & 5/11 \\ 0 & 1 & -1 & -4/11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_4 \rightarrow C_4 + C_3 \left(\frac{2}{5} \right) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/11 & -1/11 \\ -1/5 & 1/5 & 1/5 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 & -19/55 \\ 0 & 1 & -1 & -42/55 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[I_3, 0] = PAQ$$

$$\text{எனவே,} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/11 & -1/11 \\ -1/5 & 1/5 & 1/5 \end{bmatrix} \text{ மற்றும் } Q = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 & -19/55 \\ 0 & 1 & -1 & -42/55 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{சரிபார்ப்பு:} \quad PAQ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/11 & -1/11 \\ -1/5 & 1/5 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 & -19/55 \\ 0 & 1 & -1 & -42/55 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$PAQ = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4/11 \\ 0 & 0 & 1 & -2/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 & -19/55 \\ 0 & 1 & -1 & -42/55 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

பயிற்சி 5.9

பின்வரும் அணிகளின் தரத்தைக் காண்க.

$$1. \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$2. \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3. \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -4 & 7 \\ -1 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$4. \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$5. \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$6. \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$7. \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & 0 & -1 \\ -4 & 5 & 12 & -1 \end{bmatrix}$$

பின்வரும் அணிகளை இயல்பு வடிவத்திற்கு சுருக்குவதின் மூலம் அதன் தரத்தைக் காண்க.

$$8. \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$9. \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$10. \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

$$11. \begin{bmatrix} 8 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ -8 & -1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

கொடுக்கப்பட்டுள்ள A என்ற அணிக்கு, PAQ ஆனது இயல்பு வடிவத்தில் இருக்குமாறு P மற்றும் Q ஆகிய பூஜ்ஜியமற்ற கோவை அணிகளைக் காண்க.

$$12. \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$13. \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & -4 & 11 & -19 \end{bmatrix}$$

$$14. \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

விடைகள்

1. 2

2. 2

3. 2

4. 2

5. 2

6. 2

7. 2

8. 2

9. 3

10. 3

11. 3

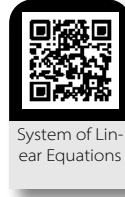
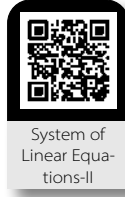
$$12. P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{மற்றும்} \quad PAQ = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$13. P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & -3/2 \\ -1/2 & 1/3 & -1/6 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 4/7 & 9/119 & 9/217 \\ 0 & 1/7 & -1/7 & -1/7 \\ 0 & 0 & -1/17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/31 \end{bmatrix}$$

$$14. PAQ = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{மற்றும்} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

சுவாரஸ்யமான உண்மைகள்

- ♦ அணிகளின் தரம் தரவு சுரங்க மற்றும் பயோஇன்ஃபர்மேடிக்ஸ் களத்தில் அதன் பயன்பாட்டைக் கொண்டுள்ளது.
- ♦ சமூக அறிவியலில், நாடுகளுக்கான பயனர் விருப்பத்தேர்வுகள் அணிகள் வடிவத்தில் குறிப்பிடப்படுகின்றன.
- ♦ உயிரியல் அறிவியலில், மரபணு வெளிப்பாட்டின் நிலை அணிகளைப் பயன்படுத்தி குறிப்பிடப்படுகிறது.
- ♦ மருத்துவத் துறையில், புற்றுநோய் மற்றும் அதன் துணை வகைகள் அணிகளைப் பயன்படுத்தி அவற்றின் மூலக்கூறு தரவுகளிலிருந்து கண்டுபிடிக்கப்படுகின்றன.



அன்றாட வாழ்வில் பயன்பாடுகள்

- ♦ கணித மற்றும் கணினி நிரலாக்க மாதிரிகளை உருவாக்க இவை மிக முக்கியமாகப் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.
- ♦ சில அறியப்படாத தரவுகளை அணிகள் வடிவத்தில் மீட்டெடுக்க முடியும். சைபர் பாதுகாப்பு இடத்தில், குறைந்த தர வரிசை கொண்டது என்று தெரிந்தால், அதை மிகவும் திறமையாகவும் எளிதாகவும் மீட்க முடியும்.
- ♦ தரம் கூட படத்தின் பரிமாணத்தைப் பற்றி ஒரு யோசனை அளிக்கிறது. எடுத்துக்காட்டாக, 3 டி இடத்தை 2 டி தளத்தில் சார்பிடல் செய்வது "முழு தரவரிசை" கொண்டிருக்காது.

5.12 தரம் –வெறுமை தேற்றம் (அணிகளின் அடிப்படையில்)

வெறுமை = நிரல்களின் எண்ணிக்கை – அணியின் தரம்

கூற்று : தரம் 'r' மற்றும் வெறுமை 'l' உடைய, $m \times n$ வரிசை உடைய அணி A என்க.

பிறகு தரம் –வெறுமை தேற்றத்தின் படி தரம் (A) = வெறுமை (A) = n

அதாவது $r + l = n$

இங்கு r = அணியின் தரம்

l = அணியின் வெறுமை

n = நிரல்களின் எண்ணிக்கை.

எடுத்துக்காட்டாக, கொடுக்கப்பட்ட அணி $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}_{2 \times 4}$ யின் வெறுமையைக் காண்க.

தீர்வு : முதலில், முன்னர் விவாதிக்கப்பட்ட ஏதேனும் ஒரு முறையில், நாம் தரத்தைக் காண்போம்.

ஆதலால், $R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1$ என செய்ய,

நாம் பெறுவது, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

$\rho(A) = 2 =$ பூஜ்ஜியமற்ற நிரைகளின் எண்ணிக்கை, எனக் காணலாம்.

பின், தேற்றத்தின் படி,

தரம் + வெறுமை = நிரல்களின் எண்ணிக்கை

ஆதலால் $2 +$ வெறுமை $= 4$

$\Rightarrow$ வெறுமை $= 4 - 2 = 2$

எடுத்துக்காட்டு 5.57 : கொடுக்கப்பட்ட அணி $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -5 & -1 & 8 \end{bmatrix}$ -யின் வெறுமையைக் காண்க

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டது, $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -5 & -1 & 8 \end{bmatrix}$

$R_3 \rightarrow R_3 + R_1$

$R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1$ என செய்ய,

நாம் பெறுவது, $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & 1 & -12 \\ 0 & -7 & -1 & 12 \end{bmatrix}$

பிறகு, $R_3 \rightarrow R_3 + R_2$ என செய்ய, $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

நாம் பெறுவது யின் தரம் $= \rho(A) = 2$.

ஆதலால், வெறுமை = நிரல்களின் எண்ணிக்கை - அணியின் தரம்

$= 4 - 2 = 2$

எடுத்துக்காட்டு 5.58 : கொடுக்கப்பட்ட அணி $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4 \times 5}$ யின் வெறுமையைக் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட அணி, ஏறுபடி வடிவத்தில் உள்ளதால்,

$$\rho(A) = 3$$

தரம் (A) + வெறுமை (A) = நிரல்களின் எண்ணிக்கை, என்பதை நாம் அறிவோம்.

ஆதலால், $3 + \text{வெறுமை (A)} = 5$

$$\text{வெறுமை (A)} = 2$$

குறிப்பு : பொதுவாக, தரம் (A) = தரம் (A^T),

ஆனால், வெறுமை(A) $\neq$ வெறுமை (A^T)

இதை கொடுக்கப்பட்ட எடுத்துக்காட்டில் காணலாம்:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4 \times 5} \quad \text{என்று கொள்.}$$

பின் தரம்

$$(A) = 3$$

$$A^T = 5 \times 4 \text{ (அணி)}$$

பின் தரம்

$$(A^T) = 3, \text{ (அணி மற்றும் அதன் நிரை நிரல் மாற்று அணிகளின் தரம் சமம்)}$$

ஆனால் வெறுமை

$$(A) = 5 - 3 = 2 \text{ (நிரல்களின் எண்ணிக்கை = 5)}$$

மற்றும் வெறுமை

$$(A^T) = 4 - 3 = 1 \text{ (நிரல்களின் எண்ணிக்கை = 4)}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.59 : கொடுக்கப்பட்ட அணி $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ -6 & 42 & 24 & 54 \\ 21 & -21 & 0 & -15 \end{bmatrix}$ யின் வெறுமையைக் காண்க.

தீர்வு :

$$\text{கொடுக்கப்பட்ட அணி, } A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ -6 & 42 & 24 & 54 \\ 21 & -21 & 0 & -15 \end{bmatrix}$$

முதலில், தரம் (A)-வைக் காணலாம்.

$$R_2 \rightarrow R_2 + 2R_1$$

$$R_3 \rightarrow R_3 - 7R_1 \quad \text{என செய்ய,}$$

$$\text{பிறகு, } A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 42 & 28 & 58 \\ 0 & -21 & -14 & -29 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \rightarrow R_3 + \frac{R_2}{2}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 42 & 28 & 58 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \rightarrow \frac{R_1}{3}, R_2 \rightarrow \frac{R_2}{42}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & 29/21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ஆகவே, $\rho(A) = 2$

ஆதலால், வெறுமை (A) = 4 - 2 = 2 (நிரல்களின் எண்ணிக்கை = 4)

5.13 சமன்பாடுகளின் நேரியல் தொகுப்பு

என் சுற்றுப்புறத்தில், ஒரு விசித்திரமான கடைக்காரர் இருக்கிறார் என்று வைத்துக்கொள்வோம். சில இந்தியர்கள் அரிசியை விட கோதுமையையும், சில இந்தியர்கள் கோதுமையை விட அதிக அரிசியையும் சாப்பிடுகிறார்கள் என்று அவர் உறுதியாக நம்புகிறார். எனவே அவர் இரண்டு நிலையான பாக்கெட்டுகளை மட்டுமே வழங்குகிறார். முதல் பையை N என்று அழைக்கவும், 5 கிலோ கோதுமை மற்றும் 2 கிலோ அரிசி உள்ளது, இரண்டாவது பையை S என்று அழைக்கவும், 2 கிலோ கோதுமை மற்றும் 5 கிலோ அரிசி உள்ளது. ஒரு சுருக்கெழுத்தை கண்டுபிடிப்போம். நாம் (m, n) எழுதும்போதெல்லாம், m கிலோ கோதுமை மற்றும் n கிலோ அரிசி என்று அர்த்தம். இப்போது நான் N ன் 3 பைகளை வாங்கினால், நான் 15 கிலோ கோதுமை மற்றும் 6 கிலோ அரிசியை வாங்குகிறேன் என்று அர்த்தம், அதாவது $3N = 3(5, 2) = (15, 6)$.

இதேபோல், S-ன் 2 பைகள் என்றால் 4 கிலோ கோதுமை மற்றும் 10 கிலோ அரிசி, அதாவது $2S = 2(2, 5) = (4, 10)$.

நான் ஒவ்வொரு பாக்கெட்டிலும் ஒன்றை வாங்கினால், நான் 7 கிலோ கோதுமை மற்றும் 7 கிலோ அரிசியை வாங்கியிருப்பேன், அதாவது,

$$N + S = (5, 2) + (2, 5) = (5 + 2, 2 + 5) = (7, 7).$$

இதனால் எனக்கு m பைகள் N அல்லது n பைகள் S அல்லது இரண்டும் தேவை என்றால் எந்த பிரச்சனையும் இல்லை. எனக்கு 19 கிலோ கோதுமையும் 16 கிலோ அரிசியும் தேவை என்று வைத்துக்கொள்வோம். நான் என்ன செய்வது? நான் Nன் பைகள் x மற்றும் Sன் பைகள் y வாங்க வேண்டும் என்றால் $x(5, 2) + y(2, 5) = (19, 16)$

$$\text{அதாவது, } (5x, 2x) + (2y, 5y) = (19, 16) \text{ அல்லது } (5x + 2y, 2x + 5y) = (19, 16).$$

B. சமப்படித்தான சமன்பாடுகள்

5.13.1.1 அசமப்படித்தான தொகுப்புகள்

i. ஒருங்கமைவு (Consistent):

சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட தீர்வுகளைக் கொண்டிருந்தால், ஒருங்கமைவு ஆகும்.

$$x + 2y = 4 \quad x + 2y = 4$$

$$3x + 2y = 2 \quad 3x + 6y = 12$$

ஒரே ஒரு தீர்வு எண்ணற்ற தீர்வுகள்

ii. ஒருங்கமைவற்றது (Inconsistent)

சமன்பாட்டு தொகுப்புக்கு தீர்வு இல்லை என்றால், அது ஒருங்கமைவற்றது என்று கூறப்படுகிறது.

$$x + 2y = 4$$

$$3x + 6y = 5$$

நேரியச் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பின் ஒருங்கமைவுத் தன்மை (Consistency of a System of Linear equations)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\dots\dots\dots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

அணிக் குறியீட்டில், இந்த சமன்பாடுகள் பின்வருமாறு எழுதப்படுகின்றன.

$$AX = B$$

இங்கு $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி: $C = [A : B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & \vdots & b_n \end{bmatrix}$

a. ஒருங்கமைவு சமன்பாடுகள்

தரம் A = தரம் [A : B] எனில்

i. ஒரே ஒரு தீர்வு : தரம் A = தரம் [A : B] = n (மாறிலிகளின் எண்ணிக்கை)

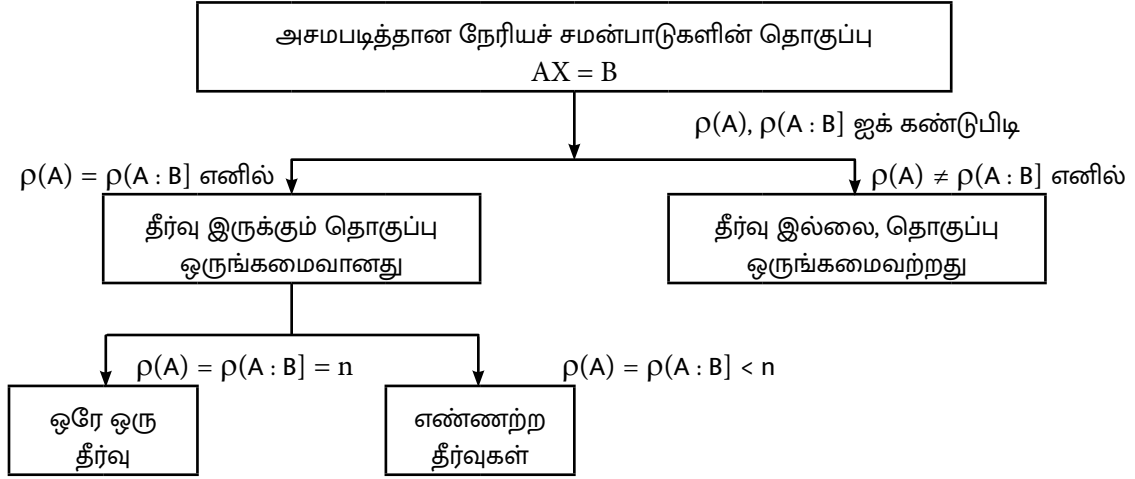
ii. எண்ணற்ற தீர்வுகள்: தரம் A = தரம் [A : B] < n (மாறிலிகளின் எண்ணிக்கை)

b. ஒருங்கமைவற்ற சமன்பாடுகள்

தரம் A ≠ தரம் [A : B] எனில்

எனவே, நேரியச் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு சமப்படித்தானது அல்லது அசமப்படித்தானது என்று நாம் கூறலாம். இது b_i ஐப் பொறுத்தது. பின்னர் தொகுப்பு ஒரே ஒரு தீர்வு அல்லது எண்ணற்ற தீர்வு கொண்டுள்ளதைப் பொறுத்து சமப்படித்தான சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு ஒருங்கமைவு அல்லது ஒருங்கமைவற்றது இருக்கும்.

சுருக்கமாக



n = மாறிகளின் எண்ணிக்கை

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 5.60 :

$$2x + 6y = -11$$

$$6x + 20y - 6z = -3$$

$$6y - 18z = -1$$

என்ற சமன்பாடுகளுக்கு ஒருங்கமைவுத் தன்மை இல்லை என காட்டுக.

நிரூபணம் : அணி வடிவத்தில் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் அமைப்பு

$$AX = B$$

இங்கு $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 6 & 20 & -6 \\ 0 & 6 & -18 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -11 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி

$$C = [A : B] = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 & : & -11 \\ 6 & 20 & -6 & : & -3 \\ 0 & 6 & -18 & : & -1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1, \quad C \sim \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 & : & -11 \\ 0 & 2 & -6 & : & 30 \\ 0 & 6 & -18 & : & -1 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \rightarrow R_3 - 3R_2, \quad C \sim \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 & : & -11 \\ 0 & 2 & -6 & : & 30 \\ 0 & 0 & 0 & : & -91 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \rho(A) = 2 \text{ மற்றும் } \rho(A : B) = 3$$

$$\Rightarrow \rho(A) \neq \rho(A : B)$$

எனவே, சமன்பாடுகளுக்கு ஒருங்கமைவுத் தன்மை இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு 5.61 : ஒருங்கமைவுத் தன்மையை சோதித்து தீர்க்கவும்

$$5x + 3y + 7z = 4$$

$$3x + 26y + 2z = 9$$

$$7x + 2y + 10z = 5$$

தீர்வு : அணி வடிவத்தில் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் அமைப்பு

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 3 & 26 & 2 \\ 7 & 2 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$\text{இங்கு } A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 3 & 26 & 2 \\ 7 & 2 & 10 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix}$$

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி

$$C = [A : B] = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 & : & 4 \\ 3 & 26 & 2 & : & 9 \\ 7 & 2 & 10 & : & 5 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \rightarrow R_1 \left(\frac{1}{5} \right)$$

$$C \sim \begin{bmatrix} 1 & 3/5 & 7/5 & : & 4/5 \\ 3 & 26 & 2 & : & 9 \\ 7 & 2 & 10 & : & 5 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1, R_3 \rightarrow R_3 - 7R_1$$

$$C \sim \begin{bmatrix} 1 & 3/5 & 7/5 & : & 4/5 \\ 0 & 121/5 & -11/5 & : & 33/5 \\ 0 & -11/5 & 1/5 & : & -3/5 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \rightarrow R_3 + \frac{1}{11}R_2$$

$$C \sim \begin{bmatrix} 1 & 3/5 & 7/5 & : & 4/5 \\ 0 & 121/5 & -11/5 & : & 33/5 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \rho(A) = 2 \text{ மற்றும் } \rho(A : B) = 2$$

எனவே, சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவுத் தன்மை உடையவை.

$$\text{ஆனால் } \rho(A) = \rho[A : B] < n$$

(மாறிகளின் எண்ணிக்கை)

எனவே, அதன் தீர்வுகள் என்றற்றவை.

$$\therefore x + \frac{3}{5}y + \frac{7}{5}z = \frac{4}{5}$$

...(1)

$$\frac{121}{5}y - \frac{11}{5}z = \frac{33}{5} \Rightarrow 11y - z = 3$$

$z = k$ என எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$11y = 3 + k$$

$$y = \frac{3}{11} + \frac{k}{11}$$

y மற்றும் z இன் மதிப்பை (1) ல் பிரதியிட,

$$x + \frac{3}{5} \left(\frac{3}{11} + \frac{k}{11} \right) + \frac{7}{5}k = \frac{4}{5}$$

$$x + \frac{9}{55} + \frac{3k}{55} + \frac{7k}{5} = \frac{4}{5}$$

$$x = \frac{4}{5} - \frac{9}{55} - \left(\frac{3k}{55} + \frac{7k}{5} \right)$$

$$x = \frac{7}{11} - \frac{16}{11}k$$

எடுத்துக்காட்டு 5.62 : ஒருங்கமைவுத் தன்மையை சோதித்து தீர்க்கவும்

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5$$

$$6x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 9x_4 = 10$$

$$11x_1 + 12x_2 + 13x_3 + 14x_4 = 15$$

$$16x_1 + 17x_2 + 18x_3 + 19x_4 = 20$$

$$21x_1 + 22x_2 + 23x_3 + 24x_4 = 25$$

தீர்வு : அணி வடிவத்தில் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் அமைப்பு

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 11 & 12 & 13 & 14 \\ 16 & 17 & 18 & 19 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \\ 20 \\ 25 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி

$$C = [A : B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & : & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & : & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & : & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & : & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & : & 25 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \rightarrow R_2 - 6R_1, R_3 \rightarrow R_3 - 11R_1, R_4 \rightarrow R_4 - 16R_1, R_5 \rightarrow R_5 - 21R_1$$

$$C \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & : & 5 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & : & -20 \\ 0 & -10 & -20 & -30 & : & -40 \\ 0 & -15 & -30 & -45 & : & -60 \\ 0 & -20 & -40 & -60 & : & -80 \end{bmatrix} \Rightarrow C \sim (-1)^4 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & : & 5 \\ 0 & 5 & 10 & 15 & : & 20 \\ 0 & 10 & 20 & 30 & : & 40 \\ 0 & 15 & 30 & 45 & : & 60 \\ 0 & 20 & 40 & 60 & : & 80 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2, R_4 \rightarrow R_4 - 3R_2, R_5 \rightarrow R_5 - 4R_2$$

$$C \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & : & 5 \\ 0 & 5 & 10 & 15 & : & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \rho(A) = 2 \text{ மற்றும் } \rho(A : B) = 2$$

எனவே, சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவுத் தன்மை உடையவை.

ஆனால் $\rho(A) = \rho[A : B] < n$ (மாறிகளின் எண்ணிக்கை)

எனவே, அதன் தீர்வுகள் எண்ற்றவை.

எடுத்துக்காட்டு 5.63 : k இன் எந்த மதிப்புக்கு,

$$x + y + z = 1$$

$$2x + y + 4z = k$$

$$4x + y + 10z = k^2 \text{ என்ற தொகைப்புக்கு ஒரு தீர்வு உள்ளது}$$

தீர்வு : அணி வடிவத்தில் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் அமைப்பு

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ k \\ k^2 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி

$$C = [A : B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 1 \\ 2 & 1 & 4 & : & k \\ 4 & 1 & 10 & : & k^2 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1, R_3 \rightarrow R_3 - 4R_1 \quad C \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 1 \\ 0 & -1 & 2 & : & k-2 \\ 0 & -3 & 6 & : & k^2-4 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \rightarrow R_3 - 3R_2 \quad C \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 1 \\ 0 & -1 & 2 & : & k-2 \\ 0 & 0 & 0 & : & k^2-3k+2 \end{bmatrix}$$

கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்புக்கு தீர்வு இருந்தால், பிறகு

$$\rho(A) = \rho(A : B)$$

மற்றும் $p(A:B) = 2$ $k^2 - 3k + 2 = 0$ எனில்

$$k^2 - 2k - k + 2 = 0$$

$$(k-2)(k-1) = 0$$

$$k = 2, k = 1$$

நிலை I : $k = 1$ என இருக்கும்போது,

$$x + y + z = 1 \quad \dots(1)$$

$$-y + 2z = 1 - 2 = -1 \quad \dots(2)$$

$z = \lambda$ என எடுத்துக் கொள்வோம்.

$z = \lambda$ என (2) ல் பிரதியிட, $y = 2\lambda + 1$

y மற்றும் z இன் மதிப்பை (1) ல் பிரதியிட,

$$x + (2\lambda + 1) + \lambda = 1$$

$$x + 3\lambda + 1 = 1$$

$$x = -3\lambda$$

நிலை II : $k = 2$ என இருக்கும்போது,

$$x + y + z = 1 \quad \dots(3)$$

$$-y + 2z = 2 - 2 = 0 \quad \dots(4)$$

$z = c$ என எடுத்துக் கொள்வோம்.

$z = c$ என (4) ல் பிரதியிட, $-y + 2c = 0$

$$y = 2c$$

y மற்றும் z இன் மதிப்பை (4) ல் பிரதியிட,

$$x + 2c + c = 1$$

$$x = 1 - 3c$$

எடுத்துக்காட்டு 5.64 : λ, μ -இன் எம்மதிப்புகளுக்கு

$$2x + 3y + 5z = 9$$

$$7x + 3y - 2z = 8$$

$$2x + 3y + \lambda z = \mu$$

என்ற சமன்பாடுகள் (i) யாதொரு தீர்வும் பெற்றிறாது (ii) ஒரே ஒரு தீர்வைப் பெற்றிருக்கும்

(iii) எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும் என்பதனை ஆராய்க.

தீர்வு : அணி வடிவத்தில் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் அமைப்பு

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ \mu \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி

$$C = [A : B] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & : & 9 \\ 7 & 3 & -2 & : & 8 \\ 2 & 3 & \lambda & : & \mu \end{bmatrix}$$

$$R_2 \rightarrow R_2 - \frac{7}{2}R_1, R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \quad C \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & : & 9 \\ 0 & -15/2 & -39/2 & : & -47/2 \\ 0 & 0 & \lambda - 5 & : & \mu - 9 \end{bmatrix}$$

i. தீர்வு இல்லை : $\rho(A) \neq \rho(A : B)$

$$\lambda - 5 = 0 \text{ மற்றும் } \mu - 9 \neq 0$$

$$\lambda = 5 \text{ மற்றும் } \mu \neq 9$$

ii. எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள் : $\rho(A) = \rho(A : B) < n$

$$\lambda - 5 = 0 \text{ மற்றும் } \mu - 9 = 0$$

$$\lambda = 5 \text{ மற்றும் } \mu = 9$$

iii. ஒரே ஒரு தீர்வு : $\rho(A) = \rho(A : B) = n$

$$\lambda - 5 \neq 0, \mu \text{ ஆனது ஏதாவது ஒரு மெய்யெண்}$$

$$\lambda \neq 5, \mu \text{ ஆனது ஏதாவது ஒரு மெய்யெண்}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.65 : λ, μ -இன் எம்மதிப்புகளுக்கு

$$x + y + z = 6$$

$$x + 2y + 3z = 10$$

$$x + 2y + \lambda z = \mu$$

என்ற சமன்பாடுகள் (i) யாதொரு தீர்வும் பெற்றிறாது (ii) ஒரே ஒரு தீர்வைப் பெற்றிருக்கும்

(iii) எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும் என்பதனை ஆராய்க.

தீர்வு : அணி வடிவத்தில் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் அமைப்பு

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ \mu \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி

$$C = [A : B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 6 \\ 1 & 2 & 3 & : & 10 \\ 1 & 2 & \lambda & : & \mu \end{bmatrix}$$

$$R_2 \rightarrow R_2 - R_1, R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \quad C \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 6 \\ 0 & 1 & 2 & : & 4 \\ 0 & 1 & \lambda - 1 & : & \mu - 6 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \rightarrow R_3 - R_2 \quad C \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 6 \\ 0 & 1 & 2 & : & 4 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 & : & \mu - 10 \end{bmatrix}$$

i. தீர்வு இல்லை : $\rho(A) \neq \rho(A:B)$

$$\lambda - 3 = 0 \text{ மற்றும் } \mu - 10 \neq 0$$

$$\lambda = 3 \text{ மற்றும் } \mu \neq 10$$

ii. ஒரே ஒரு தீர்வு : $\rho(A) = \rho(A:B) = n$

$$\lambda - 3 \neq 0 \text{ } \mu \text{ ஆனது ஏதாவது ஒரு மெய்யெண்}$$

$$\lambda \neq 3 \text{ } \mu \text{ ஆனது ஏதாவது ஒரு மெய்யெண்}$$

iii. எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள் : $\rho(A) = \rho(A:B) < n$

$$\lambda - 3 = 0 \text{ மற்றும் } \mu - 10 = 0$$

$$\lambda = 3 \text{ மற்றும் } \mu = 10$$

எடுத்துக்காட்டு 5.66 :

$$-2x + y + z = a$$

$$x - 2y + z = b$$

$$x + y - 2z = c$$

என்ற தொகுப்புக்கு தீர்வு இல்லை என நிரூபி. இல்லாவிடில் $a + b + c = 0$. எப்பொழுது அதற்கு எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள் இருக்கும்? $a = 1$, $b = 1$ மற்றும் $c = -2$ ல் தீர்வுகளைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு : அணி வடிவத்தில் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் அமைப்பு

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி

$$C = [A:B] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & : & a \\ 1 & -2 & 1 & : & b \\ 1 & 1 & -2 & : & c \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftrightarrow R_2, \quad C \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & : & b \\ -2 & 1 & 1 & : & a \\ 1 & 1 & -2 & : & c \end{bmatrix}$$

$$R_2 \rightarrow R_2 + 2R_1, R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \quad C \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & : & b \\ 0 & -3 & 3 & : & a+b \\ 0 & 3 & -3 & : & c-b \end{bmatrix}$$

$$R_3 \rightarrow R_3 + R_2 \quad C \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & : & b \\ 0 & -3 & 3 & : & a+2b \\ 0 & 0 & 0 & : & a+b+c \end{bmatrix}$$

நிலை I : $a + b + c \neq 0$ எனில்

$$\Rightarrow \rho(A) = 2 \text{ மற்றும் } \rho(A : B) = 3$$

$$\therefore \rho(A) \neq \rho(A : B)$$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் அமைப்பு ஒருங்கமைவுத் தன்மை இல்லை அதனால் தீர்வு இல்லை.

நிலை II : $a + b + c = 0$ எனில்

$$\Rightarrow \rho(A) = 2 \text{ மற்றும் } \rho(A : B) = 2$$

$$\therefore \rho(A) = \rho(A : B)$$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் அமைப்பு ஒருங்கமைவுத் தன்மையுடையது.

$$\text{ஆனால் } \rho(A) \neq \rho(A : B) < n$$

எனவே, எண்ணற்ற தீர்வுகள் இருக்கும்

நிலை III : $a = 1, b = 2, c = -2$ என பிரதியிட

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x - 2y + z = 1 \quad \dots(1)$$

$$-3y + 3z = 3$$

$$\Rightarrow -y + z = 1 \quad \dots(2)$$

$z = k$ என எடுத்துக் கொள்வோம்,

$$y = k - 1$$

y மற்றும் z இன் மதிப்பை (1) ல் பிரதியிட,

$$x - 2(k - 1) + k = 1$$

$$x - 2k + 2 + k = 1$$

$$x - k + 2 = 1$$

$$x = k - 1$$

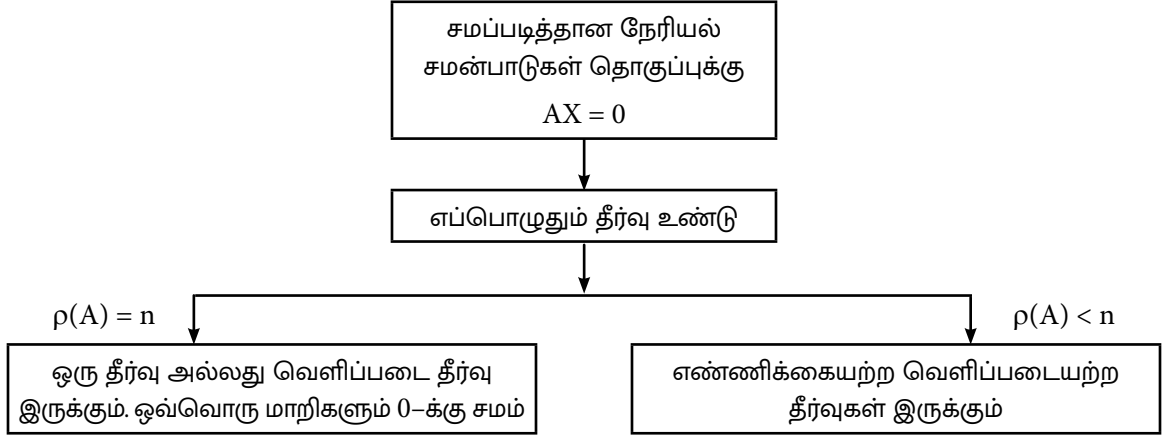
$$\therefore x = k - 1, y = k - 1, z = k$$

5.13.1.2 சமப்படித்தான சமன்பாடுகள்

$AX = 0$ என்ற சமப்படித்தான நேரியல் சமன்பாடுகளின் தொகுப்புக்கு, .

- $X = 0$ எப்போதும் ஒரு தீர்வாகும். ஒவ்வொரு மாறிகளுக்கும் மதிப்பு பூஜ்ஜியம் எனில் இந்த தீர்வானது ஏதுமற்ற தீர்வு அல்லது வெளிப்படைத்தீர்வு என்று அழைக்கப்படுகிறது. எனவே சமப்படித்தான தொகுப்பு எப்போதும் ஒருங்கமைவுத் தன்மையானதாக இருக்கும்.
- $\rho(A) =$ மாறிகளின் எண்ணிக்கை என்றால் தொகுப்புக்கு வெளிப்படைத் தீர்வு மட்டுமே உள்ளது.
- $\rho(A) <$ மாறிகளின் எண்ணிக்கை என்றால் தொகுப்புக்கு எண்ணிக்கையற்ற வெளிப்படையற்ற தீர்வுகள் இருக்கும்

சுருக்கம் :



எடுத்துக்காட்டு 5.67 :

$$2x + y + 2z = 0, \quad x + y - 3z = 0, \quad 4x + 3y + bz = 0$$

என்ற சமப்படித்தான சமன்பாடுகளின் தொகுப்புக்கு வெளிப்படைத் தீர்வு மற்றும் வெளிப்படையற்ற தீர்வு இருந்தால் b ன் மதிப்பு காண்க. அணி முறையை பயன்படுத்தி வெளிப்படையற்ற தீர்வைக் காண்க.

தீர்வு :

i. வெளிப்படைத் தீர்வு எனும் போது : $x = 0, y = 0, z = 0$ என்பதனால் b எந்த மதிப்பையும் கொண்டிருக்கலாம்.

ii. வெளிப்படையற்ற தீர்வு எனும் போது : அணி வடிவத்தில் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் அமைப்பு

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 4 & 3 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$AX = 0$$

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி

$$C = [A : B] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & : & 0 \\ 1 & 1 & -3 & : & 0 \\ 4 & 3 & b & : & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftrightarrow R_2, \quad C \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & : & 0 \\ 2 & 1 & 2 & : & 0 \\ 4 & 3 & b & : & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1, \quad R_3 \rightarrow R_3 - 4R_1 \quad C \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & : & 0 \\ 0 & -1 & 8 & : & 0 \\ 0 & -1 & b+12 & : & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \rightarrow R_3 - R_2 \quad C \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & : & 0 \\ 0 & -1 & 8 & : & 0 \\ 0 & 0 & b+4 & : & 0 \end{bmatrix}$$

வெளிப்படையற்ற தீர்வு எனும்போது

$$\rho(A) = \rho(A : B) < n$$

$$b+4=0$$

$$b = -4$$

$$x + ky + 3z = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 5.68 : $4x + 3y + kz = 0$ என்ற சமன்பாடுகளின் தொகுப்புக்கு வெளிப்படையற்றத் தீர்வு

$$2x + y + 2z = 0$$

இருக்குமேயானால் k ன் மதிப்பு காண்க

தீர்வு : அணி வடிவத்தில் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் அமைப்பு

$$\begin{bmatrix} 1 & k & 3 \\ 4 & 3 & k \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$AX = 0$$

$$\text{விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி} \quad C = [A : B] = \begin{bmatrix} 1 & k & 3 & : & 0 \\ 4 & 3 & k & : & 0 \\ 2 & 1 & 2 & : & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftrightarrow R_3, \quad C \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & : & 0 \\ 4 & 3 & k & : & 0 \\ 1 & k & 3 & : & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1, R_3 \rightarrow R_3 - \frac{1}{2}R_1, \quad C \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & : & 0 \\ 0 & 1 & k-4 & : & 0 \\ 0 & k-(1/2) & 2 & : & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \rightarrow R_3 - \left(k - \frac{1}{2}\right)R_2, \quad C \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & : & 0 \\ 0 & 1 & k-4 & : & 0 \\ 0 & 0 & 2 - (k-1/2)(k-4) & : & 0 \end{bmatrix}$$

வெளிப்படையற்ற தீர்வு எனும்போது

$$\rho(A) = \rho(A : B) < n$$

$$2 - (k-1/2)(k-4) = 0$$

$$2 - k^2 + 4k + \frac{k}{2} - 2 = 0$$

$$-k^2 + \frac{9}{2}k = 0$$

$$k \left(-k + \frac{9}{2} \right) = 0$$

$$k = 0, k = \frac{9}{2}$$

பயிற்சி 5.10

பின்வரும் சமன்பாடுகள் தொகுப்பின் ஒருங்கமைவுத் தன்மையை சரிபார்க்கவும். தீர்வையும் கண்டறியவும்.

1. $x + 2y - z = 3$ 2. $x + 3y - z = 4$
 $3x - y + 2z = 1$ $2x + y + z = 7$
 $2x - 2y + 3z = 2$ $2x - 4y + 4z = 6$
 $x - y + z = -1$ $3x + 4y = 1$
3. $x_1 + 2x_2 - x_3 = 6$ $x - 4y - 3z = -16$
 $3x_1 - 1x_2 + 2x_3 = 3$ 4. $2x + 7y + 12z = 48$
 $4x_1 - 3x_2 + x_3 = 9$ $4x - y + 6z = 16$
 $5x - 5y + 3z = 0$

5. பின்வரும் சமன்பாட்டின் ஒருங்கமைவுத் தன்மையை விவாதி.

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + 4t &= 0 \\ 2x + 3y + 4z - 1 &= 0 \\ 3x + 4y + t &= 2 \\ 4x + z + 2t &= 3 \end{aligned}$$

ஒருங்கமைவுத் தன்மையாக இருந்தால் தீர்வைக் கண்டுபிடி.

6. பின்வரும் சமன்பாடுகள் λ -ன் எந்த மதிப்புக்கு ஒரே ஒரு தீர்வைப் பெறுவதில் தோல்வி அடைகிறது ?

$$\begin{aligned} 3x - y + \lambda z &= 0 \\ 2x + y + z &= 2 \\ x + 2y - \lambda z &= -1 \end{aligned}$$

சமன்பாடுகளில், λ -ன் மதிப்புக்கு ஏதேனும் தீர்வு இருக்குமா?

7. தர சோதனையைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு ஒருங்கமைவற்றது என்பதைக் காட்டுக:

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 4 \\ 3x - y + z &= 6 \\ 4x - y + 2z &= 7 \\ -x + y - z &= 9 \end{aligned}$$

8. பின்வரும் சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைவு என்பதைக் காட்டி அவற்றைத் தீர்க்கவும்:

$$\begin{aligned} x + 2y - 5z &= -9 \\ 3x - y + 2z &= 5 \\ 2x + 3y - z &= 3 \\ 4x - 5y + z &= -3 \end{aligned}$$

9. சமன்பாடுகளின் தொகுப்பைத் தீர்க்கவும்: குறிப்பாக $\lambda = 2$ என இருக்கும்போது,

$$\lambda x + 2y - 2z = 1$$

$$4x + 2\lambda y - z = 2$$

$$6x + 6y + \lambda z = 3$$

$$x + y + 5z = 0$$

10. $x + 2y + 3az = b$

$$x + 3y + az = 1$$

என்ற சமன்பாடுகளுக்கு a மற்றும் b ன் எந்த மதிப்புகளுக்கு (i) யாதொரு தீர்வும் பெற்றிறாது (ii) ஒரே ஒரு தீர்வைப் பெற்றிருக்கும் (iii) எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகளைப் பெற்றிருக்கும்

பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பைத் தீர்க்கவும்:

$$\begin{array}{ll} 11. \begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ -3x + y - 4z = 0 \\ 7x - 3y - 9z = 0 \\ 4x - 2y + 5z = 0 \end{array} & 12. \begin{array}{l} x + 3y - 2z = 0 \\ 2x - y + 4z = 0 \\ x - 11y + 14z = 0 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 13. \begin{array}{l} 2w + 3x - y - z = 0 \\ 4w - 6x - 2y + 2z = 0 \\ -6w + 12x + 3y - 4z = 0 \\ 8w - 24x - 4y + 8z = 0 \end{array} & 14. \begin{array}{l} 3x + 4y - z - 6w = 0 \\ 2x + 3y + 2z - 3w = 0 \\ 2x + y - 14z - 9w = 0 \\ x + 3y + 13z + 3w = 0 \end{array} \end{array}$$

15. பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு வெளிப்படையற்ற தீர்வைக் கொண்டிருக்குமேயானால் k இன் மதிப்பைக் கண்டறியவும் :

$$(3k - 8)x + 3y + 3z = 0$$

$$3x + (3k - 8)y - 3z = 0$$

$$3x + 3y + (3k - 8)z = 0$$

$$x + 2y + 3z = \lambda x$$

16. $3x + y + 2z = \lambda y$ என்ற சமன்பாடுகளுக்கு 6 என்ற பூஜ்யமற்ற தீர்வு இருக்குமேயானால் λ என்ற

$$2x + 3y + z = \lambda z$$

ஒரே மெய் மதிப்பு மட்டுமே இருக்கும் என்பதைக் காட்டுக.

விடைகள்

2. தீர்வு இல்லை. 8. $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ 9. $x = \frac{1}{2} - k, y = k, z = 0$

10. $i. a = 1, b \neq \frac{1}{2}$ $ii. a \neq 1, b \in R$ $iii. a = 1, b = \frac{1}{2}$ 11. $x = y = z = 0$

12. $x = \frac{-10}{7}k, y = \frac{8}{7}k, z = k$ 13. $x = \frac{1}{3}k_1, y = k_2, z = k_1, w = \frac{1}{2}k_2$

14. $x = 11k_1 + 6k_2, y = -8k_1 - 3k_2, z = k_1, w = k_2$

15. $k = 11/3$ மற்றும் $k = 2/3$ எனில், வெளிப்படையற்ற தீர்வு

5.14 ஒரு அணியின் ஐகன் மதிப்புகள் மற்றும் ஐகன் வெக்டர்கள்

ஒரு சதுர அணி A என்க மற்றும் ' X ' என்பது ஒரு நிரல் வெக்டர், பின்னர் அணியின் சமன்பாடு

$$AX = \lambda X$$

n சமன்பாடுகளுக்கு சமம் எனில்

$$\left. \begin{aligned} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n &= 0 \end{aligned} \right\} \dots(1)$$

நேரிய சமபடித்தன சார்புகளின் தொகுப்பு (1)-ல் எப்பொழுதும் ' n ' மாறிகளின் வெளிப்படைத் தீர்வுகள் (Trivial solution) $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

ஒரு வெளிப்படையற்ற தீர்வினை (Non-trivial solution) காண, (1) இல் அணிக்கோவைகளின் கெழு மறைந்து விடும்

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \dots(2)$$

சமன்பாடு (2) இல் பாகை n , A என்பது பண்பு சமன்பாடு என்று அழைக்கப்படுகிறது.

$$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + \dots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0 \dots(3)$$

$$\text{குறிப்பாக, } p_1 = -(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}) = -(\text{trace } A) \dots(4)$$

$$\text{மற்றும் } p_n = (-1)^n |a_{ij}| = (-1)^n |A| \dots(5)$$

சமன்பாட்டின் இடது புறம் (3) பண்பு பல்லுறுப்புக்கோவை (Characteristic Equation) என்று அழைக்கப்படுகிறது.

சமன்பாடு (3) இல் மூலங்கள் இருக்கும். இவை அணி A இன் பண்புகளின் (அல்லது உள்ளுறை) மூலங்கள் அல்லது ஐகன் மதிப்புகள் என்று அழைக்கப்படுகின்றன. ஒவ்வொரு மூலமும் சமன்பாடு (1)-இல் பூஜ்ஜியமற்ற தீர்வைக் கொண்டிருக்கும்.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

இது பண்பு வெக்டர் அல்லது ஐகன் வெக்டர் என அழைக்கப்படுகிறது.

அணி A இல் உள்ள ஐகன் மதிப்புகள்முறையே $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, நாம் இதிலிருந்து பண்பு சமன்பாட்டை எழுதலாம்

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) = 0$$

$$\text{அல்லது } \lambda^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = 0$$

சமன்பாடு (3) உடன் ஒப்பிடுக, நாம் அதை பார்க்க முடியும்

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = -p_1 = \text{trace } A \quad [(4)\text{-லிருந்து}]$$

$$\text{மற்றும் } \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = (-1)^n p_n = \det.(A) \quad [(5)\text{-லிருந்து}]$$

குறிப்புகள்

1. ஐகன் மதிப்புகளை பண்பு மதிப்பு, சரியான மதிப்பு, உள்ளுறை மதிப்பு அல்லது நிறமாலை மதிப்பு என்றும் அழைக்கலாம்.
2. இதேபோல், ஐகன் வெக்டர்களை பண்பு வெக்டர், சரியான வெக்டர், உள்ளுறை வெக்டர் அல்லது நிறமாலை வெக்டர் என்றும் அழைக்கலாம்.

5.14.1 ஐகன் மதிப்புகளின் பண்புகள்

- a. ஒரு சதுர அணி A-இன் ஐகன் மதிப்பும் மற்றும் அதன் A' -நிரை நிரல் மதிப்பும் ஒன்றுதான்.
- b. ஒரு அணியின் ஐகன் மதிப்புகளின் கூட்டுத்தொகையானது அதில் உள்ள கொள்கை மூலவிட்ட உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகைக்கு சமம்.
- c. அணி A-இன் ஐகன் மதிப்புகளின் பெருக்கல், அதன் $\det(A)$ க்கு சமம். அதாவது $|A|$
- d. பூச்சியம்யற்ற கோவை அணி A- இன் ஐகன் மதிப்பு λ எனில், A^{-1} இன் ஐகன் மதிப்பு $\frac{1}{\lambda}$ ஆகும்.
- e. ஒரு செங்குத்து அணியின் ஐகன் மதிப்பு λ . மேலும் $\frac{1}{\lambda}$ என்பது இன்னொரு மதிப்பு ஆகும்.
- f. ஒரு சதுர அணி A-இன் ஐகன் மதிப்புகள் $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ எனில் A^m ன் ஐகன் மதிப்புகள் $\lambda_1^m, \lambda_2^m, \dots, \lambda_n^m$ (m ஒரு நேர்மறை முழு எண்)
- g. தன்னடக்கு அணியின் ஐகன் மதிப்புகள் முறையே 0 அல்லது 1 ஆகும்.
- h. முக்கோண அணி மற்றும் மூலவிட்ட அணியின் ஐகன் மதிப்புகள் அந்த அணியின் மூலவிட்ட உறுப்புகளுக்கு சமம்.

நிருபணம் : d. X என்பது ஐகன் வெக்டர் எனில் அதனுடன் தொடர்புடைய அணி A-ன் ஐகன் மதிப்பு λ , பிறகு

$$AX = \lambda X$$

இருபுறமும் A^{-1} ஆல் பெருக்க

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}(\lambda X)$$

$$\Rightarrow (A^{-1}A)X = \lambda A^{-1}X$$

$$\Rightarrow IX = \lambda A^{-1}X$$

$$\Rightarrow = \frac{1}{\lambda} X = A^{-1}X \quad [\because IX = X]$$

$$A^{-1} \text{ ஐகன் மதிப்பு } \frac{1}{\lambda}.$$

நிருபணம் : f. X என்பது ஐகன் வெக்டர் எனில் அதனுடன் தொடர்புடைய அணி A-ன் ஐகன் மதிப்பு λ , பிறகு

$$AX = \lambda X$$

இருபுறமும் A ஆல் பெருக்க,

$$A(AX) = A(\lambda X) \Rightarrow (AA)X = \lambda(AX)$$

$$\Rightarrow A^2 X = \lambda AX$$

$$\Rightarrow A^2 X = \lambda^2 X \quad [AX = \lambda X]$$

மீண்டும் இருபுறமும் A ஆல் பெருக்க,

$$A^3 X = \lambda^3 X$$

அதே வழியில் தொடரவும்,

$$A^m X = \lambda^m X$$

இங்கு λ_m என்பது ஐகன் மதிப்பு என்பதைக் காட்டுகிறது, A^m ($m > 0$)

எனவே, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, என்பன A-ன் ஐகன் மதிப்புகள் எனலாம். பிறகு $\lambda_1^m, \lambda_2^m, \dots, \lambda_n^m$, என்பன A^m ஐகன் மதிப்புகளாக இருக்கும்.

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 5.69 : அணி $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ -ன் சிறப்பியல்பு பல்லுறுப்புக்கோவைகளைக் காண்க.

தீர்வு : A என்பது சிறப்பியல்பு அணி,

$$\begin{aligned} [A - \lambda I] &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 3 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A என்பது சிறப்பியல்பு பல்லுறுப்புக்கோவை அணி,

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 3 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 15$$

எடுத்துக்காட்டு 5.70 : அணி $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ அனைத்து ஐகன் மதிப்புகள் மற்றும் ஐகன் வெக்டர் கண்டிபிடி.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட அணியின் சிறப்பியல்பு சமன்பாடு,

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 8-\lambda & -6 & 2 \\ -6 & 7-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (8-\lambda)[(7-\lambda)(3-\lambda)-16]+6[-6(3-\lambda)+8]+2[24-2(7-\lambda)]=0$$

$$\Rightarrow (8-\lambda)(\lambda^2-10\lambda+5)+6(-10+6\lambda)+2(10+2\lambda)=0$$

$$\Rightarrow 8\lambda^2-80\lambda+40-\lambda^3+10\lambda^2-5\lambda-60+36\lambda+20+4\lambda=0$$

$$\Rightarrow -\lambda^3+18\lambda^2-45\lambda=0$$

$$\Rightarrow \lambda^3-18\lambda^2+45\lambda=0$$

$$\Rightarrow \lambda(\lambda^2-18\lambda+45)=0$$

$$\Rightarrow \lambda=0, \lambda^2-18\lambda+45=0$$

$$\Rightarrow \lambda^2-15\lambda-3\lambda+45=0$$

$$\Rightarrow \lambda(\lambda-15)-3(\lambda-15)=0$$

$$\Rightarrow \lambda-3=0; \lambda-15=0$$

$$\Rightarrow \lambda=3; \lambda=15; \lambda=0$$

$\lambda = 0, 3, 15$ ஆகியன ஐகன் மதிப்புகள்.

ஐகன் வெக்டரை கண்டிப்பிக்க:

$$\begin{bmatrix} 8-\lambda & -6 & 2 \\ -6 & 7-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 3-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda = 0 \quad \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 8x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 0 \quad \dots(1)$$

$$\Rightarrow -6x_1 + 7x_2 - 4x_3 = 0 \quad \dots(2)$$

$$\Rightarrow 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0 \quad \dots(3)$$

சமன்பாடு (1) யை 2-ஆல் பெருக்கி, அதனை சமன்பாடு (2) உடன் கூட்டுக,

$$10x_1 - 5x_2 = 0$$

$$\Rightarrow 10x_1 = 5x_2$$

$$\Rightarrow x_2 = 2x_1 \quad \dots(4)$$

சமன்பாடு (3) யை 2-ஆல் பெருக்கி, அதனை சமன்பாடு (2) உடன் கூட்டுக,

$$-5x_2 + 5x_3 = 0$$

$$\Rightarrow -5x_2 = -5x_3$$

$$\Rightarrow x_2 = x_3 \quad \dots(5)$$

சமன்பாடு (4) மற்றும் (5) ல் இருந்து,

$$\therefore 2x_1 = x_2 = x_3 \Rightarrow \frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{2}$$

$$\lambda = 0 \text{ உடன் தொடர்புடைய ஐகன் வெக்டர் } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

[சிறப்பியல்பு சமன்பாடு]

$$\begin{bmatrix} 8-\lambda & -6 & 2 \\ -6 & 7-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 3-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda = 3 \quad \begin{bmatrix} 5 & -6 & 2 \\ -6 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 5x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 0 \quad \dots(6)$$

$$\Rightarrow -6x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 0 \quad \dots(7)$$

$$\Rightarrow 2x_1 - 4x_2 - 0x_3 = 0 \quad \dots(8)$$

சமன்பாடு (8) ல் இருந்து,

$$2x_1 = 4x_2$$

$$\Rightarrow x_1 = 2x_2$$

சமன்பாடு (7)- ல் $x_1 = 2x_2$ பிரதியிட,

$$x_3 = -2x_2$$

$$x_1 = 2x_2 = -x_3$$

$$\therefore \frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{1} = \frac{x_3}{-2}$$

$$\lambda = 3 \text{ உடன் தொடர்புடைய ஐகன் வெக்டர் } \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 8-\lambda & -6 & 2 \\ -6 & 7-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 3-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda = 15 \quad \begin{bmatrix} 8-15 & -6 & 2 \\ -6 & 7-15 & -4 \\ 2 & -4 & 3-15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -7 & -6 & 2 \\ -6 & -8 & -4 \\ 2 & -4 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 7x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 0 \quad \dots(9)$$

$$\Rightarrow -6x_1 - 8x_2 - 4x_3 = 0 \quad \dots(10)$$

$$\Rightarrow 2x_1 - 4x_2 - 12x_3 = 0 \quad \dots(11)$$

சமன்பாடு (11) யை 3-ஆல் பெருக்கி, அதனை சமன்பாடு (10) உடன் கூட்டுக,

$$x_2 = -2x_3$$

சமன்பாடு (9) யை 2-ஆல் பெருக்கி, அதனை சமன்பாடு (10) உடன் கூட்டுக,

$$x_1 = -x_2$$

$$x_1 = -x_2 = 2x_3$$

$$\therefore \frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{-2} = \frac{x_3}{1}$$

$$\lambda = 15 \text{ உடன் தொடர்புடைய ஐகன் வெக்டர் } \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.71 : கொடுக்கப்பட்ட $\begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ அணியில் இருந்து அனைத்து ஐகன் மதிப்பு,

ஐகன் வெக்டர் மற்றும் ஐகன் அடுக்களம் ஆகியவற்றை கண்டிப்பிடுக்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட அணியின் சிறப்பியல்பு சமன்பாடு,

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & -3 \\ 2 & 1-\lambda & -6 \\ -1 & -2 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (-2-\lambda)[-(1-\lambda)\lambda-12]-2(-2\lambda-6)-3(-4+1-\lambda)=0$$

$$\Rightarrow (-2-\lambda)(-\lambda+\lambda^2-12)-2(-2\lambda-6)-3(-3-\lambda)=0$$

$$\Rightarrow \lambda^3 + \lambda^2 - 21\lambda - 45 = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda+3)(\lambda+3)(\lambda-5) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -3, -3, -5$$

$\lambda = -3, -3, -5$ ஆகியன ஐகன் மதிப்புகள்

$\lambda = -3$ உடன் தொடர்புடைய ஐகன் வெக்டர் $[A + 3I]X = 0$

$$\begin{bmatrix} -2+3 & 2 & -3 \\ 2 & 1+3 & -6 \\ -1 & -2 & 0+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$$x + 2y - 3z = 0$$

$$2x + 4y - 6z = 0$$

$$-x - 2y + 3z = 0$$

மேலே உள்ள கணத்திலிருந்து, $x + 2y - 3z = 0$ இதற்கு ஒரே ஒரு சாரா சமன்பாடு இருக்கும்.

$z = 0$ என்க,

$$x + 2y = 0$$

$$\Rightarrow x = -2y$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{-1}, z = 0$$

$\lambda = -3$ எனும்போது $(2, -1, 0)$ என்பன ஐகன் வெக்டர் ஆகும்.

மற்றுமொரு ஐகன் வெக்டரை கண்டிப்பிடுக்க $\lambda = -3$ பிரதியிட

$y = 0$ என்க,

$$x - 3z = 0$$

$\Rightarrow$

$$x = 3z$$

$\Rightarrow$

$$\frac{x}{3} = \frac{z}{1}, y = 0$$

$\lambda = -3$ எனும்போது $(3, 1, 0)$ என்பன மற்றுமொரு ஐகன் வெக்டர் ஆகும்.

$\lambda = -5$, ஐகன் வெக்டர் என்பது:

$$[A + 5I]X = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2-5 & 2 & -3 \\ 2 & 1-5 & -6 \\ -1 & -2 & 0-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$$-7x + 2y - 3z = 0$$

...(1)

$$2x + 4y - 6z = 0$$

...(2)

$$-x - 2y - 5z = 0$$

...(3)

சமன்பாடு (1) யை 2-ஆல் பெருக்கி, அதனை சமன்பாடு (2) உடன் கூட்டுக,

$$-12x - 12z = 0$$

$$-12x = 12z$$

$\Rightarrow$

$$x = -z$$

சமன்பாடு (2) யை 2-ஆல் பெருக்கி, அதனை சமன்பாடு (2) உடன் கூட்டுக,

$$y = -2z$$

$\therefore$

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-1}$$

$\lambda = 5$ உடன் தொடர்புடைய ஐகன் வெக்டர் $(1, 2, -1)$

அனைத்து ஐகன் வெக்டர்களும் L.I மற்றும் R^3 - ன் படிவ அடுக்களம்.

ஐகன் அடுக்களம் என்பது $\{(2, -1, 0), (3, 0, 1), (1, 2, -1)\}$ ஆகும்..

எடுத்துக்காட்டு 5.72 : கொடுக்கப்பட்ட $\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ அணியில் இருந்து அனைத்து ஐகன் மதிப்பு,

ஐகன் வெக்டர் மற்றும் ஐகன் அடுக்களம் ஆகியவற்றை கண்டிப்பிடி.

தீர்வு :

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ என்க.}$$

கொடுக்கப்பட்ட அணியின் சிறப்பியல்பு சமன்பாடு,

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 3-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (6-\lambda)[(3-\lambda)^2 - 1] + 2[-2(3-\lambda) + 2] + 2[2 - 2(3-\lambda)] = 0$$

$$\Rightarrow (6-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8) + 2(2\lambda - 4) + 2(2\lambda - 4) = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 36\lambda + 32 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^3 - 12\lambda^2 + 36\lambda - 32 = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda - 2)(\lambda^2 - 10\lambda + 16) = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda - 8) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 2, 2, 8$$

$\lambda = 2, 2, 8$ ஆகியன ஐகன் மதிப்புகள்

$\lambda = 2$, ஐகன் வெக்டர் என்பது:

$$[A - 2I]X = 0$$

$$\begin{bmatrix} 6-2 & -2 & 2 \\ -2 & 3-2 & -1 \\ 2 & -1 & 3-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$4x - 2y + 2z = 0$$

$$-2x + y - z = 0$$

$$2x - y + z = 0$$

இங்கு, $2x - y + z = 0$ இதற்கு ஒரே ஒரு சாரா சமன்பாடு இருக்கும்

$z = 0$ என்க,

$$2x - y = 0$$

$$\Rightarrow 2x = y$$

$$\Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{y}{2}, z = 0$$

$\lambda = 2$ எனும்போது $(1, 2, 0)$ என்பன ஐகன் வெக்டர் ஆகும்.

மீண்டும் $\lambda = 2$ மற்றுமொரு ஐகன் வெக்டர் கண்டிப்பிக்க:

$y = 0$ என்க,

$$2x + z = 0$$

$$\Rightarrow z = -2x$$

$$\Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{y}{-2}, y = 0$$

$\lambda = 2$ எனும்போது $(1, -2, 0)$ என்பன ஐகன் வெக்டர் ஆகும்.

$\lambda = 8$ மற்றுமொரு ஐகன் வெக்டர்:

$$[A - 8I]X = 0$$

$$\begin{bmatrix} 6-8 & -2 & 2 \\ -2 & 3-8 & -1 \\ 2 & -1 & 3-8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-2x - 2y + 2z = 0 \quad \dots(1)$$

$$-2x - 5y - z = 0 \quad \dots(2)$$

$$2x - y - 5z = 0 \quad \dots(3)$$

சமன்பாடு (2) யை 2-ஆல் பெருக்கி, அதனை சமன்பாடு (1) உடன் கூட்டுக,

$$-6x - 12y = 0$$

$$x = -2y$$

$\Rightarrow$

$$y = -z$$

சமன்பாடு (2) மற்றும் (3) யை கூட்டுக,

$$y = -z$$

$\therefore$

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$$

$\lambda = 8$ உடன் தொடர்புடைய ஐகன் வெக்டர் $(2, -1, 1)$

அனைத்து ஐகன் வெக்டர்களும் L.I மற்றும் R_3 - ன் படிவ அடுக்களம்

ஐகன் அடுக்களம் என்பது $\{(1, 2, 0), (1, 0, -2), (2, -1, 1)\}$ ஆகும்..

எடுத்துக்காட்டு 5.73 : கொடுக்கப்பட்ட $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ அணியில் இருந்து அனைத்து ஐகன் மதிப்பு,

ஐகன் வெக்டர் மற்றும் ஐகன் அடுக்களம் ஆகியவற்றை கண்டிப்பிடி.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட அணியின் சிறப்பியல்பு சமன்பாடு,

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{அல்லது} \quad (1-\lambda)[(2-\lambda)(3-\lambda)-2]-0-1[2-4+2\lambda]=0$$

$$\text{அல்லது} \quad [\lambda^2 - 5\lambda + 4 - \lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda - 2\lambda + 2] = 0$$

$$\text{அல்லது} \quad \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$$

$$\text{அல்லது} \quad (\lambda - 1)[\lambda^2 - 5\lambda + 6] = 0$$

$$\text{அல்லது} \quad (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

$\lambda = 1, 2, 3$ ஆகியன ஐகன் மதிப்புகள்

$\lambda = 1$ உடன் தொடர்புடைய ஐகன் வெக்டர்

$$[A - 1.I]X = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1-1 & 0 & -1 \\ 1 & 2-1 & 1 \\ 2 & 2 & 3-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

அல்லது

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

அல்லது

$$-x_3 = 0 \quad \dots(1)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad \dots(2)$$

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \quad \dots(3)$$

சமன்பாடு (1)- யை (2) மற்றும் (3)-ல் பிரதியிட

$$x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2$$

மற்றும்

$$2x_1 + 2x_2 = 0$$

 $\therefore$

$$\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{-1} = \frac{x_3}{0}$$

$$\lambda = 1\text{-ன் ஐகன் வெக்டர்} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

 $\lambda = 2$ உடன் தொடர்புடைய ஐகன் வெக்டர்:

$$[A - 2.I]X = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1-2 & 0 & -1 \\ 1 & 2-2 & 1 \\ 2 & 2 & 3-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

அல்லது

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-x_1 - x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_3 \quad \dots(4)$$

$$x_1 + x_3 = 0 \quad \dots(5)$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 + 2x_3 = 0 \quad \dots(6)$$

$$\frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{-1} = \frac{x_3}{-2}$$

$$\lambda = 2\text{-ன் ஐகன் வெக்டர்} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

 $\lambda = 3$ உடன் தொடர்புடைய ஐகன் வெக்டர்:

$$[A - 3.I]X = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1-3 & 0 & -1 \\ 1 & 2-3 & 1 \\ 2 & 2 & 3-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

அல்லது

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-2x_1 + 0x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow -2x_1 = x_3 \quad \dots(7)$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0 \quad \dots(8)$$

$$2x_1 + 2x_2 + 0x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2 \quad \dots(9)$$

$$\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{-1} = \frac{x_3}{-2}$$

$$\lambda = 3 - \text{ன் ஐகன் வெக்டர்} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

அனைத்து ஐகன் வெக்டர்களும் L.I

ஐகன் அடுக்களம் என்பது $\{(1, -1, 0), (2, -1, -2), (1, -1, -2)\}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.74 : அணி $A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ -ல் இருந்து அனைத்து ஐகன் மதிப்பு, ஐகன் வெக்டர் மற்றும் ஐகன் அடுக்களம் ஆகியவற்றை கண்டிப்பிடி.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட அணியின் சிறப்பியல்பு சமன்பாடு,

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -5-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (-5-\lambda)(-2-\lambda) - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 7\lambda + 10 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 7\lambda + 6 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -6, -1$$

ஐகன் மதிப்புகள் முறையே, $\lambda = -6$ மற்றும் -1

$\lambda = -1$ உடன் தொடர்புடைய ஐகன் வெக்டர்:

$$[A + 1.I]X = 0$$

$$\begin{bmatrix} -5+1 & 2 \\ 2 & -2+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

அல்லது

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow -4x_1 + 2x_2 = 0$$

$$2x_1 - x_2 = 0$$

மேலே உள்ள கணத்திலிருந்து $2x_1 - x_2 = 0$ இதற்கு ஒரே ஒரு சாரா சமன்பாடு இருக்கும்.

$$2x_1 - x_2 = 0$$

$\Rightarrow$

$$2x_1 = x_2$$

அல்லது

$$\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{2}$$

$\lambda = -1$ - ன் ஐகன் வெக்டர் $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$,

$\lambda = -6$ உடன் தொடர்புடைய ஐகன் வெக்டர்:

$$[A + 6.I]X = 0$$

$$\begin{bmatrix} -5+6 & 2 \\ 2 & -2+6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + 2x_2 = 0$$

$$2x_1 + 4x_2 = 0$$

மேலே உள்ள கணத்திலிருந்து $x_1 + 2x_2 = 0$ இதற்கு ஒரே ஒரு சாரா சமன்பாடு இருக்கும்.

$$x_1 + 2x_2 = 0$$

$\Rightarrow$

$$x_1 = -2x_2$$

அல்லது

$$\frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{-1}$$

$\lambda = -6$ - ன் ஐகன் வெக்டர் $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$,

அனைத்து ஐகன் வெக்டர்களும் L.I

ஐகன் அடுக்களம் என்பது $\{(1, 2), (2, -1)\}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.75 : கொடுக்கப்பட்ட $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ அணியில் இருந்து அனைத்து ஐகன் மதிப்பு,

ஐகன் வெக்டர் மற்றும் ஐகன் அடுக்களம் ஆகியவற்றை கண்டிப்பிடி.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட அணியின் சிறப்பியல்பு சமன்பாடு,

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 4 \\ 0 & 2-\lambda & 6 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{அல்லது } [(3-\lambda)(2-\lambda)(5-\lambda) - 0] - 0(1) + 4(0) = 0$$

$$\lambda = 2, 3, 5$$

ஐகன் மதிப்புகள் முறையே $\lambda = 2, 3, 5$

$\lambda = 2$ உடன் தொடர்புடைய ஐகன் வெக்டர்:

$$[A - 2I]X = 0$$

$$\begin{bmatrix} 3-2 & 1 & 4 \\ 0 & 2-2 & 6 \\ 0 & 0 & 5-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

அல்லது

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \quad \dots(1)$$

$$6x_3 = 0 \quad \dots(2)$$

$$3x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \quad \dots(3)$$

சமன்பாடு (2) -ஐ (1)-ல் பிரதியிட

$$x_1 + x_2 = 0$$

$$\frac{x_1}{1} = \frac{-x_2}{1}$$

$\therefore$

$$\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{-1}$$

$$\lambda = 2 - \text{ன் ஐகன் வெக்டர்} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$\lambda = 3$ உடன் தொடர்புடைய ஐகன் வெக்டர்:

$$[A - 3I]X = 0$$

$$\begin{bmatrix} 3-3 & 1 & 4 \\ 0 & 2-3 & 6 \\ 0 & 0 & 5-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

அல்லது

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$0x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \quad \dots(4)$$

$$-x_2 + 6x_3 = 0 \quad \dots(5)$$

$$2x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \quad \dots(6)$$

$$\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{0} = \frac{x_3}{0}$$

$$\lambda = 3 - \text{ன் ஐகன் வெக்டர்} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$\lambda = 5$ உடன் தொடர்புடைய ஐகன் வெக்டர்:

$$[A - 5I]X = 0$$

$$\begin{bmatrix} 3-5 & 1 & 4 \\ 0 & 2-5 & 6 \\ 0 & 0 & 5-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

அல்லது

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$2x_1 - x_2 - 4x_3 = 0 \quad \dots(7)$$

$$3x_2 - 6x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 2x_3 \quad \dots(8)$$

$$2x_1 - 6x_3 = 0 \quad \dots(9)$$

சமன்பாடு (8) மற்றும் (9)- ல் இருந்து

$$\frac{x_1}{3} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{1}$$

$$\lambda = 5 - \text{ன் ஐகன் வெக்டர்} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

அனைத்து ஐகன் வெக்டர்களும் L.I

ஐகன் அடுக்களம் என்பது $\{(1, -1, 0), (1, 0, 0), (3, 2, 1)\}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.76 : கொடுக்கப்பட்ட $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ அணியில் இருந்து அனைத்து ஐகன் மதிப்பு, ஐகன்

வெக்டர் மற்றும் ஐகன் அடுக்களம் ஆகியவற்றை கண்டிப்பிடுக்க.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட அணியின் சிறப்பியல்பு சமன்பாடு,

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 5 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (2-\lambda)(-1-\lambda) - 10 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 12 = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda+3)(\lambda-4) = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda+3) = 0, \quad (\lambda-4) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -3, 4$$

$\lambda = -3, 4$ ஆகியன ஐகன் மதிப்புகள்

$\lambda = -3$ உடன் தொடர்புடைய ஐகன் வெக்டர்

$$[A + 3I]X = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2+3 & 2 \\ 5 & -1+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

அல்லது

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$5x + 2y = 0$$

இதற்கு ஒரே ஒரு சாரா சமன்பாடு இருக்கும்.

$$\Rightarrow 5x = -2y$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-2} = \frac{y}{5}$$

$$\lambda = -3 - \text{ன் ஐகன் வெக்டர்} \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix},$$

$\lambda = 4$ உடன் தொடர்புடைய ஐகன் வெக்டர்

$$[A - 4.I]X = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2-4 & 2 \\ 5 & -1-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

$$-2x + 2y = 0$$

$$5x - 5y = 0$$

இவை இரண்டும் நேரியல் சார்ந்த சமன்பாடுகள்

$$x - y = 0$$

$$\Rightarrow x = y$$

$$\text{அல்லது} \quad \frac{x}{1} = \frac{y}{1}$$

$$\lambda = 4 - \text{ன் ஐகன் வெக்டர்} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

அனைத்து ஐகன் வெக்டர்களும் L.I

ஐகன் அடுக்களம் என்பது $\{(-2, 5), (1, 1)\}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.77 : கொடுக்கப்பட்ட $A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -3 \\ -9 & -2 & 3 \\ 18 & 0 & -8 \end{bmatrix}$ அணியில் இருந்து அனைத்து ஐகன் மதிப்பு,

ஐகன் வெக்டர் மற்றும் ஐகன் அடுக்களம் ஆகியவற்றை கண்டிப்பிடி.

தீர்வு : (மாணவர்கள் இதனை முயற்சிக்கவும்) ஐகன் மதிப்புகள் முறையே 1, -2, -2; ஐகன் வெக்டர்கள்

முறையே $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ஐகன் அடுக்களம் இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு 5.78 : கொடுக்கப்பட்ட $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ அணியில் இருந்து அனைத்து ஐகன் மதிப்பு, ஐகன்

வெக்டர் மற்றும் ஐகன் அடுக்களம் ஆகியவற்றை கண்டிப்பிடி.

தீர்வு : ஐகன் மதிப்புகள் முறையே 1, 1, 5; ஐகன் வெக்டர்கள் முறையே $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. ஐகன் அடுக்களம் முறையே $\{(-2, 1, 0), (1, 0, -1), (1, 1, 1)\}$.

எடுத்துக்காட்டு 5.79 : கொடுக்கப்பட்ட $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ அணியில் இருந்து அனைத்து ஐகன் மதிப்பு, A25 மற்றும் $A + 2I$ ஆகியவற்றின் ஐகன் மதிப்புகளை கண்டிப்பிடுக.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட அணியின் சிறப்பியல்பு சமன்பாடு,

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 8 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\ \Rightarrow & \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \\ \Rightarrow & (\lambda+1)(\lambda-3) = 0 \\ \Rightarrow & \lambda = -1, \lambda = 3 \end{aligned}$$

A25 ஐகன் மதிப்புகள் முறையே:

$$(i) \quad \lambda = -1 \Rightarrow \lambda^{35} = (-1)^{25} = -1$$

$$(ii) \quad \lambda = -3 \Rightarrow \lambda^{35} = (3)^{25} = 3^{25}$$

$A + 2I$ ஐகன் மதிப்புகள் முறையே:

$$(i) \quad \lambda = -1 \Rightarrow A + 3I = -1 + 2(1) = -1 + 2 = 1$$

$$(ii) \quad \lambda = -3 \Rightarrow A + 3I = 3 + 2(1) = 3 + 2 = 5$$

சிக்கலெண் ஐகன் மதிப்புகள்

எடுத்துக்காட்டு 5.80 : $0 < \theta < \pi$ என்ற நிலையில், அணி $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ -ல் மெய்யென்-யின் ஐகன் மதிப்புகள் இல்லை மற்றும் இதன் விளைவாக ஐகன் வெக்டர்கள் இல்லை எனக்காட்டுக.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட அணியின் சிறப்பியல்பு சமன்பாடு,

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \cos \theta - \lambda & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(\cos \theta - \lambda)^2 + \sin^2 \theta = 0$$

$$\cos^2 \theta - 2\lambda \cos \theta + \sin^2 \theta = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda \cos \theta + 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{2\cos \theta \pm \sqrt{4\cos^2 \theta - 4}}{2}$$

$$\lambda = \frac{2\cos \theta \pm 2i\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}{2} = \cos \theta \pm i \sin \theta$$

இறுதியாக அணி A-ல் மெய்யெண்-யின் ஐகன் மதிப்புகள் இல்லை மற்றும் இதன் விளைவாக ஐகன் வெக்டர்கள் இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு 5.81 : கொடுக்கப்பட்ட அணி $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ இருந்து அனைத்து ஐகன் மதிப்பு, ஐகன் வெக்டர் ஆகியவற்றை கண்டுபிடிக்க மற்றும் A க்கான ஐகன் அடுக்களம் இருக்கிறதா என கண்டுபிடி? **தீர்வு :** கொடுக்கப்பட்ட அணியின் சிறப்பியல்பு சமன்பாடு,

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)^2 = 0$$

$$\lambda = 1, 1 \text{ (ஐகன் மதிப்புகள்)}$$

$\lambda = 1$ உடன் தொடர்புடைய ஐகன் வெக்டர்:

$$AX = \lambda X$$

$$[A - \lambda I]X = 0$$

$$[A - I]X = 0, (\lambda = 1)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \text{ன் ஐகன் வெக்டர்}$$

$\Rightarrow$

$$y = 0$$

$x = 1$ என எடுக்க, $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ என்பது $\lambda = 1$ உடன் தொடர்புடைய ஐகன் வெக்டர்.

இங்கே அணி A-ல், X ஆனது R_2 இன் அடுக்களத்தை உருவாக்கவில்லை என்பதை நாம் பார்க்கலாம். எனவே கொடுக்கப்பட்ட அணி A-க்கு ஒரு ஐகன் அடுக்களம் இல்லை.

பயிற்சி 5.11

பின்வரும் அணிகளின் பண்பு மூலங்களை கண்டுபிடிக்க:

1. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 17 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} a & h & g \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$

பின்வரும் அணிகளின் ஐகன் மதிப்புகள் மற்றும் அதனுடன் தொடர்புடைய ஐகன் வெக்டர்களையும் கண்டுபிடிக்க:

4. $\begin{bmatrix} -3 & -9 & -12 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$7. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -7 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$8. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$9. \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

விடைகள்

1. -1, 1, 2 2. 2, 3, -2 3. a, b, c
 4. 0, (-3, 1, 0); 1, (12, -4, -1); 0, (-3, 1, 0) 5. 1, (1, 1, -1); 2, (2, 1, 0); 0, (-3, 1, 0)
 6. (2, 2, 2); (1, 0, 0) 7. (1, 1, 1); (0, 0, 1) 8. -1(-3, -1, 3); 2(0, 1, 0); 3(1, 1, 1)
 9. 2(1, 0, 0); -2(0, 1, 1); -4(0, 1, -1)

5.15 கெய்லி ஆமில்ட்டன் தேற்றம்

வரையறை : ஒவ்வொரு சதுர அணியும் அணியும் அதன் பண்பு சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும். அதாவது, சதுர அணி A இன் n வது வரிசையின் பண்பு சமன்பாடு

$$|A - \lambda I| = (-1)^n I^n + k_1 I^{n-1} + k_2 I^{n-2} + \dots + k_n = 0 \text{ என்றால்,} \quad \dots(1)$$

$$(-1)^n A^n + k_1 A^{n-1} + k_2 A^{n-2} + \dots + k_n I = 0.$$

நிரூபணம் :

$P = \text{adj} (A - \lambda I)$ என எடுத்துக்கொள்வோம்.

$(A - \lambda I)$ ன் உறுப்புகள் λ ன் அதிகபட்சம் முதல் படியாக இருந்தால் $P = \text{adj} (A - \lambda I)$ ன் உறுப்புகள் λ ன் படி $(n - 1)$ அல்லது அதற்கும் குறைவாக உள்ள பல்லுறுப்புக்கோவைகள் ஆகும்.

எனவே, நாம் P-ஐ பல அணிகளாகப் பிரிக்கலாம், ஒவ்வொன்றும் λ மற்றும் அதே அடுக்கைக் கொண்டிருக்கும். மேலும் $P = P_1 I^{n-1} + P_2 I^{n-2} + P^{n-1} \lambda + P_n$...(2)

என எழுதலாம்.

மேலும், M என்பது ஒரு சதுர அணி என்றால், $M (\text{adj} M) = |M| \times I$

$$\therefore (A - \lambda I) P = |A - \lambda I| \times I$$

மற்றும் (2) லிருந்து,

$$\begin{aligned} (A - \lambda I) (P_1 I^{n-1} + P_2 I^{n-2} + \dots + P_{n-1} \lambda + P_n) \\ = [(-1)^n I^n + k_1 I^{n-1} + k_2 I^{n-2} + \dots + k_{n-1} \lambda + k_n] I \end{aligned}$$

இருபுறமும் ஒரே மாதிரி அடுக்கைக் கொண்ட குணகங்களை சமன்படுத்துவதன் மூலம், பின்வருமாறு பெறுகிறோம்.

$$-P_1 = (-1)^n I \quad (\because IP_1 = P_1)$$

$$AP_1 - P_2 = k_1 I$$

$$-P_3 = k_2 I$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$AP_{n-1} - P_n = k_{n-1} I$$

$$AP_n = k_n I$$

இந்த சமன்பாட்டை முறையே $A_n, A_{n-1}, A_{n-2}, \dots, A, I$ ஆல் முன் பெருக்கல் மற்றும் கூட்டக் கிடைப்பது,

$$0 = (-1)^n A^n + k_1 A^{n-1} + k_2 A^{n-2} + \dots + k_{n-1} A + k_n I$$

$$\text{or} \quad (-1)^n A^n + k_1 A^{n-1} + k_2 A^{n-2} + \dots + k_{n-1} A + k_n I = 0 \quad \dots(3)$$

தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

குறிப்பு 1 : (3) ஐ A^{-1} ஆல் பெருக்க,

$$(-1)^n A^{n-1} + k_1 A^{n-2} + \dots + k_{n-1} I + k_n A^{-1} = 0$$

$\Rightarrow$

$$A^{-1} = (-1/k_n) [(-1)^n A^{n-1} + k_1 A^{n-2} + \dots + k_{n-1} I]$$

இவ்வாறு, கெய்லி-ஆமில்டன் தேற்றம் ஒரு அணியின் தலைகீழைக் கணக்கிடுவதற்கான மற்றொரு முறையைக் கொடுக்கிறது. இந்த முறை A இன் $(n-1)$ அடுக்குகளின் அடிப்படையில் n இன் வரிசை n இன் தலைகீழை வெளிப்படுத்துவதால், அது பெரிய அணிகளின் தலைகீழைக் கணக்கிட ஏற்றது.

குறிப்பு 2 : m ஒரு நேர்மறை முழு எண்ணாக இருந்தால் $m > n$, (3) ஐ A^{m-n} ஆல் பெருக்க கிடைப்பது, $(-1)^n A^m + k_1 A^{m-1} + k_2 A^{m-2} + \dots + k_{n-1} A^{m-n+1} + k_n A^{m-n} = 0$.

நேர்மறையான ஒருங்கிணைந்த அடுக்கான A_n ($m > n$), A இன் நேரியல் வெளிப்பாடாக இருப்பதைக் காட்டுகிறது.

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 5.81 : கெய்லி ஆமில்டன் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ ன் நேர்மாறு அணியைக் காண்க.

தீர்வு : A ன் பண்பு சமன்பாடு $|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(1-\lambda)(1+\lambda) - 4 \\ &= -1 + \lambda^2 - 4 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 5 = 0$$

கெய்லி-ஆமில்டன் தேற்றத்தின் படி, λ இன் இடத்தில் A வை பிரதியிட பண்பு சமன்பாட்டை அளிக்கிறது.

$A^2 - 5I = 0$ ஐக் காட்ட,

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \\ A^2 - 5I &= \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

$$A^2 - 5I = 0$$

இருபுறமும் A^{-1} ஆல் பெருக்க,

$$A - 5A^{-1} = 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - 5A^{-1} = 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.82 : கெய்லி ஆமில்டன் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ ன் நேர்மாறு அணியைக் காண்க.

தீர்வு : நீங்களே முயற்சி செய்யுங்கள்.

எடுத்துக்காட்டு 5.83 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ எனில், $A^6 - 4A^5 + 8A^4 - 12A^3 + 14A^2$ ஐ A ன் ஒரு நேரியல் பல்லுறுப்புக்கோவையாக எழுதுக.

தீர்வு :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ என எடுத்துக்கொள்வோம்.}$$

A ன் பண்பு சமன்பாடு

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(3-\lambda) + 2 = 0$$

$$3 - 3\lambda - \lambda + \lambda^2 + 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

கெய்லி-ஆமில்டன் தேற்றத்தின் படி,

$$A^2 - 4A + 5I = 0 \quad \dots(1)$$

$$\begin{aligned} A^6 - 4A^5 + 8A^4 - 12A^3 + 14A^2 &= A^6 - 4A^5 + 5A^4 + 3A^4 - 12A^3 + 14A^2 \\ &= A^4(A^2 - 4A + 5I) + 3A^4 - 12A^3 + 14A^2 \\ &= 0 + 3A^4 - 12A^3 + 14A^2 \quad ((1)\text{லிருந்து}) \\ &= 3A^4 - 12A^3 + 15A^2 - A^2 \\ &= 3A^2(A^2 - 4A + 5I) - A^2 \\ &= 0 - A^2 \\ &= 5I - 4A \end{aligned}$$

எனவே, $A^6 - 4A^5 + 8A^4 - 12A^3 + 14A^2 = 5I - 4A$

எடுத்துக்காட்டு 5.84: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ என்ற அணிக்கு கெய்லி-ஆமில்டன் தேற்றத்தை சரிபார்க்கவும்.

அதிலிருந்து, A^{-1} கணக்கிடவும்.

தீர்வு : A ன் பண்பு சமன்பாடு $|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2 - \lambda)[(2 - \lambda)(2 - \lambda) - 1] + 1[(-2 + \lambda) + 1] + 1[1 - 2 + \lambda] = 0$$

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 4 = 0$$

கெய்லி-ஆமில்டன் தேற்றத்தை சரிபார்க்க, நாம் $A^3 - 6A^2 + 9A - 4I = 0$... (1)

என்று காட்ட வேண்டும்.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 22 & -21 & 21 \\ -21 & 22 & -21 \\ 22 & -21 & 22 \end{bmatrix}$$

$$A^3 - 6A^2 + 9A - 4I$$

$$= \begin{bmatrix} 22 & -21 & 21 \\ -21 & 22 & -21 \\ 22 & -21 & 22 \end{bmatrix} - 6 \begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix} + 9 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

இது கெய்லி-ஆமில்டன் தேற்றத்தை சரிபார்க்கிறது.

இப்போது, (1) இன் இரு பக்கங்களையும் A^{-1} ஆல் பெருக்க,

$$A^2 - 6A + 9I = 4A^{-1}$$

$$4A^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix} - 6 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} + 9 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.85 : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ எனில் கெய்லி ஆமில்டன் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி, A^{-1} ஐக் காண்க.

தீர்வு :

A -ன் பண்பு சமன்பாடு $|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(1-\lambda)(1+\lambda) - 4 \\ &= -1 + \lambda^2 - 4 \\ &\Rightarrow \lambda^2 - 5 = 0 \end{aligned}$$

கெய்லி-ஆமில்டன் தேற்றத்தின் படி, A பண்பு சமன்பாட்டை நிறைவு செய்கிறது

$$\therefore A^2 = 5I$$

$$\Rightarrow (A^2)^4 = (5I)^4$$

$$\Rightarrow A^8 = 625I$$

எடுத்துக்காட்டு 5.86 : கெய்லி ஆமில்டன் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ன் நேர்மாறு அணியைக் காண்க.

தீர்வு : A ன் பண்பு சமன்பாடு $|A - \lambda I| = 0$.

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(4-\lambda)[1+\lambda^2-2\lambda+4]-3[2-2\lambda+2]+1[4-1+\lambda]=0$$

$$(4-\lambda)[\lambda^2-2\lambda+5]+6\lambda-12+\lambda+3=0$$

$$4\lambda^2-8\lambda+20-\lambda^3+2\lambda^2-5\lambda+7\lambda-9=0$$

$$-\lambda^3+6\lambda^2-6\lambda+11=0$$

$$\lambda^3-6\lambda^2+6\lambda-11=0$$

கெய்லி-ஆமில்டன் தேற்றத்தின் படி,

$$A^3-6A^2+6A-11I=0$$

சமன்பாட்டை A^{-1} ஆல் பெருக்க,

$$A^2-6A+6I-11A^{-1}=0$$

$$11A^{-1}=A^2-6A+6I$$

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 23 & 17 & -1 \\ 8 & 3 & -2 \\ 9 & 7 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11A^{-1} &= \begin{bmatrix} 23 & 17 & -1 \\ 8 & 3 & -2 \\ 9 & 7 & -2 \end{bmatrix} - 6 \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & -1 & -7 \\ -4 & 3 & 10 \\ 3 & -5 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 5 & -1 & -7 \\ -4 & 3 & 10 \\ 3 & -5 & -2 \end{bmatrix}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.87 : $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் பண்பு சமன்பாட்டைக் காண்க. அதிலிருந்து

$A^8-5A^7+7A^6-3A^5+A^4-5A^3+8A^2-2A+I$ என்று குறிக்கப்பெறும் அணியைக் காண்க.

தீர்வு : A ன் பண்பு சமன்பாடு $|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)[(1-\lambda)(2-\lambda)] + [\lambda-1] = 0$$

$$(2-\lambda)^2(1-\lambda) + (\lambda-1) = 0$$

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 7\lambda - 3 = 0$$

கெய்லி-ஆமில்டன் தேற்றத்தின் படி,

$$A^3 - 5A^2 + 7A - 3I = 0 \quad \dots(1)$$

$$A^8 - 5A^7 + 7A^6 - 3A^5 + A^4 - 5A^3 + 8A^2 - 2A + I$$

$$= A^5(A^3 - 5A^2 + 7A - 3I) + A(A^3 - 5A^2 + 7A - 3I) + A^2 + A + I$$

$$= 0 + 0 + A^2 + A + I$$

[(1) லிருந்து]

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^2 + A + I = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.88 : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ என்ற அணிக்கு கெய்லி-ஆமில்டன் தேற்றத்தை சரிபார்க்கவும்.

அதிலிருந்து A^{-1} கணக்கிடவும்.

தீர்வு : நீங்களே முயற்சி செய்யுங்கள்.

விடை: $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

எடுத்துக்காட்டு 5.89 : $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ எனில், கெய்லி-ஆமில்டன் தேற்றத்தை பயன்படுத்தி A^4 -ஐக் காண்க.

தீர்வு :

A ன் பண்பு சமன்பாடு $|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 5 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$[-(2-\lambda)(2+\lambda)-5] = 0$$

$$[-(2^2 - \lambda^2) - 5] = 0$$

$$\lambda^2 - 9 = 0$$

...(1)

கெய்லி-ஆமில்டன் தேற்றத்தின் படி, A ஆனது சமன்பாடு (1) ஐ நிறைவு செய்கிறது.

$$A^2 - 9I = 0$$

$$A^2 = 9I$$

$$(A^2)^3 = (9I)^3$$

$$A^6 = 729I$$

எடுத்துக்காட்டு 5.90 : $A = \begin{bmatrix} o & r & -q \\ -r & o & p \\ q & -p & o \end{bmatrix}$ என்ற அணி கெய்லி-ஆமில்டன் தேற்றத்தை நிறைவு செய்யும் என நிரூபி.

தீர்வு :

A ன் பண்பு சமன்பாடு $|A - \lambda I| = 0$.

$$\begin{vmatrix} o-\lambda & r & -q \\ -r & o-\lambda & p \\ q & -p & o-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda(\lambda^2 + p^2) - r(r\lambda - pq) - q(rp + q\lambda) = 0$$

$$-\lambda^3 - \lambda p^2 - r^2\lambda + rpq - rpq - q^2\lambda = 0$$

$$-\lambda^3 - \lambda p^2 - r^2\lambda - q^2\lambda = 0$$

$$\lambda^3 + \lambda p^2 + r^2\lambda + q^2\lambda = 0$$

...(1)

கெய்லி-ஆமில்டன் தேற்றத்தின் படி,

$$A^3 + Ap^2 + Ar^2 + Aq^2 = 0 \text{ என நிறுவ வேண்டும்.}$$

$$\begin{aligned}
A^2 &= \begin{bmatrix} o & r & -q \\ -r & o & p \\ q & -p & o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} o & r & -q \\ -r & o & p \\ q & -p & o \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} r^2 - q^2 & qp & rp \\ pq & r^2 - p^2 & rq \\ pr & qr & q^2 - p^2 \end{bmatrix} \\
A^3 &= \begin{bmatrix} r^2 - q^2 & qp & rp \\ pq & r^2 - p^2 & rq \\ pr & qr & q^2 - p^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} o & r & -q \\ -r & o & p \\ q & -p & o \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} o & -r(r^2 + q^2 + p^2) & q(r^2 + q^2 + p^2) \\ r(r^2 + q^2 + p^2) & o & -p(r^2 + q^2 + p^2) \\ -q(r^2 + q^2 + p^2) & p(r^2 + q^2 + p^2) & o \end{bmatrix} \\
&= (r^2 + q^2 + p^2) \begin{bmatrix} o & -r & q \\ r & o & -p \\ -q & p & o \end{bmatrix} \\
&= -(r^2 + q^2 + p^2)A
\end{aligned}$$

$$A^3 + Ap^2 + Ar^2 + Aq^2 = -(r^2 + q^2 + p^2)A + (p^2 + r^2 + q^2)A = 0$$

கெய்லி-ஆமில்டன் தேற்றம் நிறைவு செய்யப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு 5.91 : $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் பண்பு சமன்பாட்டைக் கண்டறிந்து,

$A^5 + 5A^4 - 6A^3 + 2A^2 - 4A + 7I$ ஆல் குறிக்கப்பெறும் அணியைக் காண்க. மேலும்

$A^5 - 4A^4 - 7A^3 + 11A^2 - A - 10I$ ஐ A இல் நேரியல் பல்லுறுப்புக்கோவையாக வெளிப்படுத்தவும்.

தீர்வு :

A ன் பண்பு சமன்பாடு $|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 0$$

$$3 - \lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 8 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$

கெய்லி-ஆமில்டன் தேற்றத்தின் படி,

$$A^2 - 4A - 5I = 0$$

...(1)

$$A^5 + 5A^4 - 6A^3 + 2A^2 - 4A + 7I$$

$$\begin{aligned}
 &= A^3[A^2 + 5A - 6I] + 2(A^2 - 2A) + 7I \\
 &= A^3[4A + 5I + 5A - 6I] + 2(4A + 5I - 2A) + 7I && [(1) \text{ லிருந்து}] \\
 &= A^3[9A - I] + 2(2A + 5I) + 7I \\
 &= A^2[9A^2 - A] + 4A + 10I + 7I \\
 &= (4A + 5I)(36A + 45I - A) + 4A + 17I \\
 &= (4A + 5I)(35A + 45I) + 4A + 17I \\
 &= 5(4A + 5I)(7A + 9I) + 4A + 17I \\
 &= 5(28A^2 + 36A + 35A + 45I) + 4A + 17I \\
 &= 5(28A^2 + 71A + 45I) + 4A + 17I \\
 &= 5(112A + 140I + 71A + 45I) + 4A + 17I \\
 &= 5(183A + 185I) + 4A + 17I \\
 &= 919A + 942I \\
 &= 919 \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + 942 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1861 & 3673 \\ 1838 & 3699 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

இப்பொழுது $A^5 - 4A^4 - 7A^3 + 11A^2 - A - 10I$

$$\begin{aligned}
 &= A^5 - 4A^4 - 5A^3 - 2A^3 + 11A^2 - A - 10I \\
 &= A^3[A^2 - 4A - 5I] - 8A^2 - 10A + 11A^2 - A - 10I && [(1) \text{ லிருந்து}] \\
 &= 0 + 3A^2 - 11A - 10I \\
 &= 12A + 15I - 11A - 10I \\
 &= A + 5I
 \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.92 : $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் பண்பு சமன்பாட்டைக் காண்க. அதிலிருந்து

A^{-1} அணியைக் காண்க.

தீர்வு : நீங்களே முயற்சி செய்யுங்கள்.

விடை : $A^{-1} = \frac{1}{35} \begin{bmatrix} -4 & 11 & -5 \\ -1 & -6 & 23 \\ 6 & 1 & -10 \end{bmatrix}$

பயிற்சி 5.12

பின்வரும் அணிகளுக்கு கெய்லி ஆமில்டன் தேற்றத்தை சரிபார்க்கவும்.

$$1. A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad 2. A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

பின்வரும் அணிகளுக்கு கெய்லி ஆமில்டன் தேற்றத்தை சரிபார்த்து A^{-1} ஐக் காண்க.

$$3. A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad 4. A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$5. A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \text{ என்ற அணியின் பண்பு சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடித்து } A \text{ ஆனது}$$

அச்சமன்பாட்டை நிறைவு செய்கிறது என நிரூபி.

$$6. A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ எனில் கெய்லி ஆமில்டன் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி } 2A^5 - 3A^4 + A^2 - 4I \text{ ஐ } A\text{-ன் நேரியல் பல்லுறுப்புக்கோவையாக எழுதவும்.}$$

விடைகள்

$$3. \begin{bmatrix} -6 & 2 & -3 \\ 7 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad 4. \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad 5. \lambda^3 = 0 \quad 6. 138A - 403I$$

5.16 அணிகளின் மூலைவிட்டமயமாக்கல்

ஒரு சதுர அணி A -ன் ஐகன் வெக்டர்கள் முறையே $x_1, x_2, \dots, x_n$, என்க. அதனுடன் தொடர்புடைய ஐகன் மதிப்புகள் $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

$$Ax_i = \lambda_i x_i$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$, ஆகிய நிரல்களைக் கொண்ட சதுர அணியை B -ஆல் குறிக்க. $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ யை P - என எழுதுவோம்.

$$AP = A[x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]$$

$$AP = [Ax_1, Ax_2, Ax_3, \dots, Ax_n]$$

$$= [\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \lambda_3 x_3, \dots, \lambda_n x_n]$$

$$= PD$$

[P மற்றும் D -ன் படிநிலையை முழுமையாக எழுதி பெருக்கினால் இதனை சரிபார்க்க முடியும்]

$$\text{இங்கு } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P^{-1}AP = D$$

அணி A-க்கு n நேரியல் சாரா ஐகன் வெக்டர்கள் இல்லாதபோது இந்த முறை தோல்வியடையாது. அத்தகைய அணிகள் மூலைவிட்ட அணிகளாக இருக்காது.

நேரியல் சாரா ஐகன் வெக்டர்கள் இருக்கும்போது, P என்பது பூச்சியமற்ற கோவை மற்றும் $P^{-1}AP$ ஒரு மூலைவிட்ட அணியின் ஐகன் மதிப்புகள் அதன் மூலைவிட்டமாக உறுப்புகளாக அமையும்.

அணி A ஐ மூலைவிட்டமாக்க பயன்படும் அணி P ஆனது A இன் மாதிரி அணி என்று அழைக்கப்படுகிறது. இவ்வாறு பெறப்பட்ட மூலைவிட்ட அணி A இன் நிறமாலை அணி என்று அழைக்கப்படுகிறது.

A மற்றும் C ஆகியன இரண்டு ஒத்த அணிகள் எனில், B என்பது பூச்சியமற்ற அணி

$$C = B^{-1}AB$$

வெளிப்படையாக, A என்ற மூலைவிட்ட அணி D என்ற ஒரு மூலைவிட்ட அணி போன்றது.

குறிப்பு : ஒரே மாதிரியான அணிகளுக்கு ஒரே ஐகன் மதிப்புகள் உள்ளன.

சுவாரஸ்யமான உண்மைகள்

1. இது கணிசமான சில கணக்கீடுகளை எளிதாக்குகிறது. இருப்பினும், மூலைவிட்டத்தின் முதல் பயன்பாடு மார்க்கோவ் செயல்முறைகளில் காணலாம், அங்கு சில சதுர அணிகள் சக்தி பரவலாகப் பயன்படுத்தப்படுகின்றது மற்றும் மார்கோவ் செயல்முறைகள் உண்மையில் பல பயன்பாடுகள் நிறைந்தவை
• சந்தை • வானிலை முன்னறிவிப்பு • மரபியல் • வாயுக்களின் பரவல் • கூகிளின்(Google) பக்க தரவரிசை வழிமுறை மிகவும் பிரபலமான ஒன்று ஆகும்.
2. இது இயந்திரவியல் பயன்படுத்தப்படுகிறது, எடுத்துக்காட்டாக, மந்தநிலையின் முக்கிய அச்சகளைக் கண்டறியும் ஒரு வழி (பண்புரு மந்தநிலை என்பது மூலைவிட்ட அணி ஆகும்).
3. ஊசலாடும் அமைப்பின் இயல்பான முறைகளைக் கண்டறிவதற்கு (இதற்கு ஒரே நேரத்தில் இயக்கவியல் மற்றும் சாத்தியமான ஆற்றலின் இரண்டு அணிகளின் மூலைவிட்டமயமாக்கல் தேவைப்படுகிறது).



அன்றாட வாழ்வில் பயன்பாடுகள்

- ♦ அணியின் உயர் சக்திகளை திறம்பட கணக்கிடுவதே மூலைவிட்டமயமாக்கலின் ஒரு முக்கியமான பயன்பாடாகும்.

$$A = M^{-1}DM, \text{ பிறகு } A^n = M^{-1}D^nM.$$

மேலே குறுப்பிட்டவற்றின் பண்புகள் அணி A-ன் உயர்களை அடுக்குகளின் கணக்கிட உதவுகிறது, D^n கணக்கிடும் முறை A^n உடன் ஒப்பிடுகையில் மிகவும் எளிதானது

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 5.93 : $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ என்பது மூலைவிட்ட அணி மற்றும் மாதிரி அணியைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட அணியின் பண்பு சமன்பாடு,

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (-1-\lambda)[- \lambda(2-\lambda)+1]-2[- \lambda+1]-2[-1+2-\lambda]=0$$

$$\Rightarrow (-1-\lambda)[\lambda^2-2\lambda+1]-2[- \lambda+1]-2[1-\lambda]=0$$

$$\Rightarrow (-1-\lambda)(1-\lambda)^2-4(1-\lambda)=0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)[(-1-\lambda)(1-\lambda)-4]=0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)(\lambda^2-5)=0$$

$$\Rightarrow \lambda = 1, \pm\sqrt{5}$$

இப்போது, ஐகன் மதிப்புகளுடன் தொடர்புடைய ஐகன் வெக்டர்களைக் காண்கிறோம்.

$\lambda = 1$ எனில், $X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$, என்பது ஐகன் வெக்டர் என்க.

$$AX_1 = \lambda X_1$$

$$(A - \lambda I)X_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-2x_1 + 2y_1 - 2z_1 = 0 \Rightarrow -x_1 + y_1 - z_1 = 0 \quad \dots(1)$$

$$x_1 + y_1 + z_1 = 0$$

$$-x_1 - y_1 - z_1 = 0 \Rightarrow x_1 + y_1 + z_1 = 0 \quad \dots(2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow$$

$$2y_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 0$$

சமன்பாடு (2)-ல் இருந்து

$$-x_1 - z_1 = 0 \Rightarrow -x_1 = z_1$$

$$z_1 = -1 \Rightarrow x_1 = 1$$

$\therefore$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = \sqrt{5}$ எனில், $X_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$, என்பது ஐகன் வெக்டர் என்க.

$$AX_2 = \lambda X_2$$

$$[A - \sqrt{5}I]X_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1-\sqrt{5} & 2 & -2 \\ 1 & 2-\sqrt{5} & 1 \\ -1 & -1 & 0-\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(-1-\sqrt{5})x_2 + 2y_2 - 2z_2 = 0 \quad \dots(3)$$

$$x_2 + (2-\sqrt{5})y_2 + z_2 = 0 \quad \dots(4)$$

$$-x_2 - y_2 - \sqrt{5}z_2 = 0 \quad \dots(5)$$

(5) + (6) $\Rightarrow$

$$(1-\sqrt{5})y_2 + (1-\sqrt{5})z_2 = 0$$

$$y_2 = -z_2$$

$$z_2 = 1 \Rightarrow y_2 = -1$$

சமன்பாடு (5)-ல் இருந்து

$$-x_2 = y_2 + \sqrt{5}z_2 = -1 + \sqrt{5}$$

$$x_2 = 1 - \sqrt{5}$$

$\therefore$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1-\sqrt{5} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = -\sqrt{5}$ எனில், $X_3 = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix}$, என்பது ஐகன் வெக்டர் என்க.

$$AX_3 = \lambda X_3$$

$$[A + \sqrt{5}I]X_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1+\sqrt{5} & 2 & -2 \\ 1 & 2+\sqrt{5} & 1 \\ -1 & -1 & 0+\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(-1+\sqrt{5})x_3 + 2y_3 - 2z_3 = 0 \quad \dots(6)$$

$$x_3 + (2+\sqrt{5})y_3 + z_3 = 0 \quad \dots(7)$$

$$-x_3 - y_3 + \sqrt{5}z_3 = 0 \quad \dots(8)$$

$$(7) + (8) \Rightarrow$$

$$(1+\sqrt{5})y_3 + (1+\sqrt{5})z_3 = 0$$

$$y_3 = -z_3$$

$$z_3 = 1 \Rightarrow y_3 = -1$$

சமன்பாடு (8)-ல் இருந்து

$$-x_3 = y_3 - \sqrt{5}z_3 = -1 - \sqrt{5}$$

$$x_3 = 1 + \sqrt{5}$$

$\therefore$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{5} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore$

$$\text{மாதிரி அணி } P = \begin{bmatrix} 1 & 1-\sqrt{5} & 1+\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$|P| = -2\sqrt{5} \neq 0$$

$\therefore$

$$P^{-1} = \frac{1}{(-2\sqrt{5})} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2\sqrt{5} & 2+\sqrt{5} & -2+\sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{(-2\sqrt{5})} \begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{5} & 2\sqrt{5} \\ 1 & 2+\sqrt{5} & 1 \\ -1 & -2+\sqrt{5} & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ \frac{-1}{2\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2} & \frac{-1}{2\sqrt{5}} \\ \frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = D$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ \frac{-1}{2\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2} & \frac{-1}{2\sqrt{5}} \\ \frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1-\sqrt{5} & 1+\sqrt{5} \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{-5-2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{5-2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1-\sqrt{5} & 1+\sqrt{5} \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.94 : அணி $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ என்பது C என்ற புலத்தில் மூலவிட்ட அணியைக் முடியாது என நிறுவுக.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட அணியின் பண்பு சமன்பாடு,

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda = 2, 2$$

எனவே ஒரே தனித்துவமான ஐகன் மதிப்பு 2 ஆகும்.

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \text{ உடன் தொடர்புடைய ஐகன் வெக்டர்}$$

$$AX = \lambda X$$

$$[A - \lambda I]X = 0$$

$$[A - 2I]X = 0$$

$\lambda = 2$ எனில்

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$0x + y = 0$$

$\Rightarrow$

$$y = 0$$

$x = 1, y = 0$ என பிரதியிட $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\lambda = 2$ உடன் தொடர்புடைய ஒரே ஐகன் வெக்டர் X ஆகும்.

இவ்வாறு கொடுக்கப்பட்ட சதுர அணி A-க்கு ஒரே ஒரு நேரியச் சாரா ஐகன் வெக்டர் உள்ளது.

எனவே கொடுக்கப்பட்ட சதுர அணி A மூலவிட்ட அணியாக முடியாது

[கொடுக்கப்பட்ட அணி A க்கு மூலவிட்டமாக இருக்க, அது 2 நேரியச் சாரா ஐகன் வெக்டர்களைக் கொண்டிருக்க வேண்டும்].

எடுத்துக்காட்டு 5.95 : அணி $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ என்பது மூலவிட்டமானது என்பதைக் காட்டுக.

தீர்வு : முதலில் நாம் செய்ததைப் போலவே (எடுத்துக்காட்டு 5.4 இல் பக்கம் எண். 5.9.) ஐகன் மதிப்புகள் மற்றும் ஐகன் வெக்டர்களைக் கண்டுபிடிப்போம்.

அதன் பிறகு மூலவிட்டத்தை சரிபார்க்க

கொடுக்கப்பட்ட அணி A ஆனது 3 நேரியச் சாரா ஐகன் வெக்டர்களைக் கொண்டுள்ளது. எனவே கொடுக்கப்பட்ட அணி மூலவிட்டமானது.

எடுத்துக்காட்டு 5.96 : கொடுக்கப்பட்ட அணி $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ என்பது மூலைவிட்டமானது என்பதைக் காட்டுக.

தீர்வு : முதலில் நாம் செய்ததைப் போலவே (எடுத்துக்காட்டு 5.5 இல் பக்கம் எண். 5.11.) ஐகன் மதிப்புகள் மற்றும் ஐகன் வெக்டர்களைக் கண்டுபிடிப்போம்.

அதன் பிறகு மூலைவிட்டத்தை சரிபார்க்க

கொடுக்கப்பட்ட அணி A ஆனது 3 நேரியச் சாரா ஐகன் வெக்டர்களைக் கொண்டுள்ளது. எனவே கொடுக்கப்பட்ட அணி மூலைவிட்டமானது.

பயிற்சி 5.13

1. கொடுக்கப்பட்ட அணிகளின் மூலைவிட்டத்தை சரிபார்க்க:

i. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

ii. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -3 \\ -9 & -2 & 3 \\ 18 & 0 & -8 \end{bmatrix}$ கொடுக்கப்பட்ட அணி A மூலைவிட்ட அணியாக முடியாது என்பதைக் காட்டுக.

3. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ அணியின் மூலைவிட்டத்தை சரிபார்க்க:

4. கொடுக்கப்பட்ட அணி $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ என்பது மூலைவிட்டமா அல்லது இல்லையா? உங்கள் பதிலை சரியான காரணத்துடன் விளக்குக.

விடைகள்

3. மூலைவிட்டம்

4. ஆமாம், மூலைவிட்டம், எண்கணித சராசரியின் ஒவ்வொரு ஐகன் மதிப்பு = வடிவியல் சராசரியின் ஒவ்வொரு ஐகன் மதிப்பு.

5.17 இருபடி வடிவம்

வரையறை: $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ என்ற சமப்படித்தான பல்லுறுப்புக்கோவையானது புலம் F ன் மேலுள்ள

$x_1, x_2, \dots, x_n$ என்ற n மாறிகளைக் கொண்ட இருபடி வடிவமாகும். இங்கு a_{ij} என்பது புலம் F ல் உள்ள உறுப்புகள் ஆகும்.

a_{ij} என்பது மெய் எனில், இருபடி வடிவமானது ஒரு மெய் இருபடி வடிவம் என்றழைக்கப்படும்.

தேற்றம் 1

என்ற n மாறிகளைக் கொண்ட புலம் F ன் மேலுள்ள ஒவ்வொரு இருபடி வடிவத்தையும் என்ற வடிவத்தில் வெளிப்படுத்தலாம். இங்கு B என்பது F ல் உள்ள n வரிசைக் கொண்ட சமச்சீர் அணியாகும். மேலும் X என்பது $[x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ என்ற நிரலனியாகும்.

நிரூபணம் :

$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ என்பது புலம் F ன் மேலுள்ள $x_1, x_2, \dots, x_n$ என்ற n மாறிகளைக் கொண்ட இருபடி வடிவம்

என எடுத்துக்கொள்வோம். x_i, x_j என்பன அளவுருகள் என்பதால் $x_i x_j = x_j x_i$.

எனவே x_i, x_j -ன் கெழு $a_{ij} + a_{ji}$ ஆகும். ஆகவே, பாதி வகைக்கெழுவை x_i -க்கும் பாதி வகைக்கெழுவை

x_j -க்கும் ஒதுக்கலாம். $b_{ii} = a_{ii}$ மற்றும் $b_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}), i \neq j$ என்றவாறு மற்றோரு அளவுரு b_{ij} -ஐ

எடுத்துக்கொள்வோம். பிறகு,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} x_i x_j$$

$b_{ij} = b_{ji}$ என்பதால், $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ என்ற அணி சமச்சீர் அணியாகும்.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ எனில், } X^T B X = \begin{bmatrix} x_1 x_2 \dots x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

B என்ற சமச்சீர் அணி $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ என்ற இருபடி வடிவம் கொண்ட அணி என்றழைக்கப்படும்.

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 5.98 : $x_1^2 - 3x_1 x_2 + x_2^2 + x_1 x_3$ என்ற இருபடி வடிவத்தின் அணியை எழுதுக.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட இருபடி வடிவத்தை $x_1^2 - \frac{3}{2} x_1 x_2 - \frac{3}{2} x_2 x_1 + x_2^2 + \frac{1}{2} x_1 x_3 + \frac{1}{2} x_3 x_1$ என எழுதலாம்.

கொடுக்கப்பட்ட இருபடி வடிவத்தின் அணி

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = 1, a_{12} = -\frac{3}{2}, a_{13} = \frac{1}{2}, a_{21} = -\frac{3}{2}, a_{22} = 1, a_{23} = 0, a_{31} = \frac{1}{2}, a_{32} = 0, a_{33} = 0$$

$$\text{எனவே } A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.99 : $x_1^2 + 2x_2^2 - 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 5x_2x_3$ என்ற இருபடி வடிவத்தின் அணியை எழுதுக

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட இருபடி வடிவத்தை $x_1^2 + 2x_2^2 - 7x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_1 + 4x_1x_3 + 4x_3x_1 + \frac{5}{2}x_2x_3 + \frac{5}{2}x_3x_2$ என

எழுதலாம். கொடுக்கப்பட்ட இருபடி வடிவத்தின் அணி

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = 1, a_{12} = -2, a_{13} = 4, a_{21} = -2, a_{22} = 2, a_{23} = \frac{5}{2}, a_{31} = 4, a_{32} = \frac{5}{2}, a_{33} = -7$$

$$\text{எனவே } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & \frac{5}{2} \\ 4 & \frac{5}{2} & -7 \end{bmatrix}$$

$$\text{எடுத்துக்காட்டு 5.100 : } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ என்ற அணியின் இருபடி வடிவத்தை எழுதுக}$$

தீர்வு : இருபடி வடிவம் $= X^T A X$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 5x_3 & 2x_1 + 3x_3 & 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 5x_3 & 2x_1 + 3x_3 & 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_3x_1 + 2x_1x_2 + 3x_2x_3 + 5x_1x_3 + 3x_2x_3 + 4x_3^2$$

$$= x_1^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 10x_3x_1 + 6x_2x_3$$

5.17.1 இருபடி வடிவங்களை மூலவிட்டமயமாக்கல்

ஒவ்வொரு உண்மையான சமச்சீர் அணி A -க்கும் ஒரு செங்குத்து அணி U இருந்தால் $U^T A U = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$ என இருக்கும் என்பதை நாம் அறிவோம்.

இங்கு $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ஆகியவை A இன் பண்பு மூலங்கள்.

$X = UY$ என்ற செங்குத்து உருமாற்றத்தை $X^T A X$ என்ற இருபடி வடிவத்தில் பயன்படுத்த,

$$X^T A X = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 \text{ என கிடைக்கும்.}$$

A -ன் தரம் r எனில், $n - r$ பண்பு மூலங்கள் பூஜ்ஜியம். மேலும்,

$$X^T A X = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_r y_r^2$$

இங்கு $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ஆகியவை பூஜ்ஜியம் அல்லாத பண்பு மூலங்கள்.

வரையறை. புலம் F ன் மேல் பூஜ்ஜியமற்ற அணி P , $B = P^T A P$ என இருந்தால், புலம் F மீது உள்ள n வரிசை கொண்ட ஒரு சதுர அணி B , புலம் F மீது உள்ள n வரிசை கொண்ட மற்றொரு சதுர அணி A க்கு ஓரியைபுடையதாக (congruent) இருக்கும்.

“அணிகளின் ஓரியைபு தன்மை “ என்ற உறவு F புலத்தில் உள்ள அனைத்து $n \times n$ அணியின் தொகுப்பில் ஒரு சமமான உறவு ஆகும். எனவே பூஜ்ஜியமற்ற அணி P இருந்தால், $B = P^T A P$ என இருக்கும்.

$$B = (P^T A P)^T = P^T A^T P$$

$$= P^T A P, A \text{ என்பது சமச்சீர் அணி.}$$

$$= B$$

எனவே, சமச்சீர் அணிக்கு ஓரியைபுடையதாக ஒவ்வொரு அணியும் சமச்சீர் அணி ஆகும்.

தேற்றம் 1 : (சமச்சீர் அணியின் ஓரியைபு குறைப்பு). A ஆனது, புலம் F ன் மேலுள்ள தரம் r உடைய n நிரைகளைக் கொண்ட பூஜ்ஜியமல்லாத சமச்சீர் அணி என்றால், F ன் மேல் n நிரைகளைக் கொண்ட

பூஜ்ஜியமற்ற அணி P ஐ $P^T A P = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ என எழுதலாம். இங்கு A_1 என்பது F ன் மேல் உள்ள வரிசை

r உடைய பூஜ்ஜியமில்லாத ஒற்றை மூலைவிட்ட அணி ஆகும். மற்றும் 0 ஒவ்வொன்றும் பொருத்தமான அளவின் பூஜ்ஜிய அணி ஆகும்.

முடிவு 1 : ஒரு புலம் F மீது உள்ள ஒவ்வொரு இருபடி வடிவமான $X^T AX$ க்கு, F ன் மேல் $X = P Y$

என்ற பூஜ்ஜியமற்ற நேரியல் உருமாற்றம், $X^T AX$ என்ற வடிவம் $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_r y_r^2$ என்றவாறு உருமாறும்.

இங்கு $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ என்பன F ன் அளவுருகள் மற்றும் r என்பது A என்ற அணியின் தரம் ஆகும்.

வரையறை : சமச்சீர் அணி A ன் தரம், $X^T AX$ ன் இருபடி வடிவத்தின் தரம் என்று அழைக்கப்படுகிறது.

முடிவு 2 : $X^T AX$ என்பது n மாறிலிகளில் தரம் r இன் மெய் இருபடி வடிவமாக இருந்தால், $X = P Y$

என்ற மெய் பூஜ்ஜியமற்ற நேரியல் உருமாற்றம், $X^T AX$ என்ற வடிவம்

$Y^T P^T A P Y = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_r^2$ என்றவாறு உருமாறும்.

இது நியதி வடிவம் (canonical form) அல்லது மெய் இருபடி வடிவத்தின் சாதாரண வடிவம் என்று அழைக்கப்படுகிறது.

$X^T AX$ இன் சாதாரண வடிவத்தில் உள்ள நேர்மறை உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை இருபடி வடிவத்தின் குறியீடாக அழைக்கப்படுகிறது, அதேசமயம் $p - (r - p) = 2p - r$ என்பது இருபடி வடிவத்தின் கையொப்பம் என அழைக்கப்படுகிறது மற்றும் பொதுவாக s ஆல் குறிக்கப்படுகிறது. வரிசை n இன் பூஜ்ஜியமற்ற அணி A உடன் இருபடி வடிவம் $X^T AX$, $n = r = p$, அதாவது $n =$ தரம் = குறியீடு என்றால் நேர்மறை வரையறை என்று அழைக்கப்படுகிறது. $r < n$ மற்றும் $r = p$ என்றால் ஒரு இருபடி வடிவம் நேர்மறை அரை-வரையறை என்று அழைக்கப்படுகிறது. இதேபோல் ஒரு இருபடி வடிவம் $r < n$ மற்றும் அதன் குறியீடு பூஜ்ஜியமாக இருந்தால் எதிர்மறை அரை வரையறை எனப்படும்.

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 5.101 : $3x^2 + 3z^2 + 4xy + 8xz + 8yz$ ஐ நியதி வடிவத்திற்கு குறை.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட இருபடி வடிவத்தை $X^T AX$ என எழுதலாம்.

$$\text{எனவே சமச்சீர் அணியானது } A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

A ஐ மூலைவிட்ட அணியாகக் குறைப்போம். $A = I_3 A I_3$ என்பது நாம் அறிந்ததே.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \rightarrow R_2 - \frac{2}{3} R_1, R_3 \rightarrow R_3 - \frac{4}{3} R_1 \text{ என இயக்க}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{7}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{4}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$C_2 \rightarrow C_2 - \frac{2}{3}C_1, C_3 \rightarrow C_3 - \frac{4}{3}C_1$ என இயக்க,

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{7}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{4}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_3 \rightarrow R_2 + R_3$ என இயக்க,

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$C_3 \rightarrow C_2 + C_3$ என இயக்க,

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Diag} \left(3, -\frac{4}{3}, -1 \right) = P^T A P$$

கொடுக்கப்பட்ட இருபடி வடிவத்தின் நியதி வடிவம்

$$Y^T (P^T A P) Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 3y_1^2 - y_3^2$$

ஆகவே, $\rho(A) = 3, p = 1, s = 2p - r = 2 - 3 = -1$

எடுத்துக்காட்டு 5.102 : $6x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$ ஐ கூட்டுதொகைக்குக் குறைக்கவும். மற்றும் அதனுடன் தொடர்புடைய நேரியல் உருமாற்றத்தைக் கண்டறியவும். குறியீட்டு மற்றும் கையொப்பத்தையும் கண்டுபிடிக்கவும்.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட இருபடி வடிவத்தை $X^T AX$ என எழுதலாம்.

$$\text{எனவே சமச்சீர் அணியானது } A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

A ஐ மூலைவிட்ட அணியாகக் குறைப்போம். $A = IAI$ என்பது நாம் அறிந்ததே.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$R_2 \rightarrow R_2 + \frac{1}{3}R_1, R_3 \rightarrow R_3 - \frac{1}{3}R_1$ என இயக்க,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 0 & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

$C_2 \rightarrow C_2 + \frac{1}{3}C_1, C_3 \rightarrow C_3 - \frac{1}{3}C_1$ என இயக்க,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 0 & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

$R_2 \rightarrow R_2 + \frac{1}{3}C_1, C_3 \rightarrow C_3 + \frac{1}{2}C_2$ என இயக்க,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{16}{7} \end{bmatrix}$$

எனவே அணி A ஆனது மூலைவிட்ட அணி B ஆக குறைகிறது.

$$P^T A P = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{16}{7} \end{bmatrix} \text{ இங்கு, } P = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

நியதி வடிவம்,

$$Q = Y^T B Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{16}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 6y_1^2 + \frac{7}{3}y_2^2 + \frac{16}{7}y_3^2$$

$$X = P Y \text{ i.e. } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = y_1 + \frac{1}{3}y_2 - \frac{2}{7}y_3, x_2 = y_2 + \frac{1}{7}y_3, x_3 = y_3$$

$$\text{ஆகவே, } \rho(A) = 3, p = 3, s = 2p - r = 6 - 3 = 3$$

5.18 இருபடி வடிவத்தை நியதி வடிவமாக குறைத்தல்

எந்த எண்ணிக்கையிலான மாறிகளிலும் இரண்டாவது படியின் சமப்படித்தான வெளிப்பாடு இருபடி வடிவம் என்று அழைக்கப்படுகிறது.

$$\text{எடுத்துக்காட்டாக, } A = \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, X^T = [x \ y \ z] \text{ எனில்,}$$

$$X^T A X = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy \quad \dots(i)$$

இது இருபடி வடிவமாகும்.

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \text{ என்பன } A \text{ ன் ஐகன் மதிப்புகள் எனவும், } X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}, X_3 = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} \text{ என்பன ஐகன்}$$

வெக்டர்கள் எனவும் எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}$$

எனவே இருபடி வடிவம் (i) கூட்டுத்தொகையாகக் குறைக்கப்படுகிறது (அதாவது நியதி வடிவம்)
 $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2$

மற்றும் P என்பது உருமாற்றத்தின் அணி, இது ஒரு செங்குத்து அணி ஆகும். அதனால்தான் மேலே உள்ள குறைப்பு முறை செங்குத்து உருமாற்றம் என்று அழைக்கப்படுகிறது.

படிகள் :

1. இருபடி வடிவத்தை அணி வடிவமாக மாற்றவும்.
2. ஐகன் மதிப்புகள் மற்றும் ஐகன் வெக்டர்களைக் கண்டறியவும்.
3. மாடல் அணி (P) கண்டுபிடிக்கவும்.
4. இயல்பாக்கப்பட்ட அணி (N) ஐக் கண்டறியவும்.
5. N^T கண்டுபிடிக்க.
6. D ($D = N^T AN$) ஐக்கண்டுபிடி

சில விளக்க எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 5.103 : இருபடி வடிவமான $3x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2yz + 2zx - 2xy$ ஐ நியதி வடிவத்திற்கு குறைக்கவும். உருமாற்றத்தின் அணியையும் குறிப்பிடவும்.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட இருபடி வடிவத்தின் அணியானது $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

A-ன் பண்பு சமன்பாடு $|A - \lambda I| = 0$.

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

இது $\lambda = 2, 3, 6$ ஐ அதன் ஐகன் மதிப்புகளாக அளிக்கிறது. எனவே கொடுக்கப்பட்ட இருபடி வடிவம் $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2$ அதாவது $2x^2 + 3y^2 + 6z^2$ என்ற நியமன வடிவத்திற்கு குறைகிறது.

உருமாற்றத்தின் அணியைக் கண்டுபிடிக்க:

$|A - \lambda I| = 0$ லிருந்து $(3 - \lambda)x - y + z = 0$; $-x + (5 - \lambda)y - z = 0$; $x - y + (3 - \lambda)z = 0$ என்ற சமன்பாட்டை நாம் பெறலாம். இப்போது $\lambda = 2$ உடன் தொடர்புடையது,
 $x - y + z = 0$; $-x + 3y - z = 0$; $x - y + z = 0$

எனவே, $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-1}$

ஐகன் வெக்டர் $(1, 0, -1)$ மற்றும் அதன் இயல்பான வடிவம் $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

இதேபோல் $\lambda = 3$ உடன் தொடர்புடையது, ஐகன் வெக்டர் $(1, 1, 1)$ மற்றும் அதன் இயல்பான வடிவம் $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

இறுதியாக, $\lambda = 6$ உடன் தொடர்புடையது, ஐகன் வெக்டர் $(1, -2, 1)$ மற்றும் அதன் இயல்பான வடிவம் $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

$$\text{எனவே உருமாற்றத்தின் அணி } P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

எடுத்துக்காட்டு 5.104 : $8x^2 + 7y^2 + 3z^2 - 12xy + 4zx - 8yz$ ஐ செங்குத்து மாற்றத்தின் மூலம் நியமன வடிவத்தில் குறைக்கவும்.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட இருபடி வடிவத்தின் அணியானது $A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$

A ன் பண்பு சமன்பாடு $|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} 8-\lambda & -6 & 2 \\ -6 & 7-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

இது $\lambda = 0, 3, 15$ ஐ அதன் ஐகன் மதிப்புகளாக அளிக்கிறது.

$\lambda = 0$ க்கான பண்பு வெக்டர் $[A - 0I]X = 0$ ஆல் வழங்கப்படுகிறது.

$$8x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 0$$

அதாவது, $-6x_1 + 7x_2 - 4x_3 = 0$

$$2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0$$

முதல் இரண்டைத் தீர்க்கும்போது, $\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{2}$ என கிடைக்கும். இது ஐகன் வெக்டர்

$X_1 = k_1(1, 2, 2)^T$ ஐ அளிக்கிறது.

$\lambda = 3$ போது, தொடர்புடைய பண்பு வெக்டர் $[A - 3I]X = 0$ ஆல் வழங்கப்படுகிறது.

$$5x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 0$$

அதாவது, $-6x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 0$

$$2x_1 - 4x_2 = 0$$

ஏதேனும் இரண்டு சமன்பாடுகளையும் தீர்க்க, $X_2 = k_2(2, 1, -2)^T$ என நாம் பெறுகிறோம்.

இதேபோல் $\lambda = 15$ உடன் தொடர்புடைய பண்பு வெக்டர் $X_3 = k_3(2, -2, 1)^T$ is ஆகும்.

$\therefore$ இயல்பாக்கப்பட்ட மாதிரி அணி,

$$B = \left[\frac{x_1}{\|x_1\|}, \frac{x_2}{\|x_2\|}, \frac{x_3}{\|x_3\|} \right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

இப்போது B என்பது செங்குத்து அணி மற்றும் $|B| = 1$

அதாவது, $B^{-1} = B^T$ மற்றும் $B^{-1}AB = D = \text{diag}(0, 3, 15)$

$$\text{அதாவது, } \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

$$X^T AX = Y^T (B^{-1}AB)Y = Y^T DY$$

$$= \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 0y_1^2 + 3y_2^2 + 15y_3^2$$

இது தேவையான நியதி வடிவம்.

பயிற்சி 5.14

1. கொடுக்கப்பட்ட இருபடி வடிவத்திற்கான அணியை எழுதுங்கள்.

a. $Q = -3x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

b. $Q = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

c. $Q = x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_2x_3$

2. இருபடி வடிவமான $2xy + 2yz + 2zx$ ஐ நியதி வடிவத்திற்கு குறைக்கவும்.

3. இருபடி வடிவமான $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3$ ஐ நியதி வடிவத்திற்கு குறைக்கவும்.

4. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3$ என்ற இருபடி வடிவத்தின் தரம் 2 ஆக இருக்கட்டும்:

- c என்ற அளவுருவைக் கண்டறியவும்
- நியமன வடிவமாக மாற்றக்கூடிய ஒரு தலைகீழ் மாற்றத்தைக் கண்டறியவும்.
- $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ என்றால் என்ன நடக்கும்?

விடைகள்

- $A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$
 - $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
 - $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$
- $2x^2 - y^2 - z^2$
- $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$
- c = 9
 - $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
 - $y_2^2 + 9y_3^2$ இது நீள்வட்ட உருளையாக மாறும்.

அகநிலை தீர்க்கப்பட்ட கேள்விகள் (Subjective Solved Questions)

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$(k+1)x + 8y = 4k$$

$$kx + (k+3)y = 3k-1$$

என்ற சமன்பாட்டின் தொகுப்புக்கு எண்ணற்ற தீர்வுகள் உள்ளது எனில் k இன் மதிப்புகளின் எண்ணிக்கையை தீர்மானிக்கவும்

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் தொகுப்பானது

$$(k+1)x + 8y = 4k$$

$$kx + (k+3)y = 3k-1$$

இது $AX = B$ என்ற வடிவத்தில் எழுதப்படலாம்.

இங்கு

$$A = \begin{bmatrix} k+1 & 8 \\ k & k+3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4k \\ 3k-1 \end{bmatrix}$$

விரிவுபடுத்தப்பட்ட அணி,

$$[A : B] = \begin{bmatrix} k+1 & 8 & : & 4k \\ k & k+3 & : & 3k-1 \end{bmatrix}$$

$R_2 \rightarrow R_2 - \frac{k}{k+1} R_1$ என இயக்க,

$$[A : B] \sim \begin{bmatrix} k+1 & 8 & : & 4k \\ 0 & (k+3) - \frac{8k}{k+1} & : & (3k-1) - \frac{4k^2}{k+1} \end{bmatrix}$$

$$[A : B] \sim \begin{bmatrix} k+1 & 8 & : & 4k \\ 0 & \frac{k^2-4k+3}{k+1} & : & \frac{-k^2+2k-1}{k+1} \end{bmatrix}$$

சமன்பாட்டின் தொகுப்பானது எண்ணற்ற தீர்வுகளைக் கொண்டுள்ளது.

$$\rho(A) = \rho(A : B) < n (= 2)$$

$$\text{இதற்காக} \quad \frac{k^2-4k+3}{k+1} = 0 \quad \dots(1)$$

$$\text{மற்றும்} \quad \frac{-k^2+2k-1}{k+1} = 0 \quad \dots(2)$$

$$\begin{aligned} (1) \text{ லிருந்து,} \quad k^2-4k+3 &= 0 \\ (k-3)(k-1) &= 0 \\ k &= 3, 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ லிருந்து,} \quad -k^2+2k-1 &= 0 \\ k^2-2k+1 &= 0 \\ (k-1)^2 &= 0 \\ k &= 1 \end{aligned}$$

∴ எண்ணற்ற தீர்வுகள் கொண்ட சமன்பாட்டிற்கு $k = 1$ என்பது ஒரே ஒரு தீர்வாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 : $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}; I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A^{-1} = \frac{1}{6}(A^2 + cA + dI)$ எனில் (c, d) ன் மதிப்பைக் காண்க.

இங்கு $c, d \in \mathbb{R}$.

தீர்வு : $|A| = 1(4+2) - 0 + 0 = 6 \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{|A|} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -10 & 14 \end{bmatrix}$$

$$cA = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & c \\ 0 & -2c & 4c \end{bmatrix}$$

$$dI = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6}(A^2 + cA + dI)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -10 & 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & c \\ 0 & -2c & 4c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+c+d & 0 & 0 \\ 0 & -1+c+d & 5+c \\ 0 & -10-2c & 14+4c+d \end{bmatrix}$$

அணிகளின் சமத்துவத்தால், அதனுடன் தொடர்புடைய கூறுகளை சமன்படுத்துவதன் மூலம்,

$$6 = 1 + c + d \Rightarrow 5 = c + d$$

$$-1 = 5 + c \Rightarrow -6 = c$$

$$5 = -6 + d \Rightarrow d = 11 \text{ எனவே } (-6, 11) \text{ என்பது தேவையான மதிப்பு ஆகும்.}$$

எடுத்துக்காட்டு 3 : அணி $A = \begin{bmatrix} k & 2k \\ k^2 - k & k^2 \end{bmatrix}$ மற்றும் வெக்டர் $X = [X_1 \ X_2]^T$ ஐக் கருதுங்கள்.

$AX = 0$ என்ற சமன்பாடு எண்ணற்ற தீர்வைக் கொண்டது எனில் k இன் தனித்துவமான உண்மையான மதிப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் கண்டறியவும்.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பு எண்ணற்ற தீர்வுகளைக் கொண்டுள்ளது.

$$|A| = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} k & 2k \\ k^2 - k & k^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$k^3 - 2k(k^2 - k) = 0$$

$$k^3 - 2k^3 + 2k^2 = 0$$

$$-k^3 + 2k^2 = 0$$

$$k^2(-k + 2) = 0$$

$$k = 0 \text{ அல்லது } k = 2$$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட நேரியல் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு எண்ணற்ற தீர்வுகளைக் கொண்டிருப்பின் k க்கு இரண்டு மதிப்புகள் உள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 4 : $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}$ என்ற அணிக்கு $\det(A) = 100$ மற்றும்

அணியெச்சம் A (Trace A) = 14 என இருந்தால் $|a - b|$ இன் மதிப்பை கண்டறியவும்

தீர்வு : அணியெச்சம் $A = 14$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

$$a + 5 + 2 + b = 14$$

$$a + 7 + b = 14$$

$$a + b = 7$$

...(1)

மேலும் $\det A = 100$

R_4 ஐ ப் பொறுத்து விரிவாக்க

$$b \begin{vmatrix} a & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 100$$

$$\Rightarrow b[a(10-0)-0+3(0)] = 100$$

$$\Rightarrow 10ab = 100$$

$$\Rightarrow ab = 10$$

$$b = \frac{10}{a} \quad \dots(2)$$

(2) இலிருந்து b இன் மதிப்பை (1) ல் பிரதியிட,

$$a + \frac{10}{a} = 7$$

$$a^2 + 10 = 7a$$

$$a^2 - 7a + 10 = 0$$

$$(a-5)(a-2) = 0$$

$$a = 5 \text{ or } 2$$

(2) லிருந்து, $b = 2 \text{ or } 5$

$$|a-b| = |5-2| \text{ or } |2-5| = 3$$

எடுத்துக்காட்டு 5 : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ என்ற 5×5 அணியைக் கவனியுங்கள். A க்கு ஒரே ஒரு

உண்மையான ஐகன் மதிப்பு மட்டுமே உள்ளது, பின்னர் A இன் உண்மையான ஐகன் மதிப்பை கண்டறியவும்.

தீர்வு : தனித்தன்மைச் சமன்பாடானது

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 5 & 1-\lambda & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1-\lambda & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$R_1 \rightarrow R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5$ என இயக்க

$$\begin{vmatrix} 15-\lambda & 15-\lambda & 15-\lambda & 15-\lambda & 15-\lambda \\ 5 & 1-\lambda & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1-\lambda & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

இப்போது, $(15-\lambda)$ என்ற பொதுவானதை எடுத்துக் கொள்ளுங்கள்.

$$(15-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1-\lambda & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1-\lambda & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 15-\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 15$$

$\therefore$ 15 என்பது A இன் உண்மையான ஐகன் மதிப்பு.

மற்றொரு அணுகுமுறை :

அனைத்து நிரைகள் அல்லது நிரல்களின் கூட்டுத்தொகை ஒரே மாதிரியாக இருந்தால், அந்தத் தொகை அணியின் ஐகன் மதிப்பாக இருக்கும்.

அணி A இல், அனைத்து நிரைகளின் கூட்டுத்தொகை = 15

$\lambda = 15$ என்பது A இன் உண்மையான ஐகன் மதிப்பு.

எடுத்துக்காட்டு 6 : $A = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ மற்றும் $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ என்று கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

பிறகு A^3 இன் மதிப்பு என்ன?

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டது $A = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ மற்றும் $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

A ன் பண்பு சமன்பாடு $|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} -5-\lambda & -3 \\ 2 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-5-\lambda)(-\lambda) + 6 = 0$$

$$5\lambda + \lambda^2 + 6 = 0$$

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$

ஏனெனில், ஒவ்வொரு அணியும் அதன் பண்பு சமன்பாட்டை திருப்திப்படுத்துகிறது (கெய்லி-ஆமில்டன் தேற்றம்)

$$\therefore A^2 + 5A + 6I = 0$$

$$\Rightarrow A^2 = -5A - 6I$$

இருபுறமும் A ஆல் பெருக்கினால்,

$$A^3 = -5A^2 - 6A$$

$$A^3 = -5(-5A - 6I) - 6A$$

$$A^3 = 25A + 30I - 6A$$

$$A^3 = 19A + 30I$$

எடுத்துக்காட்டு 6 (a) : u மற்றும் v முறையே 1 மற்றும் 3 ஐகன் மதிப்புகளுடன் தொடர்புடைய A இன் ஐகன் வெக்டர்களாக இருக்கட்டும். u + v என்பது A இன் ஐகன் வெக்டர் அல்ல என்பதை நிரூபிக்கவும்.

6 (b) A இன் ஒவ்வொரு நிரையின் கூட்டுத்தொகை 1 மற்றும் B இன் ஒவ்வொரு நிரையின் கூட்டுத்தொகை 2 என்றவாறு A மற்றும் B மெய் அணிகளாக இருந்தால் A B ன் ஐகன் மதிப்பு 2 என நிரூபி.

தீர்வு : (a) கொடுக்கப்பட்டது: u மற்றும் v ஆகியவை முறையே 1 மற்றும் 3 ஆகியவற்றுடன் தொடர்புடைய A இன் ஐகன் வெக்டர்கள்

$$Au = 1u$$

$$[AX = \lambda X]$$

$$Av = 3v$$

$$\therefore A(u+v) = Au + Av$$

$$\Rightarrow = 1u + 3v$$

எனவே, u + v என்பது A இன் ஐகன் வெக்டர் அல்ல

(b) நீங்களே முயற்சி செய்யுங்கள்.

எடுத்துக்காட்டு 7 : A என்பது 3×3 என்ற மெய் மூலைவிட்டமற்ற அணியாக $A^{-1} = A$ என்றவாறு இருக்கட்டும். $\text{tr}(A) = -\det(A) = \pm 1$ என நிரூபி.

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்டது : $A^{-1} = A \Rightarrow A^2 = I$

எனவே, A^2 இன் அனைத்து ஐகன் மதிப்புகளும் 1 ஆகும்

$$\therefore A^2 - I = 0$$

$$\Rightarrow (A - I)(A + I) = 0$$

எனவே, A- யின் இரண்டு ஐகன் மதிப்புகள் +1 மற்றும் -1

ஏனெனில், A^2 இன் ஐகன் மதிப்புகள் A இன் ஐகன் மதிப்புகளின் சதுரம்.

எனவே, A இன் ஐகன் மதிப்புகள் +1 அல்லது -1 ஆக இருக்கும்

எனவே, மூன்றாவது ஐகன் மதிப்பு +1 அல்லது -1 ஆக இருக்கலாம்

அணிக்கோவையானது அதன் ஐகன் மதிப்புகளின் பெருக்கலுக்கு சமம்

எனவே, அணிக்கோவை ± 1 ஆக இருக்கலாம்.

மூன்றாவது ஐகன் மதிப்பு +1 எனில், $\text{tr}(A) = 1$, $\det(A) = -1$

மூன்றாவது ஐகன் மதிப்பு -1 எனில், $\text{tr}(A) = -1$, $\det(A) = 1$

எனவே, $\text{tr}(A) = -\det(A) = \pm 1$.

சுருக்கம்

1. அணி என்பது $(m \times n)$ உறுப்புகளின் வரிசை பிரதிநிதித்துவம் மற்றும் இதை பின்வருமாறு எழுதலாம். $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$
2. தரம் : மேட்ரிக்ஸின் ஏறுபடி வடிவத்தில் பூஜ்ஜியமற்ற வரிசைகளின் எண்ணிக்கை அணியின் தரம் என்று அழைக்கப்படுகிறது.
3. அசமப்படித்தான தொகுப்பிற்கு:
 - a. $R(A) = r(A : B) =$ மாறிகளின் எண்ணிக்கை என்றால், ஒரே ஒரு தீர்வுடன் தொகுப்பானது ஒருங்கமைவுத் தன்மையுடன் இருக்கும்.
 - b. $R(A) = r(A : B) <$ மாறிகளின் எண்ணிக்கை என்றால், எண்ணற்ற தீர்வுகளுடன் தொகுப்பானது ஒருங்கமைவுத் தன்மையுடன் இருக்கும்.
 - c. $R(A) \neq r(A : B)$ என்றால், ஒருங்கமைவற்றது.
4. சமப்படித்தான தொகுப்பிற்கு:
 - a. $R(A) = r(A : B) =$ மாறிகளின் எண்ணிக்கை என்றால், ஒரே ஒரு தீர்வுடன் (வெளிப்படைத் தீர்வு) தொகுப்பானது ஒருங்கமைவுத் தன்மையுடன் இருக்கும்.
 - b. $R(A) = r(A : B) <$ மாறிகளின் எண்ணிக்கை என்றால், எண்ணற்ற தீர்வுகளுடன் (வெளிப்படையற்றத் தீர்வு) தொகுப்பானது ஒருங்கமைவுத் தன்மையுடன் இருக்கும்.
5. ஒரு அணியின் அணிக்கோவையின் மதிப்பு பூஜ்ஜியமல்ல என்றால், அதன் நேர்மாறு அணி உள்ளது மற்றும் அது எப்போதும் தனித்துவமானது.
6. A என்பது வரிசை n உள்ள புலம் F ல் உள்ள ஒரு சதுர அணியாக இருக்கட்டும். $X \in F_n$ எனில் $AX = \lambda X$, $\lambda \in F$ எனும்போது X என்பது λ உடன் தொடர்புடைய A இன் ஐகன் வெக்டர் எனவும் λ என்பது A இன் ஐகன் மதிப்பு எனவும். அழைக்கப்படும்
7. ஐகன் மதிப்புகள் கூடுதல் = $\text{tra}(A)$
ஐகன் மதிப்புகள் பெருக்கல் = $\det(A)$
8. ஒரு $n \times n$ அணி மூலைவிட்டமானதாக இருக்க தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை, அது நேரில் சார்புநிலையானதான n ஐகன் வெக்டர்களைக் கொண்டிருக்க வேண்டும்
9. கெய்லி-ஆமில்டன் தேற்றம்: ஒவ்வொரு சதுர அணியும் அதன் சொந்த பண்பு சமன்பாட்டை திருப்திப்படுத்துகிறது.

குறிக்கோள் கேள்விகள்
(Objective Questions)

1. $2 \begin{bmatrix} x & 9 \\ y & 6 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 15 \\ 12 & 18 \end{bmatrix}$, எனில் x மற்றும் y ன் மதிப்புகள்
 a. $x = 6, y = 3$ b. $y = 6, x = 3$ c. $x = 9/2, y = 6$ d. $x = -1, y = -2$
2. $X + Y = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ மற்றும் $X - Y = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ எனில், அணி X ன் மதிப்பு
 a. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$
3. A என்பது வரிசை 3 உள்ள சதுர அணியாக இருக்கட்டும், பின்னர் $|kA|$ என்பது
 a. $3k |A|$ b. $k |A|$ c. $k^2 |A|$ d. $k^3 |A|$
4. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3 \\ 2x & 5 \end{vmatrix}$, எனில் x ன் மதிப்பு
 a. 3 b. 4 c. 2 d. -1
5. A என்பது வரிசை 2 உடைய நேர்மாறு அணி என்றால், $\det(A^{-1})$ என்பது
 a. 0 b. $\det(A)$ c. 1 d. $\frac{1}{\det A}$
6. $\begin{vmatrix} 0 & 9 & 12 \\ 1 & -3 & -4 \\ 1 & 9 & 12 \end{vmatrix}$ என்ற அணிக்கோவையின் மதிப்பு
 a. 1 b. -1 c. 0 d. 2
7. $\begin{vmatrix} x+2 & 3 \\ x+5 & 4 \end{vmatrix} = 3$ எனில், x ன் மதிப்பு
 a. 7 b. 8 c. 12 d. 10
8. அணி A சமச்சீர் மற்றும் எதிர் சமச்சீராக இருந்தால், பிறகு
 a. A ஒரு மூலவரை அணி b. A ஒரு பூஜ்ஜிய அணி
 c. A ஒரு திசையிலி அணி d. A ஒரு சதுர அணி
9. $A = \begin{bmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{bmatrix}$ மற்றும் $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ எனில், A^{-1} என்பது
 a. $\begin{bmatrix} a+ib & -c+id \\ -a+id & a-ib \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} a-ib & -c-id \\ c-id & a+ib \end{bmatrix}$
 c. $\begin{bmatrix} a-ib & c-id \\ -c-id & a+ib \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{bmatrix}$

10. a, b, c மெய் எனும்போது $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{bmatrix}$ ன் தரம்
- $a = b = c$
 - a, b, c அனைத்தும் வேறுபட்டவை ஆனால் $a + b + c = 0$
 - a, b, c ல் இரண்டு எண்கள் சமமானவை ஆனால் மூன்றில் இருந்து வேறுபட்டவை
 - a, b, c அனைத்தும் வேறுபட்டவை மற்றும் $a + b + c \neq 0$
11. கொடுக்கப்பட்ட அணியின் தரம் 1 எனில் P இன் மதிப்பைக் கண்டறியவும்.
- 4
 - 2
 - 3
 - 1
12. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ என்ற அணியை $P + Q$ என எழுத முடியுமெனில் பின்வருவற்றில் எது சரி, இங்கே P என்பது சமச்சீர் அணி மற்றும் என்பது Q எதிர் சமச்சீர் அணி?
- $Q = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$
 - $Q = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1/2 & -3/2 \\ 3/2 & 0 \end{bmatrix}$
 - $Q = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$
 - $Q = \begin{bmatrix} 0 & 3/2 \\ 3/2 & 0 \end{bmatrix}$
13. ஒரு செங்குத்து அணியின் நிரல்களின் வடிவம்
- வெக்டர்களின் செங்குத்து கணம்
 - வெக்டர்களின் நெறிம அலகு செங்குத்துக் கணம்
 - நேரிய சார்பற்ற கணம்
 - மேற்கூறிய அனைத்தும்
14. அணி M ன் ஐகன் மதிப்புகள் 1 மற்றும் 4, இதற்கு ஒத்த ஐகன் வெக்டர்கள் முறையே $(1, -1)^T$ மற்றும் $(2, 1)^T$. பின்னர், M ஆனது
- $\begin{bmatrix} -4 & -8 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$
 - $\begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$
 - $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$
 - $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
15. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, எனில், பின் மாதிரி அணி P ஆனது
- $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix}$
 - $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix}$
 - $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix}$
 - $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix}$
16. $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ன் பண்பு மூலங்கள் λ_1 மற்றும் λ_2 எனில் $\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ ன் பண்பு மூலங்களானது,
- $\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2$
 - $2\lambda_1$ மற்றும் $2\lambda_2$
 - $\frac{1}{\lambda_1}$ மற்றும் $\frac{1}{\lambda_2}$
 - $|\lambda_1 - \lambda_2|$
17. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ மற்றும் $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, எனில், பிவருவானவற்றில் எது பூஜ்ஜிய அணி?
- $A^2 - A - 5I$
 - $A^2 + A - 5I$
 - $A^2 + A - I$
 - $A^2 - 3A + 5I$
18. $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் ஐகன் மதிப்புகள்?
- 1, 4
 - 1, 2
 - 0, 5
 - 2, -5

19. பின்வருவனவற்றில் எது அணி $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ யின் ஐகன் வெக்டர்?
- a. $[1 \ -2 \ 0 \ 0]^T$ b. $[0 \ 0 \ 1 \ 0]^T$ c. $[1 \ 0 \ 0 \ -2]^T$ d. $[1 \ -1 \ 2 \ 1]^T$
20. அணி $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ யின் ஐகன் வெக்டர்கள், $\begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}$ மற்றும் $\begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix}$ என எழுதப்பட்டால், $a + b$ ன் மதிப்பு?
- a. 0 b. 1/2 c. 1 d. 4
21. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் ஐகன் வெக்டர்?
- a. $[-1 \ 1 \ 1]^T$ b. $[1 \ 2 \ 1]^T$ c. $[1 \ -1 \ 2]^T$ d. $[2 \ 1 \ -1]^T$
22. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ x & y \end{bmatrix}$ எனும் அணியைக் கருத்தில் கொள்க. A யின் ஐகன் மதிப்புகள் 4 மற்றும் 8 எனில்
- a. $x = 4, y = 10$ b. $x = 5, y = 8$ c. $x = -3, y = 9$ d. $x = -4, y = 10$
23. $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ என்ற அணிக்கு ஒரு ஐகன் மதிப்பு 3 எனில், மீதமுள்ள இரு ஐகன் மதிப்புகளைக் காண்க
- a. 2, -5 b. 3, -5 c. 2, 5 d. 3, 5
24. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ எனில், A யின் ஐகன் மதிப்புகள்?
- a. 2, 1, 0 b. 2, $(1+i)$, $(1-i)$ c. 2, -1, -1 d. 1, -1, 0
25. பின்வரும் அணிகளில் எது மூலைவிட்டமானதாக இல்லை?
- a. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

விடைகள்

1. b	2. c	3. d	4. c	5. d
6. c	7. d	8. b	9. C	10. d
11. c	12. c	13. d	14. d	15. d
16. b	17. c	18. a	19. c	20. a
21. b	22. b	23. d	24. B	25. c

14. $A, M_{n \times n}(F)$ க்கு வெவ்வேறு n ஐகன் மதிப்புகள் இருக்குமெனில், A என்பது மூலவிட்டமானது என நிரூபி
15. ஒரே ஐகன் மதிப்புகளுடன் தொடர்புடைய இரண்டு தனித்துவமான ஐகன் வெக்டர்கள் எப்போதும் நேரியல் சார்புநிலையானது என நிரூபிக்கவும்.
16. $\begin{bmatrix} a & b-a \\ 0 & b \end{bmatrix}$ என்ற அணியின்
- ஐகன் மதிப்புகளை காண்க.
 - ஒவ்வொரு ஐகன் மதிப்பிற்கும் ஐகன் வெக்டரைக் காண்க.
 - மூலவிட்ட அணியாக மாற்றுக.
 - மூலவிட்டமயமாக்கலின் முடிவைப் பயன்படுத்தி, ஒவ்வொரு நேர்மறை முழு எண்ணுக்கும் A^k கணக்கிட்டு எளிமைப்படுத்தவும்.

செயல்திட்டம் / செயல்முறை / செயல்பாடு

செயல்திட்டம்

- வரைபடக் கோட்பாட்டில் பல்வேறு வகையான அணிகள் மற்றும் அவற்றின் பயன்பாடுகளைக் காட்டும் மாதிரியைத் தயாரிக்கவும்.
- "மூலவிட்டமயமாக்கல் என்பது A இன் அடுக்கை தீர்மானிக்க உதவுகிறது. அதாவது A இன் அடுக்கு n , இங்கு n என்பது ஒரு முழு எண் ஆகும்." ஒரு உதாரணத்தின் உதவியுடன் கணித ரீதியாகவும் விளக்கவும்.

செயல்முறை

- நிரை எண் மற்றும் நிரல் எண் கொண்ட அணியை MATLAB சார்பில் எழுதுங்கள். சார்பிற்கு அனுப்பப்பட்ட நிரை எண்ணுடன் தொடங்கி, செயல்பாட்டிற்கு அனுப்பப்பட்ட நிரலை கீழே உருட்டி, நிரலில் மிகப்பெரிய முழுமையான மதிப்பைக் கொண்ட நிரை எண்ணைத் திருப்பித் தரவும்.
- மூலவிட்டக் கருத்தைப் பயன்படுத்தி $(dx/dt) = X$ என்ற வகைக்கெழு சமன்பாடுகளின் நேரியல் தொகுப்பு எவ்வாறு தீர்க்கப்படும் என்பதை விளக்கவும். இங்கு X என்பது மாறிலிகளை உறுப்புகளாக கொண்ட $m \times m$ வரிசையுடைய ஒரு மூலவிட்ட அணி.

செயல்பாடு

- ஒரு கடைக்காரர் 1 கிலோ கோதுமை, 1 கிலோ அரிசி மற்றும் 1 கிலோ பஜ்ரா உள்ள P_1 பாக்கெட்டுகளையும், 1 கிலோ கோதுமை, 0 கிலோ அரிசி மற்றும் 1 கிலோ பஜ்ரா கொண்ட P_2 மற்றும் 0 கிலோ கோதுமை, 1 கிலோ அரிசி மற்றும் 1 கிலோ பஜ்ரா கொண்ட P_3 பாக்கெட்டுகளையும் விற்கிறார். பஜ்ராவின் ஒரு கிலோ மட்டுமே வாங்க முடியுமா? என்பதை சரிபார்க்கவும்.ஆம் என்றால், எப்படி?
- வெக்டர் என்றால் என்ன? இது ஒரு வகை அணியா? ஒரு உதாரணம் கொடுத்து உங்கள் பதிலை யோசித்து ஆதரிக்கவும்.
- MATLAB ல் $A, \in R_n \times n$ என்ற அணியின் ஐகன் மதிப்புகள் மற்றும் ஐகன் வெக்டர்களைக் கணக்கிடுவதற்கான பவர் முறையை (இயல்பாக்குதலுடன்) ல் செயற்படுத்துக.

மேலும் அறிக

1. $\begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 \\ 1 & 1 & z \end{bmatrix}$ என்ற அணிக்கோவையின் மதிப்பு எதிர்மறை அல்லாதது எனில் xyz ன் மதிப்பு
 a. -8 b. -1 c. $-2\sqrt{2}$ d. $-16\sqrt{2}$
 2. $\alpha, \beta \neq 0$ மற்றும் $f(n) = \alpha^n + \beta^n$ மற்றும் $\begin{vmatrix} 3 & 1+f(1) & 1+f(2) \\ 1+f(1) & 1+f(2) & 1+f(3) \\ 1+f(2) & 1+f(3) & 1+f(4) \end{vmatrix} = k(1-\alpha)^2(1-\beta)^2(\alpha-\beta)^2$ எனில், k ன் மதிப்பு
 a. $\alpha\beta$ b. $1/\alpha\beta$ c. 1 d. -1
 3. $A = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{bmatrix}$ ன் தரம் காண்க.
 4. $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ என்ற அணியின் தரம் 3ஐ விட குறைவாக இருப்பின் a ன் மதிப்பு காண்க.
 5. A,என்பது R ன் மேல் ஒரு (2×2) அணி மற்றும் $\text{Det}(A + I) = 1 + \text{Det}(A)$ எனில், நாம் முடிவு செய்வது
 a. $\text{Det}(A) = 0$ b. $A = 0$
 c. $\text{Tr}(A) = 0$ d. A பூஜ்ஜியமற்ற கோவை அணி
 6. $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ எனில், A^9 யைக் கணக்கிடுக
 a. $511A + 510I$ b. $309A + 104I$ c. $154A + 155I$ d. $\exp.(9A)$
 7. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ எனில், A^{50} ன் மதிப்பு?
 a. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 50 & 1 & 0 \\ 50 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 48 & 1 & 0 \\ 48 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 25 & 1 & 0 \\ 25 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 24 & 1 & 0 \\ 24 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

விடைகள்

1. a
$$r(A) = \begin{cases} 3, & x \neq y, y \neq z, z \neq x \\ 2, & x = y \text{ அல்லது } x = z \text{ மற்றும் } y \neq z \\ 1, & x = y = z \end{cases}$$
2. c
3. 0, 3
4. 0, 3
5. c
6. d
7. c

மேற்கோள் நூல்கள் /பரிந்துரைக்கப்பட்ட வாசிப்புகள்

1. *Dass, H.K. Advanced Engineering Mathematics, S. Chand Publications.*
2. *Dettman, J.W. (1974). Introduction to Linear Algebra and Differential Equations, McGraw Hill, Kogakusha.*
3. *Garg, Reena (2019). Engineering Mathematics–I, 2nd Edition, Khanna Book Publishing Co. (P) Ltd.*
4. *Grewal, B.S. Higher Engineering Mathematics, Khanna Publishers.*
5. *Dr. Sonendra Gupta, Mathematics–I, Fourth edition 2017 Dhanpatrai Publication Company (P) Ltd. New Delhi.*
6. *Hohn, E. Franz. (1964). Elementary Matrix Algebra, Macmillan Company, NewYork.*
7. *Jain, R.K.; Iyengar, S.R.K. Advanced Engineering Mathematics, 2nd Edition, Narosa.*
8. *Philip, Franklin (1940). A Treatise on Advanced Calculus, Wiley, Inc. NewYork.*
9. *Prasad, Chandrika (1967). Mathematics for Engineers, Pothishala Private Ltd.*
10. *Ram, Babu. Engineering Mathematics, Pearson.*
11. *Thomas, G.B. and Finney, R.L. (1992). Calculus and Analytic Geometry, Addison–Wesley, Reading, MA.*

CO மற்றும் PO அடைவதற்கான அட்டவணை

இந்த பாடத்திட்டத்திற்கான பாடநெறி முடிவுகளை (COs) பாடநெறி முடிந்த பிறகு நிரல் முடிவுகளுடன் (POs) வரைபடமாக்கலாம் மற்றும் இடைவெளியை பகுப்பாய்வு செய்ய PO-களை அடைவதற்கு ஒரு தொடர்பு உருவாக்கப்படலாம். PO-களை அடைவதில் உள்ள இடைவெளியின் சரியான பகுப்பாய்விற்குப் பிறகு, இடைவெளிகளை சமாளிக்க தேவையான நடவடிக்கைகள் எடுக்கப்படலாம்.

CO மற்றும் PO அடைவதற்கான அட்டவணை

பாடப்பகுதி முடிவுகள்	திட்டத்தின் முடிவுகளை அடைதல் (1-பலவீனமான தொடர்பு; 2-நடுத்தர தொடர்பு; 3-வலுவான தொடர்பு)											
	PO-1	PO-2	PO-3	PO-4	PO-5	PO-6	PO-7	PO-8	PO-9	PO-10	PO-11	PO-12
CO-1												
CO-2												
CO-3												
CO-4												
CO-5												
CO-6												

மேலே உள்ள அட்டவணையில் நிரப்பப்பட்ட தரவை இடைவெளி பகுப்பாய்விற்கு பயன்படுத்தப்படலாம்.

குறியீட்டு அட்டவணை

அசமப்படித்தான தொகுப்பு, 548
 அடுக்குத் தொடர், 277
 அணிகளின் கழித்தல், 476
 அணிகளின் பெருக்கல், 476
 அணிகள், 466
 அணிக்கோவைகள், 479
 அணியின் தரம், 526
 அணியின் நியமன வடிவம், 532
 அணியின் நேர்மாறு, 495
 அணியின் வகைகள், 469
 அரை வீச்சு கொசைன் தொடர், 306
 அரை வீச்சு சைன் தொடர், 305
 அலர்வரை, 17
 இணைக்காரணி, 492
 இரண்டு மாறிகளுக்கான டெய்லரின்
 தேற்றம், 379
 இருபடி வடிவங்களை
 மூலைவிட்டமயமாக்கல், 596
 இருபடி வடிவம், 594
 எதிர் -சமச்சீர் அணி, 506
 எல்லை வரிசை, 186
 ஐகன் மதிப்புகள், 561
 ஐகன் வெக்டர்கள், 561
 ஒப்பீட்டு சோதனை, 51
 ஒரு சார்பின் தொடர்ச்சி, 347
 காமா சார்பு, 62
 காஸ் சோதனை, 234
 காஸ் நீக்கல் முறை, 500
 காஸ்-ஜோர்டான் நீக்கல் முறை, 503
 காஷியின் இரண்டாம் தேற்றம், 202
 காஷியின் தொகையீட்டு சோதனை, 245
 காஷியின் முதல் தேற்றம், 201

கெய்லி ஆமில்ட்டன் தேற்றம், 578
 கோஷியின் சராசரி மதிப்பு தேற்றம், 125
 சமச்சீர் அணி, 506
 சமப்படித்தான சமன்பாடுகள், 556
 சமன்பாடுகள் நேரியல் தொகுப்பு, 546
 சாய்வு, 429
 சார்பின் எல்லை, 342
 சிறுமம், 160
 சிற்றணி, 492
 சுழல், 437
 சுழற்சியின் திடமான கன அளவு, 84
 சுழற்சியின் திடமான மேற்பரப்பு, 85
 சூழ்வு, 20
 செங்குத்து அணி, 510
 செங்குத்து வெக்டர், 434
 டிரிசுலெட்டின் நிபந்தனைகள், 283
 டெய்லர் தேற்றம், 130
 டெய்லர்ஸின் முடிவில்லா தொடர், 261
 திசை வகைக்கெழு, 351
 திசையிலி புள்ளி சார்புகள், 429
 தேரப்பெறா வடிவம், 140
 தொடக்கநிலை அணி, 478
 தொடு தளம், 431
 நகல் சூத்திரம், 75
 நிபந்தனை ஒருங்கிணைப்பு, 254
 நிரல் ஏறுபடி வடிவம், 479
 நிரை ஏறுபடி வடிவம், 478
 நிலைப் புள்ளி, 162
 நுண்கணிதத்தின் முதல் அடிப்படை
 தேற்றம், 39
 நுண்கணிதத்தின் இரண்டாம் அடிப்படை
 தேற்றம், 40

நேரியல் உருமாற்றங்கள், 521
நேரியல் உருமாற்றத்தின் தரம் மற்றும்
வெறுமை, 543
நேரியல் சார்பற்ற நிலை, 517
நேரியல் சார்பு நிலை, 517
பகுதி வகைக்கெழு, 357
பார்செவல் தேற்றம், 317
பீட்டா சார்பு, 66
பெருமம், 160
போரியர் தொடர், 283
மடக்கைசோதனை, 329
முழுமையான ஒருங்குதல், 60
முறையற்ற தொகையீடுகள், 47
மூலைவிட்டமாக்கல், 598
மெக்லாரின்ஸ் எல்லையற்ற தொடர், 269
மேக்லாரின் தேற்றம், 329
யூலரின் தேற்றம், 367

ரேபீஸ் சோதனை, 234
ரோலின் தேற்றம், 112
லாக்ரேஞ்சின் சராசரி மதிப்பு தேற்றம்,
119
லிபினிட்ஸ் சோதனை, 250
லோபித்தால் விதி, 176
வரம்புறு தொடர்வரிசை, 185
வரிசையின் வரம்பு, 188
வரையறுத்த தொகையீடு, 37
வளைவு ஆரம், 4
வளைவு மையம், 15
வளைவு வட்டம், 15
வளைவு, 3
வெக்டர் புள்ளி சார்புகள், 429
வெக்டர், 516
ஜகோபியன்ஸ், 396
ஸ்கியூஸ் தத்துவம், 201